بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مکانیک

معرفی وکاربردهائی از آنالیز غیراستاندارد در مکانیک

پایان نامهٔ کارشناسی ارشد

گرایش طراحی جامدات

توسط:

سعید ضیائی راد

زیر نظر:

دکتر مجتبی محزون

بهمن ماه ۶۹

" بسمه تعالی "

پایان نامهٔ آقای سعید ضیائی راد در جلسهٔ مورخ ۶۹/۱۱/۹ کمیتهٔ پایان نامهٔ متشکل از اساتید ذیل تشکیل و مورد تائید قرارگرفت .

۱ ـ آقای دکتر مجتبی محزون استاد راهنمای رساله

۶۹/۱۱/۹

۲ ـ آقای دکتر محمود بینای مطلق استاد راهنمای رساله

محمود بینای مطلق

۹/۱۱/۶۹

۳ ـ آقای دکتر فریبرز قهرمانی استاد کمیتهٔ تخصصی

۴ ـ آقای دکتر ابراهیم شیرانی مسئول کمیتهٔ کارشناسی ارشد دانشکده

قدردانـــــی

بدینوسیله از زحمات آقای دکتر مجتبی محزون استاد راهنمای پروژه و آقای دکتر محمود بینای مطلق استاد کمیته تخصصی که با راهنمائی های ارزنده خود مرا در انجام این پروژه یاری نموده‌اند صمیمانه تشکر می نمایم.

فهرست مندرجات

صفحه

فهرست مندرجات

خلاصه

اعداد بی نهایت کوچک وبی نهایت بزرگ از زمانهای قدیم برای اثبات قضایا یا محاسبهٔ سطوح وغیره در ریاضیات وفیزیک مورد استفاده قرار می گرفتند. ولی بعداً به دلیل تناقضات منطقی از ریاضیات کنار گذاشته شدند تا اینکه در سال ۱۹۶۶ توسط ابراهام رابینسون مبانی منطقی محکمی، که سبب احیاء مجدد آنها شد، برای آنها ارائه گردید.

دراین سال رساله آنالیز غیر استاندارد یا به عبارت دیگر اعداد بی نهایت کوچک وبی نهایت بزرگ به روشی دقیق واصولی معرفی می گردند. وسپس کاربردهایی از آن در مکانیک بیان می گردد.

این مجموعه مشتمل بر هفت فصل می باشد. در فصل اول بمنظور معرفی آنالیز غیراستاندارد، توضیحاتی که اساساً از مرجع [۶] اقتباس شده آورده شده است. در فصل دوم، با معرفی رابطهٔ هم ارزی مناسبی روی مجموعهٔ کلیه دنباله های تعریف شده روی R ، اعداد بی نهایت کوچک وبی نهایت بزرگ معرفی می گردند. به این ترتیب مجموعهٔ R^* که توسیعی از R ، شامل اعداد حقیقی اعداد بی نهایت کوچک وبی نهایت بزرگ است، بدست می آید. سپس توابع، روابط وجملات صحیح در R به R^* توسعه داده می شدند. وبه این ترتیب ثابت می شود که همان روابطی که در مجموعهٔ اعداد حقیقی مورد استفاده قرار می گیرند را میتوان برای این مجموعهٔ توسعه یافته نیز به کاربرد. در فصل سوم، کاربردهائی از این روش برای اثبات بعضی از قضایای مقدماتی حساب دیفرانسیل وانتگرال آورده شده است. باید متذکر گردید که تمامی حساب دیفرانسیل وانتگرال را میتوان بر اساس آنالیز غیراستاندارد بنیان نهاد. در فصل چهارم یک روش اصولی برای بیان آنالیز غیر استاندارد ارائه گردیده است. دراین روش با اضافه نمودن سه اصل استنتاجی دیگر به اصول نظریه مجموعه ها، آنالیز غیر

استاندارد را میتوان نتیجه گرفت . درفصل پنجم ، دو دیدگاه دیگر به طور مختصر بیان شده است . این دودیدگاه یکی دیدگاه رابینسون ودیگری دیدگاه لوتز است. در فصل ششم کاربردهائی از آنالیز غیر استاندارد آورده شده است . این کاربرد ـ ها نشان دهنده آنستکه این روش می تواند باعث ساده تر شدن اثباتها یا ارائه تعابیر مناسبتری برای پدیده‌های فیزیکی گردد .کاربردهائی که در نظر گرفته شده اند عبارتند از : تابع گرین غیر استانداردوکاربرد آن در معادله شرودینگر، پدیده غلتش ، معادلهٔ ارتعاش تار ، اثباتی برای اصل سن ونان در تئوری الاستیسیته .و اصلی مشابه آن در سیالات .

