بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی

ساختن کانونی توپولوژی لاور- تیرنی

استاد راهنما:

دکتر سید ناصر حسینی

مؤلف:

مهدی نودهی

شهریور ۱۳۸٦

دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی – دانشکده ریاضی و کامپیوتر

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود .

دانشجو : مهدی نودهی

استاد راهنما : دکتر سیدناصرحسینی

داور ۱ : دکتر یوسف بهرامپور

داور ۲ : دکتر رضا نکویی

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه : دکتر سید ناصر حسینی

۱۳۸۷ /۱۲/ ۲۱

تقدیم به پدر و مادر عزیزتر از جانم

که همواره روشنایی بخش زندگی‌ام هستند

و تقدیم به همسر مهربانم با عشق

تشکر و قدردانی

حمد و سپاس پروردگار بلند مرتبه را که به من توفیق تحصیل عنایت فرمود، که اگر پرتوی فضل او نبود هرگز موفق به انجام این مهم نمی‌شدم. ابتدا لازم می‌دانم از پدر و مادر عزیزم که من را همواره با صبر و دلسوزی مورد مهر وحمایت خود قرار دادند، تشکر کنم و همچنین از دو خواهر نازنینم که شادی بخش و مایه‌ی دلگرمی من هستند نیز سپاسگزارم و از خدای بزرگ برای ایشان سلامتی و سعادت طلب می‌کنم.

از استاد ارجمند و مهربانم جناب آقای دکتر سید ناصر حسینی به عنوان یک استاد کامل به خاطر راهنمایی‌های ارزنده و دقت نظر فوق العاده‌ی ایشان در تمام امور و صبر و حوصله‌ای که صرف این پایان نامه کردند، کمال تشکر و قدردانی را دارم و امیدوارم سایه‌ی ایشان همواره بر سر ما دانشجویان باشد. از اساتید عالی مقام جناب آقای دکتر بهرامپور و جناب آقای دکتر نکویی که دعوت و داوری این پایان نامه را پذیرفتند نیز بسیار سپاسگزارم. توفیق روزافزون، سلامتی و سعادت همه‌ی اساتید بزرگوار را از درگاه خداوند متعال خواستارم.

در پایان لازم می‌دانم از تمامی دوستان عزیز و گرانقدرم از جمله آقای مهدی وطن دوست و خانم رحیمه پورخاندانی به خاطر راهنمایی‌های مفید، دلسوزانه و دوستانه‌ی ایشان در طی این دوره کمال تشکر و سپاس را داشته باشم و از خدای متعال پیروزی و به‌روزی ایشان را در طول زندگی خواستارم و امیدوارم از این پس نیز دوستی و همراهیشان را در کنار خود داشته باشم.

چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا زیررسته‌ی $\mathcal{C}$ از $\mathcal{X}$ را در نظر گرفته و به آن تابعگر $C:\mathcal{X}^{op}\to Set$ را که زیرشیئی از رده‌بندی کننده‌ی زیرشیٔ Ω در توپوز $Set^{\mathcal{X}^{op}}$ می‌باشد، تخصیص می‌دهیم. سپس ریخت $j:\Omega\to\Omega$ متناظر با آن را، در $Set^{\mathcal{X}^{op}}$، از برگشت مربوط به رده‌بندی کننده‌ی زیرشیٔ $true:1\to\Omega$ بدست می‌آوریم. بعد شرایط معادلی را روی $\mathcal{C}$ بدست می‌آوریم که نگاشت القا شده‌ی $j:\Omega\to\Omega$ یک توپولوژی لاور- تیرنی (ضعیف) شود. در گام بعدی کار را با زیرمجموعه‌ای مانند $\mathcal{M}$ از ریخت‌های رسته‌ی $\mathcal{X}$ شروع کرده و همانند کاری که برای زیررسته انجام شد، ابتدا تابعگر $M:\mathcal{X}^{op}\to Set$ را، که زیرشیئی از Ω می‌باشد، تخصیص می‌دهیم و سپس به آن نگاشت $j:\Omega\to\Omega$ را متناظر می‌کنیم. در ادامه شرایط معادلی را روی M پیدا می‌کنیم که j یک توپولوژی لاور- تیرنی (ضعیف) شود و در مرحله‌ی بعد این شرایط را به زیر مجموعه‌ی $\mathcal{M}$ منتقل و آنها را بر حسب $\mathcal{M}$ بیان می‌نماییم.

