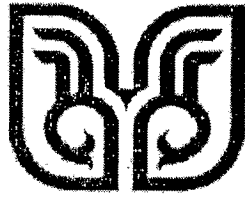




۱۰۲۲۴۱



دانشگاه شهید باهنر کرمان
دانشکده ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی

ساختن کانونی توپولوژی لاور- تیرنی

استاد راهنما:

دکتر سید ناصر حسینی

مؤلف:

مهدی نودهی

۱۳۸۷ / ۲ / ۲۱

شهریور ۱۳۸۶

۱۰۳۶۸
ب



دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد

به

**بخش ریاضی - دانشکده ریاضی و کامپیوتر
دانشگاه شهید باهنر کرمان**

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: مهدی نودهی

استاد راهنما: دکتر سید ناصر حسینی

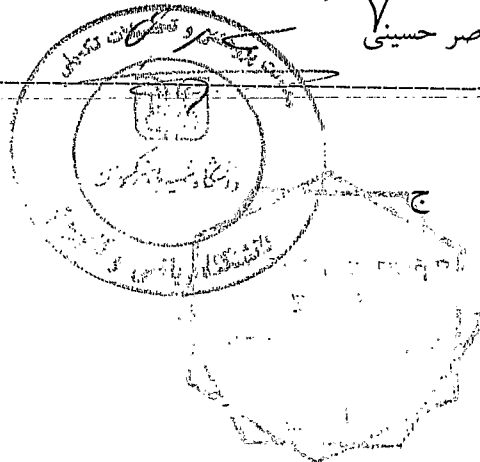
داور ۱: دکتر یوسف بهرامپور

داور ۲: دکتر رضا نکویی

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه: دکتر سید ناصر حسینی

حق چاپ محفوظ و مخصوص به مولف است.

۱۳۸۷ / ۲ / ۲۱



تقدیم به پدر و مادر عزیزتر از جانم

که همواره روشنایی بخش زندگی ام هستند

و تقدیم به همسر مهربانم با عشق

تشکر و قدردانی

حمد و سپاس پروردگار بلند مرتبه را که به من توفیق تحصیل عنایت فرمود، که اگر پرتوی فضل او نبود هرگز موفق به انجام این مهم نمی‌شدم. ابتدا لازم می‌دانم از پدر و مادر عزیزم که من را همواره با صبر و دلسوزی مورد مهر و حمایت خود قرار دادند، تشکر کنم و همچنین از دو خواهر نازنینم که شادی بخش و مایه‌ی دلگرمی من هستند نیز سپاسگزارم و از خدای بزرگ برای ایشان سلامتی و سعادت طلب می‌کنم.

از استاد ارجمند و مهربانم جناب آقای دکتر سید ناصر حسینی به عنوان یک استاد کامل به خاطر راهنمایی‌های ارزنده و دقت نظر فوق‌العاده‌ی ایشان در تمام امور و صبر و حوصله‌ای که صرف این پایان‌نامه کردند، کمال تشکر و قدردانی را دارم و امیدوارم سایه‌ی ایشان همواره بر سر ما دانشجویان باشد. از اساتید عالی مقام جناب آقای دکتر بهرام‌پور و جناب آقای دکتر نکویی که دعوت و داوری این پایان‌نامه را پذیرفتند نیز بسیار سپاسگزارم. توفیق روزافزون، سلامتی و سعادت همه‌ی اساتید بزرگوار را از درگاه خداوند متعال خواستارم.

در پایان لازم می‌دانم از تمامی دوستان عزیز و گرانقدرم از جمله آقای مهدی وطن دوست و خانم رحیمه پورخاندانی به خاطر راهنمایی‌های مفید، دلسوزانه و دوستانه‌ی ایشان در طی این دوره کمال تشکر و سپاس را داشته باشم و از خدای متعال پیروزی و بهروزی ایشان را در طول زندگی خواستارم و امیدوارم از این پس نیز دوستی و همراهیشان را در کنار خود داشته باشم.

چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا زیررسته‌ی \mathcal{C} از \mathcal{X} را در نظر گرفته و به آن تابعگر $C: \mathcal{X}^{op} \rightarrow Set$ را که زیرشئی از رده‌بندی کننده‌ی زیرشی Ω در توپوز $Set^{\mathcal{X}^{op}}$ می‌باشد، تخصیص می‌دهیم. سپس ریخت $\Omega \rightarrow \Omega$ متناظر با آن را، در $Set^{\mathcal{X}^{op}}$ ، از برگشت مربوط به رده‌بندی کننده‌ی زیرشی $\Omega \rightarrow 1: true$ بدست می‌آوریم. بعد شرایط معادلی را روی \mathcal{C} بدست می‌آوریم که نگاشت القا شده‌ی $\Omega \rightarrow \Omega$ یک توپولوژی لاور-تیرنی (ضعیف) شود. در گام بعدی کار را با زیرمجموعه‌ای مانند M از ریخت‌های رسته‌ی \mathcal{X} شروع کرده و همانند کاری که برای زیررسته انجام شد، ابتدا تابعگر $M: \mathcal{X}^{op} \rightarrow Set$ را، که زیرشئی از Ω می‌باشد، تخصیص می‌دهیم و سپس به آن نگاشت $\Omega \rightarrow \Omega$ متناظر می‌کنیم. در ادامه شرایط معادلی را روی M پیدا می‌کنیم که M یک توپولوژی لاور-تیرنی (ضعیف) شود و در مرحله‌ی بعد این شرایط را به زیر مجموعه‌ی M منتقل و آنها را بر حسب M بیان می‌نماییم.

مقدمه

پایان نامه‌ای که در پیش رو دارید، در زمینه‌ی نظریه‌ی رسته در راستای کارهای تحقیقاتی‌ای است که در یک توپوز روی موضوعاتی چون توپولوژی لاور-تیرنی، توپولوژی گروتندیک و در نهایت عملگرهای بستاری و دیگر موضوعات مرتبط انجام می‌شود. در این پایان‌نامه به طور خاص به موضوع توپولوژی لاور-تیرنی پرداخته و مقدمه‌ای برای ورود به مبحث عملگرهای بستاری فراهم شده است.

فرانسیس ویلیام لاور و مایلز تیرنی در سال‌های ۱۹۶۹ و ۱۹۷۰ تعریف مقدماتی توپوز را رشد داده و مفهوم توپوز گروتندیک را توسعه دادند. آن‌ها مفهوم رده‌بندی کننده‌ی زیرشیء را معرفی کردند که نقش اساسی در نظریه‌ی توپوز ایفا می‌کند. سپس توپوز مقدماتی را با استفاده از این مفهوم ارائه کردند.

در نگارش این پایان‌نامه سعی شده است مفاهیم ابتدایی مورد نیاز خواننده به طور کامل آورده شود تا بدان جا که برای درک آن نیازی به مراجعه به منابع دیگر نباشد. از طرفی سبک بیان پایان‌نامه بر اساس روند تحقیقات انجام شده می‌باشد. امید است که گام مفیدی در این زمینه باشد. این پایان‌نامه از سه فصل تشکیل شده است. فصل اول شامل مفاهیم و تعاریف مقدماتی مورد نیاز می‌باشد که در بخش اول آمده است، و در بخش دوم تعاریف و برخی قضایای اساسی که پیش نیاز می‌باشند آورده شده که بعضی نیز نتایج بدست آمده در طول کار می‌باشند.

در فصل دوم که از دو بخش تشکیل شده است، ما ابتدا از یک زیر رسته‌ی \mathcal{C} از یک رسته‌ی کوچک \mathcal{X} ، که تحت برگشت بسته می‌باشد، یک پیش‌بافه‌ی C ، که زیرشیئی از