در فصل هفتم تاریخچه مختصری از حساب دیفرانسیل وانتگرال درارتباط با آنالیز غیر استاندارد از مرجع [۱] آورده شده است.

فصل اول

۱-۱ مقدمه

درسال ۱۹۶۶ ابراهام رابینسون (A.Robinson) کتاب خود درباره آنالیز غیر استاندارد را منتشر کرد. او در این کتاب برای اولین بار اصول تئوری اعداد بی نهایت کوچک را توسعه داده ومفهوم "بی نهایت کوچک" عددی که بی نهایت کوچک است وبا این حال از صفر بزرگتر است را احیاء نمود. ریشه‌های این مفهوم تا عهد باستان امتداد دارند. در آنالیز مرسوم یا "استاندارد"، آشکارا به نظر می رسد که این مفهوم تناقضی در خود دارد. معهذا، دست کم از عهد ارشمیدس ابزار مهمی در مکانیک وهندسه بوده است.

درقرن نوزدهم کم وبیش به نظر می‌رسید بی نهایت کوچکها یک بار وبرای همیشه از ریاضیات اخراج شده اند. وایراشتراس برای رفع نیازهای منطقی، حساب بی نهایت کوچکهای نیوتن ولایب‌نیتز را بدون استفاده از بی نهایت کوچکها بازسازی کرد. با این حال امروز این منطق ریاضی است که با قدرت وپیچیدگی خود بی نهایت کوچکها را احیاء کرده ودوباره آنها را قابل قبول ساخته است. رابینسون به یک معنا از بی قیدی وآسانگیری ریاضیات قرن هیجدهم بر علیه سخت گیری مرتاضانه ریاضیات قرن نوزدهم حمایت کرد وفصل جدیدی درجنگ بی‌پایان بین متناهی ونامتناهی، پیوسته وگسسته، گشود.

در مباحث مربوط به بی نهایت کوچکها که با رشد وگسترش حساب دیفرانسیل وانتگرال همراه بوده است، هندسهٔ اقلیدس نمونهٔ استانداردی بود که متجددین برعلیه آن موضع می‌گرفته‌اند. در کتاب اقلیدس هم بی نهایت وهم بی‌نهایت کوچک ـ ها به نحو زیرکانه‌ای کنار گذاشته شده‌اند. درکتاب اقلیدس آمده است که نقطه چیزی است که مکان دارد ولی بعد ندارد. این بی معنا بوده، اما آوردن آن شاید

به خاطر احتراز از بحث بی نهایت کوچکها بوده است. این به منزلهٔ ردتفکرات پیشین یونانی است. درنظریه اتمیسم ذموکریت نه تنها ماده بلکه زمان وفضا نیز مطرح بوده اند ولی بعدا "استدلالات زنون باعث شد که مفهوم زمان به صورت رشته ای از لحظات متوالی، ومفهوم خط به صورت رشته ای از نقاط "غیر قابل تقسیم" متوالی، غیر قابل دفاع گردند.

نمونه ای از به کارگیری استدلالات مبنی بر بی نهایت کوچکها در هندسه از قرار زیر است:

"می خواهیم رابطهٔ بین مساحت دایره وپیرامون آن را بیابیم. برای سهولت فرض می‌کنیم شعاع دایره واحد باشد. حال دایره مجموع مثلثهای بی نهایت کوچکی است که ارتفاع همهٔ آنها واحد است. درمثلث، مساحت برابر نصف قاعده ضربدر ارتفاع است. بنابراین مجموع مساحت مثلثها، نصف مجموع قاعده‌ها ست. ولی مجموع مساحت مثلثها مساحت دایره، ومجموع قاعده های این مثلثها محیط دایره است. بنابراین مساحت دایره به شعاع واحد نصف محیط آن میباشد."