مقدمه

پایان نامه‌ای که در پیش‌رو دارید، در زمینه‌ی نظریه‌ی رسته در راستای کارهای تحقیقاتی‌ای است که در یک توپوز روی موضوعاتی چون توپولوژی لاور- تیرنی، توپولوژی گروتندیک و در نهایت عملگرهای بستاری و دیگر موضوعات مرتبط انجام می‌شود. در این پایان‌نامه به طور خاص به موضوع توپولوژی لاور- تیرنی پرداخته و مقدمه‌ای برای ورود به مبحث عملگرهای بستاری فراهم شده است.

فرانسیس ویلیام لاور و مایلز تیرنی در سال‌های ۱۹۶۹ و ۱۹۷۰ تعریف مقدماتی توپوز را رشد داده و مفهوم توپوز گروتندیک را توسیع دادند. آن‌ها مفهوم رده‌بندی کننده‌ی زیرشیء را معرفی کردند که نقش اساسی در نظریه‌ی توپوز ایفا می‌کند. سپس توپوز مقدماتی را با استفاده از این مفهوم ارائه کردند.

در نگارش این پایان نامه سعی شده است مفاهیم ابتدایی مورد نیاز خواننده به طور کامل آورده شود تا بدان جا که برای درک آن نیازی به مراجعه به منابع دیگر نباشد. از طرفی سبک بیان پایان نامه بر اساس روند تحقیقات انجام شده می‌باشد. امید است که گام مفیدی در این زمینه باشد.

این پایان نامه از سه فصل تشکیل شده است. فصل اول شامل مفاهیم و تعاریف مقدماتی مورد نیاز می‌باشد که در بخش اول آمده است، و در بخش دوم تعاریف و برخی قضایای اساسی که پیش نیاز می‌باشند آورده شده که بعضی نیز نتایج بدست آمده در طول کار می‌باشند.

در فصل دوم که از دو بخش تشکیل شده است، ما ابتدا از یک زیر رسته‌ی $\mathcal{C}$ از یک رسته‌ی کوچک $\mathcal{X}$، که تحت برگشت بسته می‌باشد، یک پیش‌بافه‌ی C، که زیرشیئی از

رده‌بندی کننده‌ی زیرشیئ Ω در توپوز $Set^{\mathscr{X}^{op}}$ می‌باشد، تخصیص می‌دهیم. سپس ریخت $j:\Omega\to\Omega$ متناظر را در رسته‌ی $Set^{\mathscr{X}^{op}}$ بدست می‌آوریم. آن‌گاه شرایطی را روی پیش‌بافه‌ی C و زیر رسته‌ی $\mathscr{C}$ بررسی می‌کنیم که تحت آن $j:\Omega\to\Omega$ تبدیل به یک توپولوژی لاور- تیرنی (ضعیف) شود. در بخش اول تحت عنوان "پیش‌بافه و تبدیل طبیعی القا شده توسط یک زیر رسته" تبدیل طبیعی $j:\Omega\to\Omega$ را بدست می‌آوریم (همان طور که می‌دانید در یک توپوز هر زیر شیئ از Ω با یک تبدیل طبیعی $j:\Omega\to\Omega$ در تناظر یک به یک می باشد) و در بخش دوم با عنوان "بررسی شرایط توپولوژی لاور- تیرنی (ضعیف) القا شده توسط یک زیر رسته" به بررسی شرایطی روی زیر رسته‌ی $\mathscr{C}$ از $\mathscr{X}$ می‌پردازیم که نگاشت $j:\Omega\to\Omega$ یک توپولوژی لاور- تیرنی (ضعیف) شود.

در فصل سوم هدف گسترش مطالب فصل دوم بوده بدین معنا که به جای آن‌که با یک زیر رسته از رسته‌ی $\mathscr{X}$، کار کنیم، با یک زیرمجموعه از ریخت‌های رسته‌ی $\mathscr{X}$ شروع می کنیم. نحوه‌ی کار بدین ترتیب است که ابتدا یک زیرمجموعه‌ی $\mathscr{M}$ از ریخت‌های $\mathscr{X}$ را انتخاب کرده و شرط بسته بودن تحت برگشت را روی آن می‌گذاریم، سپس به $\mathscr{M}$ یک تابعگر $M:\mathscr{X}^{op}\to Set$، که زیرشیئی از رده‌بندی کننده‌ی زیرشیئ Ω در رسته‌ی پیش‌بافه‌ها روی $\mathscr{X}$ می‌باشد، نسبت داده و شرایطی را روی آن بررسی می کنیم که تبدیل طبیعی القا شده‌ی، $j:\Omega\to\Omega$، یک توپولوژی لاور- تیرنی (ضعیف) شود.

