بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه بین المللی امام خمینی

IMAM KHOMEINI INTERNATIONAL UNIVERSITY

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

دانشکده علوم پایه

رساله کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض – آنالیز

عنوان:

فضاهای فوق محدب و قضیهٔ نقطهٔ ثابت

نگارنده:

زینب صادقین

اساتید راهنما:

دکتر علی آبکار و دکتر عبدالرحمن رازانی

استاد مشاور:

دکتر عزیز الله عزیزی

بهمن ماه ۱۳۸۶

بسمه تعالی

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)

سهٔ دفاع از پایان‌نامه خانم زینب صادقین دانشجوی مقطع کارشناسی ارشد رشتهٔ ریاضی محض (شاخه لیز)روز دوشنبه ۸۶/۱۱/۸ تحت عنوان فضاهای فوق محدب و قضیه نقطه ثابت در دانشگاه تشکیل گردید و رد تایید نهایی هیأت داوران قرار گرفت.

یأت داوران:

- استاد راهنما — جناب آقای دکتر علی آبکار

امضاء:

- استاد راهنما — جناب آقای دکتر عبدالرحمن رازانی

امضاء:

- استاد مشاور — جناب آقای دکتر عزیزالله عزیزی

امضاء:

- عضو هیات علمی به عنوان داور خارجی — جناب آقای دکتر کوروش نوروزی

امضاء:

- عضو هیات علمی به عنوان داور داخلی — جناب آقای دکتر رضا میرزایی

امضاء:

- نماینده تحصیلات تکمیلی — جناب آقای دکتر شیرویه پیروی

امضاء:

اداره تحصیلات تکمیلی
حوزه آموزشی
دانشگاه بین المللی امام خمینی

تقدیم به:

پدرم هم او که چگونه آموختن را بـه مـن آموخـت و تقـدیم بـه مـادرم کـه همیـشه در همه ی مراحل زندگیم مشوق من بوده است و تقدیم به همسرم که یاری خویش را از مـن دریـغ ننمود.

سپاس و قدردانی

اکنون که به یاری خداوند متعال کار تدوین این پایان نامه به پایان رسیده است، بدین وسیله از اساتید بزرگوار، فرزانه، دلسوز و فرهیخته به ویژه اساتید راهنمایم جناب آقای دکتر علی آبکار و جناب آقای دکتر عبدالرحمن رازانی، که در تهیه ی این رساله کمک شایانی به من کرده و از هیچ حمایت و مساعدتی دریغ ننموده اند، کمال تشکر را دارم. همچنین از استاد مشاورم جناب آقای دکتر عزیز الله عزیزی، تشکر و قدردانی می نمایم و از خداوند متعال صحت، سلامت و موفقیت این اساتید بزرگوار را در تمام مراحل زندگیشان خواستارم.

همچنین از اساتید و عزیزانی که در طی مدت تحصیل مشوق و هادی اینجانب بوده اند کمال تشکر را دارم.

زینب صادقین

چکیده

فضای متریک M را که در آن برای هر گردایه ی $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ از نقاط M و هر گردایه ی $\{r_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ از اعداد حقیقی مثبت با خاصیت

$$d(x_\alpha, x_\beta) \le r_\alpha + r_\beta \quad , \quad \forall \alpha, \beta \in \Gamma$$

داشته باشیم $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} B(x_\alpha, r_\alpha) \neq \phi$ را فضای متریک فوق محدب می نامیم.

در این پایان نامه نشان می دهیم که هر نگاشت غیر انبساطی روی فضای متریک فوق محدب و کراندار M نقطه ی ثابت دارد. سپس به عنوان گسترشی از این مطلب ثابت می کنیم که هر نگاشت به طور مجانبی غیر انبساطی روی فضای متریک و کراندار M از خاصیت نقطه ی ثابت تخمینی بهره مند است.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

مقدمه

در این پایان نامه فضا های متریک فوق محدب و برخی خواص آنها به ویژه خاصیت نقطه ی ثابت را مورد مطالعه قرار می دهیم. فصل اول به معرفی فضا های فوق محدب اختصاص یافته است. در بخش اول این فصل تاریخچه ی کوتاهی از فضا های فوق محدب بیان می شود.