این استدلال که اقلیدس آن را رد می کرد توسط نیکولاس کوسایی[1] منتشرشد. نتیجه البته درست بوده، اما یافتن ایرادات آن مشکل نیست. حداقل میتوان گفت مفهوم مثلث با قاعده بی نهایت کوچک مغشوش است. مطمئنا "قاعده مثلث باید طولی برابر صفر یا بزرگتر از صفر داشته باشد. اگر طول قاعده صفر باشد، آن گاه مساحت صفر است وصرف نظر از تعداد آنها، در هرصورت مجموع آنها چیزی جز صفر نیست. از طرف دیگراگرطول قاعده بزرگتراز صفر، هراندازه کوچک باشد، با جمع تعداد نامتناهی از آنها یک حاصل جمع بی نهایت بزرگ بدست می آوریم. درهرحال نمی توانیم یک دایره با محیط متناهی را بەصورت مجموع بی نهایت قطعه مساوی بدست آوریم.

اساس این ایراد این مطلب است که حتی یک عدد خیلی کوچک ناصفر هم اگر به تعداد دفعات کافی با خود جمع شود به اندازهٔ دلخواه بزرگ می شود. ازآنجا که این مطلب ابتدا توسط ارشمیدس مطرح شد، آن را خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی

1- Nicholas of Cusa

می نامند. یک بی نهایت کوچک، در صورت وجود، دقیقاً "با یدیک عدد غیر ارشمیدسی باشد، عددی بزرگتر از صفر که به هر تعداد متناهی از دفعات که با خود جمع شود، مثلاً" کمتر از واحد باقی بماند. ارشمیدس که به شیوهٔ ارسطو و اقلیدس فکر می‌کرد، اظهار کرد که همهٔ اعداد ارشمیدسی هستند و هیچ بی نهایت کوچکی وجود ندارد. با این حال ارشمیدس یک فیلسوف طبیعی، مهندسی و فیزیکدان نیز بود. او بی نهایت کوچکها و شهود فیزیکی خود را برای حل مسائل در هندسهٔ سهمی ها به کار برده بود. سپس، از آنجا که بی‌نهایت کوچکها وجود ندارند او یک اثبات بی‌خلل از نتایجش را با استفاده از "روش اشباع [1]" که مبتنی بر استدلال غیر مستقیم و عملی صرفاً " متناهی است، ارائه داد. این اثبات بی خلل در رسالهٔ دربارهٔ تربیع سهمی آورده شده است که از زمان قدیم آن را می شناخته اند. شیوهٔ استفاده از بی نهایت کوچکها که عملاً" برای کشف جواب به کار برده شده درمقاله‌ای با نام " دربارهٔ روش [2]" آمده است که تا سال ۱۹۰۶ نا شناخته مانده بود.

روش اشباع ارشمیدس که از بی نهایت کوچکها اجتناب می کند، در اساس به روش " اپسیلون-دلتا " یی که ویراشتراس و پیروانش در قرن نوزدهم روش بی نهایت کوچکها را از آنالیز بیرون راندند، نزدیک است. توضیح این مطلب با مراجعه به مثال دایره به عنوان یک بی نهایت ضلعی آسان است. می خواهیم یک اثبات منطقاً " قابل قبول برای گذارهٔ " مساحت دایره‌ای به شعاع واحد نصف محیط آن است " که بوسیلهٔ استدلالی منطقاً " غیر قابل قبول آنرا کشف کردیم، به دست آوریم.