در بخش اول تحت عنوان "پیش‌بافه و تبدیل طبیعی القا شده توسط یک زیر مجموعه از ریخت‌های یک رسته" پیش‌بافه و تبدیل طبیعی القا شده توسط زیر مجموعه‌ی $\mathscr{M}$ از ریخت‌های یک رسته‌ی $\mathscr{X}$ را معرفی می کنیم و در بخش دوم با عنوان "بررسی شرایط توپولوژی لاور- تیرنی

(ضعیف) و پیش‌بافه‌ی متناظر" بررسی خود را به شرایط توپولوژی لاور- تیرنی (ضعیف) متناظر با تابعگر مربوط شده به $\mathcal{M}$ معطوف کرده و در بخش سوم تحت عنوان "بررسی شرایط توپولوژی لاور- تیرنی (ضعیف) القا شده توسط مجموعه‌ای از ریخت‌های یک رسته" شرایط بدست آمده را به زیرمجموعه‌ی $\mathcal{M}$ منتقل کرده و آن‌ها را برحسب $\mathcal{M}$ بیان می‌کنیم.

فهرست

فصل اول

مقدمات و پیش‌نیازها

بخش اول

مقدمات رسته‌ای

تعریف ۱-۱-۱ [۱]. *رسته*[1]، یک چهارتایی $\mathcal{A} = (O, \hom, id, \circ)$ است، شامل

الف) کلاس O ، که اعضای آن $\mathcal{A}$-شیء نامیده می‌شوند،

ب) برای هر جفت (A, B) از $\mathcal{A}$-اشیاء، یک مجموعه‌ی $\hom(A, B)$، که اعضای آن $\mathcal{A}$-ریخت از A به B نامیده می‌شوند (عبارت "$f \in \hom(A, B)$" به صورت گرافیکی با بکار بردن پیکان بیان می‌شود؛ یعنی: توسط عباراتی مشابه "$f : A \to B$ یک ریخت است" یا "$A \xrightarrow{f} B$ یک ریخت است")،

پ) برای هر $\mathcal{A}$-شیء A، یک ریخت $A \xrightarrow{id_A} A$، که $\mathcal{A}$-*همانی* روی A نامیده می‌شود،

ت) قانون ترکیب که به هر $\mathcal{A}$-ریخت $A \xrightarrow{f} B$ و هر $\mathcal{A}$-ریخت $B \xrightarrow{g} C$ یک $\mathcal{A}$-ریخت $A \xrightarrow{g \circ f} C$ نسبت می‌دهد و ترکیب f و g نامیده می‌شود، تحت شرایط زیر:

(الف) ترکیب شرکت‌پذیر است؛ یعنی: برای ریخت‌های $A \xrightarrow{f} B$، $B \xrightarrow{g} C$ و $C \xrightarrow{h} D$ تساوی $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ برقرار است،

(ب) $\mathcal{A}$-همانی‌ها نسبت به عمل ترکیب به صورت همانی عمل می‌کنند؛ یعنی برای $\mathcal{A}$-ریخت $A \xrightarrow{f} B$، $id_B \circ f = f$ و $f \circ id_A = f$ و

(پ) مجموعه‌های $\hom(A, B)$ دو به دو مجزا می‌باشند.

---

[1] Category

تبصره ۱-۱-۲ [۱]. اگر $\mathscr{A}=(O,\hom,id,\circ)$ یک رسته باشد، آن‌گاه

الف) کلاس O شامل اشیاء $\mathscr{A}$، به طور معمول به صورت $Ob(\mathscr{A})$ نشان داده می‌شود.

ب) کلاس همه‌ی $\mathscr{A}$-ریخت‌ها (که با $Mor(\mathscr{A})$ نشان داده می‌شود) برابر اجتماع تمام مجموعه‌های $\hom(A,B)$ در $\mathscr{A}$ تعریف می‌شود.