بخش دوم با بیان فوق محدب بودن فضا های باناخ نامتناهی البعد ℓ_∞ آغاز شده و در ادامه به معرفی نماد هایی در فضا های فوق محدب پرداخته و سپس زیر مجموعه های خاصی از این فضاها تعریف گردیده اند که ویژگی های آن ها را مورد بحث قرار می دهد در بخش سوم این فصل با اثبات این قضیه که هر فضای متریک فوق محدب انژکتیو است و برعکس گسترش قضیه ی هان – باناخ به فضا های متریک را بیان می کند.

در فصل دوم گلچینی از قضیه ها در فضا های متریک فوق محدب به ویژه قضیه ی نقطه ی ثابت را بررسی می کنیم. مطالبی که در این فصل بیان می شود بیشتر روی زیر مجموعه های فوق محدب خارجی فضا های متریک متمرکز شده است. مهم ترین قضیه ی که در این فصل اثبات می شود این است که برای تابع T^* که هر عضو از فضای فوق محدب M را به زیر مجموعه ای فوق محدب خارجی از M نظیر می کند، همیشه یک تابع $T: M \to M$ موجود است که به

ازای هـــر $x,y\in M$, $d(T(x),T(y))\le d_H(T^*(x),T^*(y))$ ، (d_H فاصـــله ی هاسدورف بین دو مجموعه ی بسته است). در ادامه به اثبات این قضیه می پردازیم که هر نگاشت غیر انبساطی روی فضا های متریک فوق محدب و کرانـدار دارای مجموعه ی نقاط ثابت ناتهی و فوق محدب است. سپس به عنـوان نتیجـه ملاحظـه خواهیم کرد نگاشـت T^* کـه در ابتـدای ایـن فـصل ذکـر شـد روی فـضای فـوق محدب و کراندار M نقطه ی ثابت دارد. به این معنی که $x\in M$ موجود است که $x\in T^*(x)$. در بخش دیگر این فصل با اتکا بـه قـضیه ی اول نـشان مـی دهـیم کـه خانواده ی همـه ی توابـع کرانـدار و λ لیـپ شـیتز از فـضای فـوق محـدب M بـه خودش یک فضای متریک فوق محدب است. در بخش آخـر خاصـیت اشتراک زیر مجموعه ها در فضا های متریک فوق محدب مورد بررسی قرار می گیرد.

فصل سوم این پایان نامه گسترشی است از قـضیه ی نقطـه ی ثابـت بـرای نگاشـت های غیر انبساطی روی فـضا هـای فـوق محـدب و کرانـدار، بـه ایـن معنـی کـه بـا تضعیف خاصیت غیر انبساطی بودن T ، به این که T به طور مجانبی غیـر انبـساطی است. نتیجه می گیریم که T دارای نقطه ی ثابت تخمینی می باشد. در بخش اول این فصل مفاهیم و قضایای مورد نیاز بیان و اثبات شده اند. بخش دوم به خاصـیت تحدب خطی در فضا های فوق محدب اختصاص دارد.

بخش سوم با معرفی ابر فیلتر ها به عنوان ابزاری برای اثبات قضیه ی اصلی این فصل آغاز می شود سپس به شناخت و بررسی حد دنباله ها تحت ابر فیلتر ها می پردازد.

در بخش چهارم این فصل، ابر توان یک فضای متریک مطرح می شود که پس از بیان قضایایی در این مورد، در ادامه به تعریف اندازه های غیر فشرده ی کراتوسکی و هاسدورف می پردازیم.

بخش پنجم بیان می کند که چگونه نگاشت های لیپ شیتز به طور طبیعی به ابر توان ها گسترش پیدا می کنند.