به روش زیر استدلال می کنیم. این گزاره حاکی از تساوی دو کمیت مربوط به دایره‌ای با شعاع واحد است. مساحت آن ونصف محیط آن. حال اگر گزاره نادرست باشد، یکی از این کمیت ها بزرگتر از دیگری است. فرض کنید A عددی مثبت باشد که از تفاضل مقدار کوچکتر از مقدار بزرگتر به دست می آید. حال می توانیم یک چند ضلعی منتظم با هرتعداد ضلع که می خواهیم بر دایره محیط کنیم. از آنجا که چند ضلعی متشکل از تعدادی متناهی مثلث با ارتفاع واحد

1- Method of Exhaustion   2- on The Method

است ، می دانیم که مساحت آن نصف پیرامون آن است . اگر تعداد اضلاع را به اندازهٔ کافی بزرگ بسازیم می توانیم اختلاف مساحت دایره وچند ضلعی را کمتر از نصف A سازیم (A هرچه که می خواهد باشد) در همین حال اختلاف محیط چند ضلعی و دایره کمتر از نصف A خواهد بود . اما در این صورت اختلاف مساحت دایره ونصف محیط آن باید کمتر از A باشدکه با فرض اولیه ما در تناقض است بنابراین فرض غیر ممکن است و A همانطور که می خواستیم ثابت کنیم باید صفر باشد .

این استدلال منطقا " بی عیب است . اما درمقایسه با اولین استدلال که ساده وسرراست است سرشار از وسواس وسخت گیری است . رویهم رفته ، اگر با استفاده از بی نهایت کوچکها جواب درست بدست می آید آیا نباید استدلال مربوط به معنائی درست باشد؟ حتی اگر ما نتوانیم مفاهیم به کاررفته درآن را توجیه کنیم ، وقتی راهگشاست چگونه می تواند واقعا " غلط باشد؟ ارشمیدس چنین دفاعی از بی نهایت کوچکها نکرد . درواقع او دررسالهٔ " دربارهٔ روش" دقت دارد که توضیح دهد ، " حقیقتی که در اینجا بیان شد واقعا " با استدلال به کار برده شده ثابت نمی شود " ویک اثبات بی خلل به طوز جداگانه منتشر شده است. از طرف دیگر ، نیکولاس ، که یک کاردینال کلیسا بود ، استدلال به کمک مقادیر بی نهایت را ترجیح می داد . زیرا اعتقاد داشت بی نهایت ، " منشاء وابزار ودر عین حال هدف دست نیافتنی همهٔ دانشها " است . برهان کپلر ، یکی از بنیان ـ گذاران علوم جدید ، از این اعتقاد نیکولاس به معرفت شهودی پیروی کرد . کپلر دریک تفحص علمی که امروزه کمتر از کشفیاتش در نجوم شهرت دارد ، در ۱۶۱۲ بی ـ نهایت کوچکها را بکار گرفت تا بهترین ابعاد را برای یک بشکهٔ آب پیدا کند او نگران تناقضات درونی روشش نبود وبه الهام وشهودا طمینان می کردونوشت " طبیعت هندسه را تنها از طریق غریزه آموزش می دهد حتی بدون استدلال منطقی " علاوه بر این فرمولهای او برای حجم بشکه‌های آب درست هستند .

مشهورترین ریاضیدانی که به معرفت شهودی اعتقاد داشت بدون شک بلز پاسکال است. او درجواب ایرادات معاصرینش به استدلال مبتنی بر بی‌نهایت کوچکها ، مخلصانه می گفت چشم دل را باید بازکرد تا مسائل روشن شوند . پاسکال به بی نهایت بزرگها وبی نهایت کوچکها به عنوان رازهائی می‌نگریست که طبیعت

آنها را به بشر عرضه کرده است نه از برای فهمیدن آنها ، بلکه از برای تحسین آنها .

اوج شکوفایی استدلالات بی‌نهایت کوچک با نسل بعد از پاسکال فرا رسید . قضایای اساسی حساب دیفرانسیل وانتگرال را نیوتن ولایپ نیتز در سالهای ۱۶۶۰ تا ۱۶۷۰ کشف کردند . اولین کتاب درسی حساب دیفرانسیل وانتگرال را مارکوس هوپیتال ویوهان برنولی در سال ۱۶۹۶ نوشتند . در آغاز این کتاب به عنوان یک اصل موضوع گفته می شود ، که دو مقدار که اختلافشان یک مقدار بی‌نهایت کوچک است می توان مساوی در نظر گرفت ، به عبارت دیگر ، این مقادیر بطور همزمان مساوی با یکدیگر ونامساوی با یکدیگر در نظر گرفته می شوند . اصل موضوع دیگری می‌گوید که خم مرکب از بی نهایت پاره خط با طولهای بی‌نهایت کوچک است . این به منزلهٔ آنست که روشهائی که ارسطو دو هزار سال قبل آنها را از هر حقی محروم ساخته بود با آغوشی باز پذیرفته می شوند .