رده‌بندی کننده‌ی زیرشیء Ω در توپوز Set^{op} می‌باشد، تخصیص می‌دهیم. سپس ریخت $\Omega \rightarrow \Omega$: z متناظر را در رسته‌ی Set^{op} بدست می‌آوریم. آن‌گاه شرایطی را روی پیش‌بافه‌ی C و زیر رسته‌ی \mathcal{C} بررسی می‌کنیم که تحت آن $\Omega \rightarrow \Omega$: z تبدیل به یک توپولوژی لاور-تیرنی (ضعیف) شود. در بخش اول تحت عنوان "پیش‌بافه و تبدیل طبیعی القا شده توسط یک زیر رسته" تبدیل طبیعی $\Omega \rightarrow \Omega$: z را بدست می‌آوریم (همان طور که می‌دانید در یک توپوز هر زیر شیء از Ω با یک تبدیل طبیعی $\Omega \rightarrow \Omega$: z در تناظر یک به یک می‌باشد) و در بخش دوم با عنوان "بررسی شرایط توپولوژی لاور-تیرنی (ضعیف) القا شده توسط یک زیر رسته" به بررسی شرایطی روی زیر رسته‌ی \mathcal{C} از \mathcal{X} می‌پردازیم که نگاشت $\Omega \rightarrow \Omega$: z یک توپولوژی لاور-تیرنی (ضعیف) شود.

در فصل سوم هدف گسترش مطالب فصل دوم بوده بدین معنا که به جای آن که با یک زیر رسته از رسته‌ی \mathcal{X} ، کار کنیم، با یک زیر مجموعه از ریخت‌های رسته‌ی \mathcal{X} شروع می‌کنیم. نحوه‌ی کار بدین ترتیب است که ابتدا یک زیر مجموعه‌ی \mathcal{M} از ریخت‌های \mathcal{X} را انتخاب کرده و شرط بسته بودن تحت برگشت را روی آن می‌گذاریم، سپس به \mathcal{M} یک تابعگر $M: \mathcal{X}^{op} \rightarrow Set$ ، که زیرشیئی از رده‌بندی کننده‌ی زیرشیء Ω در رسته‌ی پیش‌بافه‌ها روی \mathcal{X} می‌باشد، نسبت داده و شرایطی را روی آن بررسی می‌کنیم که تبدیل طبیعی القا شده‌ی $\Omega \rightarrow \Omega$: z ، یک توپولوژی لاور-تیرنی (ضعیف) شود.

در بخش اول تحت عنوان "پیش‌بافه و تبدیل طبیعی القا شده توسط یک زیر مجموعه از ریخت‌های یک رسته" پیش‌بافه و تبدیل طبیعی القا شده توسط زیر مجموعه‌ی \mathcal{M} از ریخت‌های یک رسته‌ی \mathcal{X} را معرفی می‌کنیم و در بخش دوم با عنوان "بررسی شرایط توپولوژی لاور-تیرنی

(ضعیف) و پیش‌بافه‌ی متناظر " بررسی خود را به شرایط توپولوژی لاور- تیرنی (ضعیف) متناظر با تابعگر مربوط شده به M معطوف کرده و در بخش سوم تحت عنوان " بررسی شرایط توپولوژی لاور- تیرنی (ضعیف) القا شده توسط مجموعه‌ای از ریخت‌های یک رسته " شرایط بدست آمده را به زیرمجموعه‌ی M منتقل کرده و آن‌ها را برحسب M بیان می‌کنیم.

فهرست

صفحه	عنوان
۱	فصل اول: مقدمات و پیش‌نیازها
۲	بخش اول: مقدمات رسته‌ای
۱۵	بخش دوم: پیش‌نیازها
	فصل دوم: پیش‌بافه و توپولوژی لاور-تیرنی (ضعیف)
۲۱	القا شده توسط یک زیررسته
۲۳	بخش اول: پیش‌بافه و تبدیل طبیعی القا شده توسط یک زیررسته
۲۸	بخش دوم: بررسی شرایط توپولوژی لاور-تیرنی (ضعیف) القا شده توسط یک زیررسته
	فصل سوم: پیش‌بافه و توپولوژی لاور-تیرنی (ضعیف) القا شده
۴۸	توسط مجموعه‌ای از ریخت‌های یک رسته
۵۰	بخش اول: پیش‌بافه و تبدیل طبیعی القا شده توسط مجموعه‌ای از ریخت‌های یک رسته
۵۲	بخش دوم: بررسی شرایط توپولوژی لاور-تیرنی (ضعیف) و پیش‌بافه‌ی متناظر
	بخش سوم: بررسی شرایط توپولوژی لاور-تیرنی (ضعیف) القا شده
۶۶	توسط مجموعه‌ای از ریخت‌های یک رسته
۸۲	منابع
۸۳	واژه‌نامه
۹۳	فهرست تعاریف