پ) اگر $A\xrightarrow{f}B$ یک $\mathscr{A}$-ریخت باشد، A را دامنه‌ی f گویند ($dom(f)$) و B را هم‌دامنه‌ی f گویند ($cod(f)$).

ت) عمل ترکیب $\circ$ ، یک عمل دوتایی جزئی روی کلاس $Mor(\mathscr{A})$ است. برای یک جفت (f,g) از ریخت‌ها، $f\circ g$ تعریف شده است اگر و تنها اگر دامنه‌ی f و هم‌دامنه‌ی g منطبق باشند.

ث) اگر بیشتر از یک رسته مورد بحث باشد، اندیس برای وضوح بیشتر (همانند $\hom_{\mathscr{A}}(A,B)$) استفاده می‌شود.

مثال ۱-۱-۳. رسته‌ی Set : کلاس اشیاء آن شامل همه‌ی مجموعه‌هاست؛ $\hom(A,B)$ مجموعه‌ی تمام توابع از A به B است، id_A همان تابع همانی روی A است و $\circ$ ترکیب معمولی توابع می‌باشد.

تعریف ۱-۱-۴ [۱]. یک ریخت $A\xrightarrow{f}B$ مونیک نامیده می‌شود، هرگاه برای هر دو ریخت موازی $C\xrightarrow{h}A$ و $C\xrightarrow{k}A$ که $f\circ h=f\circ k$ ، نتیجه شود $h=k$ (یعنی f نسبت به عمل ترکیب دارای خاصیت حذف از چپ باشد).

مثال ۱-۱-۵. یک تابع در رسته‌ی Set، مونیک است اگر و تنها اگر یک به یک باشد.

تعریف ۱-۱-۶ [۱]. ریخت $A \xrightarrow{f} B$ *توکشنده* (درون‌بری) نامیده می‌شود، هرگاه ریخت دیگر $B \xrightarrow{g} A$ موجود باشد، به طوری که $f \circ g = 1_B$.

مثال ۱-۱-۷. در رسته‌ی Set، یک تابع توکشنده است اگر و تنها اگر پوشا باشد.

تعریف ۱-۱-۸ [۱]. ریخت $A \xrightarrow{f} B$ در رسته‌ی $\mathcal{A}$، یکریختی نامیده می‌شود، هرگاه ریخت $B \xrightarrow{g} A$ که $g \circ f = id_A$ و $f \circ g = id_B$ موجود باشد. چنین ریخت g معکوس f نامیده می‌شود.

مثال ۱-۱-۹. یک تابع در رسته‌ی Set، یکریختی است اگر و تنها اگر دوسویی باشد.

تعریف ۱-۱-۱۰ [۱]. اگر $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو رسته باشند، آن گاه یک *تابعگر همورد*[2] F از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ یک تابع است که به هر $\mathcal{A}$- شیء A، یک $\mathcal{B}$- شیء $F(A)$، و به هر $\mathcal{A}$- ریخت $f: A \to A'$، یک $\mathcal{B}$- ریخت $F(f): F(A) \to F(A')$ نسبت می دهد، به طوری که

الف) F ترکیب را حفظ می‌کند، یعنی؛ $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ جائیکه $f \circ g$ تعریف شده باشد،

ب) F ریخت‌های همانی را حفظ می‌کند، یعنی؛ $F(id_A) = id_{F(A)}$، برای هر $\mathcal{A}$- شیء A.

[2] Covariant functor

مثال ۱-۱-۱۱. برای هر رسته‌ی $\mathcal{A}$ و هر $\mathcal{A}$-شیء A، تابعگر هم‌ورد $\hom(A,-):\mathcal{A}\to Set$ موجود است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hom(A,-)(B\xrightarrow{f}C)=\hom(A,B)\xrightarrow{\hom(A,f)}\hom(A,C)$$

جائیکه $\hom(A,f)(g)=f\circ g$.

تعریف ۱-۱-۱۲ [۱]. متناظر با هر رسته‌ی $\mathcal{A}=(O,\hom,id,\circ)$، رسته‌ی دوگان $\mathcal{A}$، رسته‌ی $\mathcal{A}^{op}=\left(O,\hom_{\mathcal{A}^{op}},id,\circ^{op}\right)$ است که $\hom_{\mathcal{A}^{op}}(a,b)=\hom_{\mathcal{A}}(b,a)$ و $f\circ^{op}g=g\circ f$.