هوپیتال نوشت : " آنالیز معمولی فقط با مقادیر متناهی سرو کار داردولی به هر میزان که بی نهایت پیش می رود ، این نیز پیش می رود . این آنالیز تفاضلات بی نهایت کوچک مقادیر متناهی را مقایسه ورو ابط بین این تفاضلات را کشف می کندوبه این طریق روابط بین مقادیر متناهی راکه در مقایسه با بی‌نهایت کوچکها ، بی نهایت بزرگ هستند به همان گونه که هست کشف می کند . حتی‌می‌توان گفت که این آنالیز تا ماوراء بی‌نهایت هم ادامه دارد ، زیرا خود را محدود به تفاضلات بی نهایت کوچک نمی کند ، بلکه‌روابط بین تفاضلات این تفاضلات را هم کشف می کند . "

نیوتن ولایپ نیتز دراین شوروشیفتگی با هوپیتال شریک نبودند . لایپ نیز مدعی نبود که بی نهایت کوچکها واقعا " وجود دارند . گرچه لایپ نیتز نمی‌توانست این مدعا را ثابت‌کند کاررا بیسنون نشان داد که حرف او روی هم رفته به معنایی بر حق بوده است . نیوتن سعی کرد که از بی نهایت کوچکها اجتناب کند . او در کتاب ، اصول ریاضی همانند ارشمیدس دربارهٔ تربیع سهمی ، نتایجی راکه دراصل به وسیلهٔ روشهای بی نهایت کوچک به دست آمده بود . به طور کامل ، با روش متناهی اقلیدسی ارائه کرد .

در فراهم آوردن مسئله برای آنالیز ریاضی ، دینامیک اهمیتی همتراز

هندسه یافته بود. مسئله اصلی ارتباط مابین " فلوئنت[1] " و " فلوکسیون[2] "بود که امروز به نامهای مکان لحظه‌ای وسرعت لحظه‌ای یک حسم متحرک معروفند.

یک سنگ در حال سقوط را در نظر بگیرید. حرکت آن با مشخص‌کردن مکان آن به عنوان تابعی از زمان توصیف می شود در حین سقوط سرعت آن افزایش می‌یابد. بنابراین سرعت آن در هرلحظه نیز متغیری تابع زمان است. نیوتن تابع مکان را فلوئنت وتابع سرعت را فلوکسیون نامید. با دردست بودن هریک از این دو، دیگری را می توان تعیین کرد. این ارتباط، اساس حساب بی نهایت کوچکهائی است که نیوتن ولایپ‌نیتز ارائه کردند.

درمورد سنگ در حال سقوط مسافت با فرمول $S=16t^2$ ارائه می شود که S مسافت طی شده بر حسب فوت و t زمان سپری شده از لحظهٔ رها شدن بر حسب ثانیه است. در حین سقوط سنگ سرعت آن مداوم افزایش می یابد. چگونه می توانیم سرعت سنگ درحال سقوط را درلحظهٔ خاصی مثلاً" $t=1$ حساب کنیم؟

می توانیم سرعت متوسط را برای زمانهای متناهی با این فرمول ابتدائی بدست آوریم: سرعت مساوی است با فاصله تقسیم بر زمان. آیا می توانیم سرعت لحظه‌ای را با استفاده از این فرمول بدست آوریم؟ در یک نموبی نهایت کوچک زمان، نموفاصله نیز باید بی نهایت کوچک باشد. نسبت آنها، سرعت متوسط در طی آن لحظه، باید همان سرعت لحظه‌ای متناهی باشد که در حستجوی آن هستیم.