فصل اول

مقدمات و پیش‌نیازها

بخش اول

مقدمات رسته‌ای

تعریف ۱-۱-۱ [۱]. رسته^۱، یک چهارتایی $\mathcal{A} = (O, \text{hom}, id, \circ)$ است، شامل

(الف) کلاس O ، که اعضای آن \mathcal{A} -شیء نامیده می‌شوند،

(ب) برای هر جفت (A, B) از \mathcal{A} -اشیاء، یک مجموعه‌ی $\text{hom}(A, B)$ ، که اعضای آن

\mathcal{A} -ریخت از A به B نامیده می‌شوند (عبارت " $f \in \text{hom}(A, B)$ " به صورت

گرافیکی با بکار بردن پیکان بیان می‌شود؛ یعنی: توسط عباراتی مشابه " $f: A \rightarrow B$ "

یک ریخت است" یا " $A \xrightarrow{f} B$ یک ریخت است")،

(پ) برای هر \mathcal{A} -شیء A ، یک ریخت $A \xrightarrow{id_A} A$ ، که \mathcal{A} -همانی روی A نامیده می‌شود،

(ت) قانون ترکیب که به هر \mathcal{A} -ریخت $A \xrightarrow{f} B$ و هر \mathcal{A} -ریخت $B \xrightarrow{g} C$ یک

\mathcal{A} -ریخت $A \xrightarrow{g \circ f} C$ نسبت می‌دهد و ترکیب f و g نامیده می‌شود، تحت

شرایط زیر:

(الف) ترکیب شرکتپذیر است؛ یعنی: برای ریخت‌های $A \xrightarrow{f} B$ ، $B \xrightarrow{g} C$ و

$$C \xrightarrow{h} D \text{ تساوی } h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \text{ برقرار است،}$$

(ب) \mathcal{A} -همانی‌ها نسبت به عمل ترکیب به صورت همانی عمل می‌کنند؛ یعنی برای

$$\mathcal{A}\text{-ریخت } A \xrightarrow{f} B \text{، } f \circ id_A = f \text{ و } id_B \circ f = f$$

(پ) مجموعه‌های $\text{hom}(A, B)$ دو به دو مجزا می‌باشند.

^۱ Category

تبصره ۱-۱-۲ [۱]. اگر $\mathcal{A} = (O, \text{hom}, \text{id}, \circ)$ یک رسته باشد، آن گاه

الف) کلاس O شامل اشیاء \mathcal{A} ، به طور معمول به صورت $Ob(\mathcal{A})$ نشان داده می شود.

ب) کلاس همهی \mathcal{A} -ریختها (که با $Mor(\mathcal{A})$ نشان داده می شود) برابر اجتماع تمام

مجموعه های $\text{hom}(A, B)$ در \mathcal{A} تعریف می شود.

پ) اگر $A \xrightarrow{f} B$ یک \mathcal{A} -ریخت باشد، A را دامنه ی f گویند ($dom(f)$) و B را

هم دامنه ی f گویند ($cod(f)$).

ت) عمل ترکیب \circ ، یک عمل دوتایی جزئی روی کلاس $Mor(\mathcal{A})$ است. برای یک جفت

(f, g) از ریختها، $f \circ g$ تعریف شده است اگر و تنها اگر دامنه ی f و هم دامنه ی g

منطبق باشند.

ث) اگر بیشتر از یک رسته مورد بحث باشد، اندیس برای وضوح بیشتر (همانند

$\text{hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$) استفاده می شود.

مثال ۱-۱-۳. رسته ی Set : کلاس اشیاء آن شامل همهی مجموعه هاست؛ $\text{hom}(A, B)$

مجموعه ی تمام توابع از A به B است، id_A همان تابع همانی روی A است و \circ ترکیب معمولی

توابع می باشد.

تعریف ۱-۱-۴ [۱]. یک ریخت $A \xrightarrow{f} B$ مونیک نامیده می شود، هر گاه برای هر دو ریخت

موازی $C \xrightarrow{h} A$ و $C \xrightarrow{k} A$ که $f \circ h = f \circ k$ ، نتیجه شود $h = k$ (یعنی f نسبت به

عمل ترکیب دارای خاصیت حذف از چپ باشد).