(بنابراین $\mathcal{A}$ و $\mathcal{A}^{op}$ دارای اشیاء و بدون درنظر گرفتن جهت، ریخت‌های یکسان هستند.)

مثال ۱-۱-۱۳. هر کلاس پیش مرتب ، یعنی هر جفت $(X,\leq)$ که X یک کلاس و $\leq$ یک رابطه‌ی انعکاسی و متعدی روی X است، یک رسته‌ی $C(X,\leq)$ به صورت زیر القا می‌کند:

$$O=X,\quad \hom(x,y)=\begin{cases}\{(x,y)\} & \text{اگر } x\leq y,\\ \phi & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}\quad ,\ \mathrm{id}_x=(x,x)$$

و $(y,z)\circ(x,z)=(x,z)$.

اگر $(\mathcal{A},\leq)$ یک کلاس پیش مرتب باشد و آن را به عنوان یک رسته درنظر بگیرید، آن‌گاه $\mathcal{A}^{op}=(\mathcal{A},\geq)$.

تعریف ۱-۱-۱۴ [۱].

(الف) رسته‌ی $\mathcal{A}$ یک *زیر رسته‌ی* $\mathcal{B}$ نامیده می‌شود، هرگاه در شرایط صفحه‌ی بعد صدق کند:

۱) $Ob(\mathscr{A}) \subseteq Ob(\mathscr{B})$،

۲) برای هر $A, A' \in Ob(\mathscr{A})$، $\hom_{\mathscr{A}}(A, A') \subseteq \hom_{\mathscr{B}}(A, A')$،

۳) برای هر $\mathscr{A}$-شئ A، $\mathscr{B}$-همانی روی A، همان $\mathscr{A}$-همانی روی A است،

۴) قانون ترکیب در $\mathscr{A}$، تحدید قانون ترکیب در $\mathscr{B}$ به ریخت‌های $\mathscr{A}$ است.

(ب) رسته‌ی $\mathscr{A}$ را زیر رسته‌ی کامل[3] $\mathscr{B}$ نامند، اگر علاوه بر شرایط بالا، برای هر $A, A' \in Ob(\mathscr{A})$، $\hom_{\mathscr{A}}(A, A') = \hom_{\mathscr{B}}(A, A')$.

تعریف ۱-۱-۱۵ [۳]. در رسته‌ی $\mathscr{A}$، دو ریخت مونیک $A \xrightarrow{f} D$ و $B \xrightarrow{g} D$ با هم‌دامنه‌ی یکسان D، *هم‌ارز* نامیده می‌شوند، اگر یک یکریختی $h : A \xrightarrow{\sim} B$ موجود باشد طوری که $f = g \circ h$.

تبصره ۱-۱-۱۶. هم ارز بودن در تعریف فوق، یک رابطه‌ی هم ارزی است.

تعریف ۱-۱-۱۷ [۳]. یک *زیرشیء* از شیء D در رسته‌ی $\mathscr{A}$، یک کلاس هم ارزی از مونیک‌ها با هم‌دامنه‌ی D است که با نماد $Sub_{\mathscr{A}}(D)$ نشان داده می‌شود.

[3] Full

تعریف ۱-۱-۱۸ [۱]. یک شیء A را *نهایی*[۴] نامند، هرگاه برای هر شیء B ، یک ریخت منحصربه فرد از B به A موجود باشد (به طور معمول با نماد 1 و اگر لازم باشد با نماد 1_A نشان داده می‌شود).

مثال ۱-۱-۱۹. هر مجموعه‌ی تک عضوی، یک شیء نهایی در رسته‌ی Set است.

تعریف ۱-۱-۲۰ [۱]. مربع

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dashed, "\bar{f}"] \arrow[d, dashed, "\bar{g}"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

را برگشت[۵] نامند، هرگاه جابه‌جا شود و برای هر مربع جابه‌جایی به شکل

$$\begin{tikzcd} P_0 \arrow[r, dashed, "f_0"] \arrow[d, dashed, "g_0"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

ریخت منحصربه فرد $P_0 \xrightarrow{k} P$ موجود باشد، به طوری که $\bar{f} \circ k = f_0$ و $\bar{g} \circ k = g_0$. همچنین رسته‌ی $\mathscr{A}$ را دارای برگشت گویند، هرگاه هر دیاگرام $(\bullet \to \bullet \leftarrow \bullet)$ دارای برگشت باشد. برگشت در صورت وجود در حد یکریختی یکتاست.