فرض می‌کنیم dt نمایانگر نمو بی‌نهایت کوچک زمان و ds نمایانگر نمو متناظر فاصلة باشد. (البته dt و ds را باید نمادهائی منفرد در نظرگرفت ونه به شکل d ضربدر t یا d ضربدر S) می خواهیم نسبت dS/dt را که مقداری متناهی است به دست آوریم. برای یافتن نمو فاصله از $t=1$ تا $t=1+dt$ مکان سنگ را درزمان $t=1$ که عبارتست از $16=16\times1^2$ ودرزمان $t=1+dt$ که عبارتست از $16\times(1+dt)^2$ محاسبه می‌کنیم. با کمی استفاده از جبر مقدماتی در می یابیم که ds، نموفاصله که تفاضل این دو فاصله است برابر است با: $32\,dt+16\,dt^2$. بنابراین نسبت dS/dt که می خواهیم آنرا بیابیم برابر است با $32+16\,dt$.

آیا ما مسئله را حل کرده ایم؟ از آنجا که جواب باید مقداری متناهی باشد.

---
1) Fluent 2) Fluxion

خواهان آنیم که قسمت بی نهایت کوچک ۱۶ dt را حذف کنیم تا جواب ۳۲ فوت بر ثانیه را برای سرعت لحظه‌ای بدست آوریم . این دقیقا " همان کاری است که اسقف برکلی اجازهٔ انجام آنرا به ما نمی دهد .

کتاب آنالیز دان ، همان نقادی مشعشع وکوبندهٔ برکلی از روش بی نهایت کوچکها در سال ۱۷۳۴ منتشر گردید . این کتاب ، خطاب به یک ریاضیدان بی ایمان که عموما " گمان می کنند دوست نیوتن ، ادموند هالی منجم باشد ،نوشته شده است . هالی برای انتشار کتاب اصول سرمایه گذاری کردوبه آماده سازی آن برای نشر کمک کرد .

برکلی نوشت : روش لایپ نیتز که به سادگی ۳۲+۱۶dt را همان "۳۲" درنظر میگیرد ، قابل فهم نیست . او نوشت : " هیچ فایده‌ای ندارد بگوئیم‌قسمت اغماض‌شده مقداری فوق العاده کوچک است زیرا به ما گفته می شود اگرازچیزی صرف‌نظر شود ، هرچقدر هم کوچک باشد دیگر نمی توانیم مدعی بدست آوردن سرعت دقیق باشیم وفقط یک مقدار تقریبی به‌دست می آوریم ."

نیوتن ، خلاف لایپ نیتز ، درنوشته‌های بعدی خود سعی کرد با استفاده از زمان شهودی فیزیکی خللهای نظریه بی نهایت کوچکها را پر سازد ." مقصود از سرعت نهائی ، آن سرعتی است که جسم دقیقا " در همان لحظه ای که به مکان آخر خود می رسد ، با آن سرعت حرکت می کند ، نه قبل ازرسیدن به آن مکان ، که در آن حرکت متوقف می شودونه بعداز آن ...وهمین طور مقصود ازنسبت نهائی مقادیر صفرشونده ، نسبت آن مقادیر ، نه قبل از صفر شدن ونه بعداز آن ، بلکه‌درهمان وقت صفر شدن آنهاست ". با این حال وقتی او مشغول محاسبه شد هنوز مجبور بود حذف قسمت " قابل اغماض " از جواب محاسبه شده اش را توجیه کند .روش نیوتن همان طور که ما انجام دادیم ، ابتدا یافتن $\frac{ds}{dt}$=۳۲+۱۶ dt وسپس مساوی صفر قرار دادن نمو dt وبدست آوردن جواب دقیق ۳۲ بود .

اما برکلی نوشت " باید توجه کرد که این استدلال واضح یا قانع کننده نیست " . بالاخره dt یا صفر است یا مخالف صفر . اگر dt صفر نیست آن گاه ۳۲+۱۶dt مساوی ۳۲ نیست واگر dt صفر است آن گاه ds نمو فاصله هم صفر است وکسر $\frac{ds}{dt}$ ، نه ۳۲+۱۶dt بلکه عبارت بی معنای $\frac{0}{0}$ است . " زمانی که گفته‌می شود فرض‌کنید نمو صفر باشد یعنی فرض‌کنید نمو هیچ باشد یا