مثال ۵-۱-۱. یک تابع در دسته Set ، مونیک است اگر و تنها اگر یک به یک باشد.

تعریف ۶-۱-۱ [۱]. ریخت $A \xrightarrow{f} B$ توکشنده (درون‌بری) نامیده می‌شود، هرگاه ریخت

دیگر $B \xrightarrow{g} A$ موجود باشد، به طوری که $f \circ g = 1_B$.

مثال ۷-۱-۱. در دسته Set ، یک تابع توکشنده است اگر و تنها اگر پوشا باشد.

تعریف ۸-۱-۱ [۱]. ریخت $A \xrightarrow{f} B$ در دسته \mathcal{A} ، یکریشتی نامیده می‌شود، هرگاه ریخت

$B \xrightarrow{g} A$ که $g \circ f = id_A$ و $f \circ g = id_B$ موجود باشد. چنین ریخت g معکوس f نامیده

می‌شود.

مثال ۹-۱-۱. یک تابع در دسته Set ، یکریشتی است اگر و تنها اگر دوسویی باشد.

تعریف ۱۰-۱-۱ [۱]. اگر \mathcal{A} و \mathcal{B} دو دسته باشند، آن‌گاه یک تابعگر همورد^۲ F از \mathcal{A} به \mathcal{B}

یک تابع است که به هر \mathcal{A} -شیء A ، یک \mathcal{B} -شیء $F(A)$ ، و به هر \mathcal{A} -ریخت $f: A \rightarrow A'$ ،

یک \mathcal{B} -ریخت $F(f): F(A) \rightarrow F(A')$ نسبت می‌دهد، به طوری که

(الف) F ترکیب را حفظ می‌کند، یعنی؛ $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ ؛ جاییکه $f \circ g$ تعریف شده باشد،

(ب) F ریخت‌های همانی را حفظ می‌کند، یعنی؛ $F(id_A) = id_{F(A)}$ ، برای هر \mathcal{A} -شیء A .

² Covariant functor

مثال ۱-۱-۱۱. برای هر رسته \mathcal{A} و هر A -شیء A ، تابعگر هم‌ورد $\text{hom}(A, -): \mathcal{A} \rightarrow \text{Set}$

موجود است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{hom}(A, -)(B \xrightarrow{f} C) = \text{hom}(A, B) \xrightarrow{\text{hom}(A, f)} \text{hom}(A, C)$$

جائیکه $\text{hom}(A, f)(g) = f \circ g$.

تعریف ۱-۱-۱۲ [۱]. متناظر با هر رسته $\mathcal{A} = (O, \text{hom}, \text{id}, \circ)$ ، رسته‌ی دوگان \mathcal{A} ، رسته‌ی

$\mathcal{A}^{op} = (O, \text{hom}_{\mathcal{A}^{op}}, \text{id}, \circ^{op})$ است که $\text{hom}_{\mathcal{A}^{op}}(a, b) = \text{hom}_{\mathcal{A}}(b, a)$ و $f \circ^{op} g = g \circ f$.

(بنابراین \mathcal{A} و \mathcal{A}^{op} دارای اشیاء و بدون در نظر گرفتن جهت، ریخت‌های یکسان هستند.)

مثال ۱-۱-۱۳. هر کلاس پیش مرتب، یعنی هر جفت (X, \leq) که X یک کلاس و \leq یک

رابطه‌ی انعکاسی و متعدی روی X است، یک رسته‌ی $\mathcal{C}(X, \leq)$ به صورت زیر القا می‌کند:

$$O = X, \quad \text{hom}(x, y) = \begin{cases} \{(x, y)\} & \text{اگر } x \leq y \\ \emptyset & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}, \quad \text{id}_x = (x, x)$$

و $(y, z) \circ (x, z) = (x, z)$.

اگر (\mathcal{A}, \leq) یک کلاس پیش مرتب باشد و آن را به عنوان یک رسته در نظر بگیرید، آن‌گاه

$$\mathcal{A}^{op} = (\mathcal{A}, \geq).$$

تعریف ۱-۱-۱۴ [۱].