---

[4] Terminal object
[5] Pullback

مثال ۱-۱-۲۱. $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ را یک جفت نگاشت در Set در نظر بگیرید، قرار دهید $P = \{(a,b) \in A \times B | f(a) = g(b)\}$، و فرض کنید $P \xrightarrow{\bar{g}} A$ و $P \xrightarrow{\bar{f}} B$ تحدیدهای توابع تصاویر از $A \times B$ باشند. آن‌گاه مربع

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dashed, "\bar{f}"] \arrow[d, dashed, "\bar{g}"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

برگشت خواهد بود.

تعریف ۱-۱-۲۲ [۱]. یک کلاس $\mathcal{M}$ از ریخت‌ها، در رسته‌ی $\mathcal{A}$ تحت برگشت *پایا* نامیده می‌شود، هرگاه برای هر مربع برگشت

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\bar{g}"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

که $f \in \mathcal{M}$، آن‌گاه $\bar{f} \in \mathcal{M}$.

تعریف ۱-۱-۲۳ [۳]. در یک رسته‌ی $\mathcal{A}$ که دارای برگشت و شیء نهایی است، *رده‌بندی‌کننده‌ی زیرشیء*[6]، یک ریخت مونیک $true:1\to\Omega$ است، آن‌چنان که به ازای هر مونیک دیگر $S\to X$ در $\mathcal{A}$، ریخت منحصر به فرد Φ، چنان موجود باشد که به همراه مونیک داده شده، یک مربع برگشت تشکیل دهند.

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r] \arrow[d, tail, "P"'] \arrow[dr, phantom, "p.b."] & 1 \arrow[d, tail, "true"] \\
X \arrow[r, dashed, "\Phi"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

تعریف ۱-۱-۲۴ [۳]. *توپوز*[7] $\mathcal{E}$ رسته‌ای است که:

الف) هر نمودار $X\to B\leftarrow Y$ در آن دارای برگشت باشد،

ب) دارای شیء نهایی 1 باشد،

پ) دارای رده بندی کننده‌ی زیرشیء، $true:1\to\Omega$ باشد و

ت) به ازای هر شیء B، شیء PB و ریخت $\varepsilon_B : B\times PB\to\Omega$ موجود باشد، آن‌چنان که برای هر ریخت $f:B\times A\to\Omega$، ریخت منحصربه فرد $g:A\to PB$ وجود داشته باشد، به طوری که نمودار زیر جابه‌جایی باشد:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, dashed, "g"'] & B\times A \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "1\times g"'] & \Omega \arrow[d, equal] \\
PB & B\times PB \arrow[r, "\in_B"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

[6] Subobject classifier
[7] Topos

مثال ۱-۱-۲۵. رسته‌ی Set یک توپوز است.

تعریف ۱-۱-۲۶ [۱]. فرض کنید $F,G:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ تابعگر همورد باشند. یک *تبدیل طبیعی*[8] τ از F به G که با نماد $\tau:F\to G$ (یا $F\xrightarrow{\tau}G$ نشان می‌دهند) تابعی است که به هر $\mathcal{A}$-شیء A، یک $\mathcal{B}$-ریخت $\tau_A:F(A)\to G(A)$ متناظر می‌کند به طوری که شرط طبیعی بودن برقرار باشد: برای هر $\mathcal{A}$-ریخت $f:A\to B$، مربع زیر جابجایی باشد.

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\tau_B"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

تعریف ۱-۱-۲۷ [۱]. به ازای رسته‌های ثابت $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$، یک رسته‌ی جدید $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ را می‌توان درنظر گرفت به طوری که اشیاء $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$، تابعگرهایی از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$ هستند و ریخت‌های $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ تبدیلات طبیعی میان چنین تابعگرهایی می‌باشند. رسته‌ای را که بدین ترتیب ساخته می‌شود، *رسته‌ی تابعگر*[9] گویند.

برای رسته‌های $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$، یک تابعگر $F:\mathcal{C}^{op}\to Set$ را یک تابعگر پادوردِ[10] از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$ گویند. در واقع تابعگرهای معمولی از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$، گاهی هم‌ورد گفته می‌شوند.

[8] Nutural transformation
[9] Functor category
[10] Contravariant functor