(الف) رسته‌ی \mathcal{A} یک زیر رسته‌ی \mathcal{B} نامیده می‌شود، هرگاه در شرایط صفحه‌ی بعد صدق کند:

$$(1) \text{Ob}(\mathcal{A}) \subseteq \text{Ob}(\mathcal{B})$$

$$(2) \text{hom}_{\mathcal{A}}(A, A') \subseteq \text{hom}_{\mathcal{B}}(A, A'), \quad A, A' \in \text{Ob}(\mathcal{A})$$

(3) برای هر \mathcal{A} -شیء A ، \mathcal{B} -همانی روی A ، همان \mathcal{A} -همانی روی A است،

(4) قانون ترکیب در \mathcal{A} ، تحدید قانون ترکیب در \mathcal{B} به ریخت‌های \mathcal{A} است.

(ب) رسته \mathcal{A} را زیر رسته \mathcal{B} کامل^۳ نامند، اگر علاوه بر شرایط بالا، برای هر

$$\text{hom}_{\mathcal{A}}(A, A') = \text{hom}_{\mathcal{B}}(A, A'), \quad A, A' \in \text{Ob}(\mathcal{A})$$

تعریف ۱-۱-۱۵ [۳]. در رسته \mathcal{A} ، دو ریخت مونیک $A \xrightarrow{f} D$ و $B \xrightarrow{g} D$ با

هم دامنه‌ی یکسان D ، هم ارز نامیده می‌شوند، اگر یک یگریختی $h: A \rightarrow B$ موجود باشد

$$\text{طوری که } f = g \circ h.$$

تبصره ۱-۱-۱۶. هم ارز بودن در تعریف فوق، یک رابطه‌ی هم ارزی است.

تعریف ۱-۱-۱۷ [۳]. یک زیرشیء از شیء D در رسته \mathcal{A} ، یک کلاس هم ارزی از

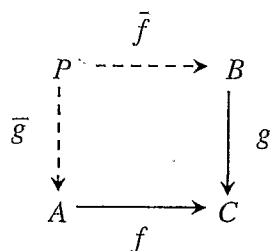
مونیک‌ها با هم دامنه‌ی D است که با نماد $\text{Sub}_{\mathcal{A}}(D)$ نشان داده می‌شود.

³ Full

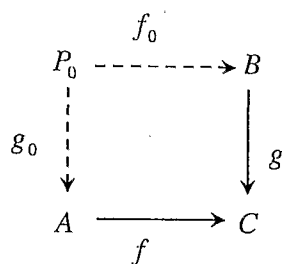
تعریف ۱-۱-۱۸ [۱]. یک شیء A رانهایی^۴ نامند، هرگاه برای هر شیء B ، یک ریخت منحصر به فرد از B به A موجود باشد (به طور معمول با نماد 1 و اگر لازم باشد با نماد 1_r نشان داده می شود).

مثال ۱-۱-۱۹. هر مجموعه‌ی تک عضوی، یک شیء نهایی در رسته‌ی Set است.

تعریف ۱-۱-۲۰ [۱]. مربع



را برگشت^۵ نامند، هرگاه جابه‌جا شود و برای هر مربع جابه‌جایی به شکل



ریخت منحصر به فرد $P_0 \xrightarrow{k} P$ موجود باشد، به طوری که $\bar{f} \circ k = f_0$ و $\bar{g} \circ k = g_0$.

همچنین رسته‌ی \mathcal{A} را دارای برگشت گویند، هرگاه هر دیاگرام $(\bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet)$ دارای برگشت

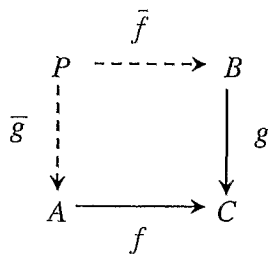
باشد. برگشت در صورت وجود در حد یکریختی یکتاست.

⁴ Terminal object

⁵ Pullback

مثال ۱-۱-۲۱. $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ را یک جفت نگاشت در Set در نظر بگیرید، قرار دهید

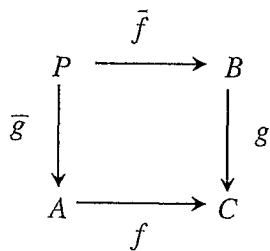
تصاویر از $A \times B$ باشند. آن گاه مربع



برگشت خواهد بود.

تعریف ۱-۱-۲۲ [۱]. یک کلاس \mathcal{M} از ریختها، در رشته \mathcal{A} تحت برگشت پایا نامیده

می شود، هر گاه برای هر مربع برگشت



که $f \in \mathcal{M}$ ، آن گاه $\bar{f} \in \mathcal{M}$.

تعریف ۱-۱-۲۳ [۳]. در یک رسته \mathcal{A} که دارای برگشت و شیء نهایی است، رده بندی کننده زیرشیء^۶، یک ریخت مونیک $1 \rightarrow \Omega$ است، آن چنان که به ازای هر مونیک دیگر $X \rightarrow \Omega$ در \mathcal{A} ، ریخت منحصر به فرد Φ ، چنان موجود باشد که به همراه مونیک داده شده، یک مربع برگشت تشکیل دهند.

$$\begin{array}{ccc}
 S & \longrightarrow & 1 \\
 \downarrow p & & \downarrow \text{true} \\
 X & \xrightarrow{\Phi} & \Omega
 \end{array}$$

تعریف ۱-۱-۲۴ [۳]. توپوز^۷ \mathcal{E} رسته ای است که:

(الف) هر نمودار $X \rightarrow B \leftarrow Y$ در آن دارای برگشت باشد،

(ب) دارای شیء نهایی 1 باشد،

(پ) دارای رده بندی کننده زیرشیء، $1 \rightarrow \Omega$ باشد و

(ت) به ازای هر شیء B ، شیء PB و ریخت $\varepsilon_B : B \times PB \rightarrow \Omega$ موجود باشد، آن چنان که

برای هر ریخت $f : B \times A \rightarrow \Omega$ ، ریخت منحصر به فرد $g : A \rightarrow PB$ وجود داشته

باشد، به طوری که نمودار زیر جابه جایی باشد:

$$\begin{array}{ccc}
 A & & B \times A \\
 \downarrow g & & \downarrow 1 \times g \\
 PB & & B \times PB \\
 & & \xrightarrow{\varepsilon_B} \Omega
 \end{array}$$

⁶ Subobject classifier

⁷ Topos

مثال ۱-۱-۲۵. رسته‌ی Set یک توپوز است.

تعریف ۱-۱-۲۶ [۱]. فرض کنید $F, G: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ تابعگر همورد باشند. یک تبدیل طبیعی τ^A از

F به G که با نماد $\tau: F \rightarrow G$ (یا $F \xrightarrow{\tau} G$ نشان می‌دهند) تابعی است که به هر A - شیء A ،

یک \mathcal{B} - ریخت $\tau_A: F(A) \rightarrow G(A)$ متناظر می‌کند به طوری که شرط طبیعی بودن برقرار باشد:

برای هر A - ریخت $f: A \rightarrow B$ ، مربع زیر جابجایی باشد.

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\tau_A} & G(A) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(B) & \xrightarrow{\tau_B} & G(B) \end{array}$$

تعریف ۱-۱-۲۷ [۱]. به ازای رسته‌های ثابت \mathcal{C} و \mathcal{D} ، یک رسته‌ی جدید $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ را می‌توان

در نظر گرفت به طوری که اشیاء $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ ، تابعگرهایی از \mathcal{C} به \mathcal{D} هستند و ریخت‌های $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ تبدیلات

طبیعی میان چنین تابعگرهایی می‌باشند. رسته‌ای را که بدین ترتیب ساخته می‌شود، رسته‌ی تابعگر^۹

گویند.

برای رسته‌های \mathcal{C} و \mathcal{D} ، یک تابعگر $F: \mathcal{C}^{op} \rightarrow Set$ را یک تابعگر پادورد^{۱۰} از \mathcal{C} به

\mathcal{D} گویند. در واقع تابعگرهای معمولی از \mathcal{C} به \mathcal{D} ، گاهی هم‌ورد گفته می‌شوند.

⁸ Natural transformation

⁹ Functor category

¹⁰ Contravariant functor