نهایتاً در بخش آخر خواهیم دید که اگر T یک نگاشت به طور مجانبی غیر انبساطی روی فضای متریک فوق محدب و کراندار H باشد، آن گاه T دارای نقطه ی ثابت تخمینی است به این معنی که

$$\inf\{d(x,T(x)) \mid x \in H\} = 0$$

در آخر متذکر می شویم که در این پایان نامه، شماره بندی مطالب (قضیه، تعریف، ...) دوتایی در نظر گرفته شده است که شماره ی اول از سمت چپ بیان کننده ی شماره ی فصل و شماره ی دوم بیان کننده ی ترتیب مطالب آن فصل می باشد. به عنوان مثال منظور از قضیه ی (۴. ۳)، قضیه ی چهارم از فصل سوم است.

و همچنین در ارجاع مطالب به مراجع از علامت کروشه استفاده گردیده است.

این پایان نامه بر اساس مقاله های زیر نوشته شده است:

M.A.Khamsi, On asymptotically nonexpansive mappings in hyperconvex metric spaces, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004). 365-373.

«M.A.Khamsi, W.A.Kirk, and C.Martinez yannez, Fixed Point and selection theorems in hyperconvex spaces, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 3275-3283.»

«فصل اول»

آشنایی با فضا های

فوق محدب

بخش اول: تعاریف مقدماتی

می دانیم که قضیه ی هان- باناخ[1] نقش مهمی در آنالیز تابعی بازی می کند. به عبارت دیگر فکر کردن در مورد فضا های باناخ بدون در نظر گرفتن این قضیه تا حدی غیر ممکن است. اما آیا می توان یک گسترش از این قضیه را به فضا های متریک پیدا کرد؟

آرونزاین[2] و پانیچ پکدی[3] اولین کسانی بودند که این مسئله را حدود پنجاه سال پیش مورد بررسی قرار دادند [1] . سعی و تلاش این دو نفر منجر به کشف فضا های متریک فوق محدب شد. برای این که بفهمیم چگونه به این مطلب رسیدند ابتدا مروری بر اثبات قضیه ی هان- باناخ داریم.

قضیه ۱. ۱. فرض کنیم X یک فضای خطی حقیقی ، Y یک زیر فضای خطی آن و p یک شبه نرم روی X باشد. همچنین فرض کنیم که f یک تابعک خطی روی Y است به طوری که به ازای هر $y \in Y$ ، $f(y) \le p(y)$. در این صورت یک تابعک خطی مثل g روی X موجود است که اولاً برای هر $y \in Y$ ، $g(y) = f(y)$ و ثانیاً برای هر $x \in X$ ، $g(x) \le p(x)$.

قبل از اینکه اثبات این قضیه را بیان کنیم اشاره کوتاهی به اصل ماکسیمال هاسدورف خواهیم داشت. این اصل بیان می کند که اگر > روی مجموعه X یک ترتیب جزئی باشد در این صورت یک زیر مجموعه ای از X وجود دارد که بطور خطی مرتب و ماکسیمال است

[1]- Hahn – Banach Theorem

[2]- Aronszajn

[3]- Panitch pakdi

اثبات: با توجه به اصل ماکسیمال هاسدورف[1] کافی است f را به $Y+R.x_{\circ}$ گسترش دهیم، که $x_{\circ}\in X-Y$. بنابراین می بایست $g(x_{\circ})$ را طوری پیدا کنیم که

$$\begin{cases} g(y+\alpha\, x_{\circ})=g(y)+\alpha\, g(x_{\circ})=f(y)+\alpha\, g(x_{\circ}) & \alpha\in R\ ,\ y\in Y \\ g(y+\alpha\, x_{\circ})\leq p(y+\alpha\, x_{\circ}) & \alpha\in R\ ,\ y\in Y \end{cases}$$

α را مساوی ± ۱ در نظر می گیریم. خواهیم داشت

$$f(y_{۱})-p(y_{۱}-x_{\circ})\leq g(x_{\circ})\leq p(y_{۲}+x_{\circ})-f(y_{۲}) \qquad ، \qquad y_{۱},y_{۲}\in Y\cdot$$

پس باید نشان دهیم

$$\bigcap_{y_{۱},y_{۲}\in Y}\left[f(y_{۱})-p(y_{۱}-x_{\circ})\ ,\ p(y_{۲}+x_{\circ})-f(y_{۲})\right]\neq\phi.$$

قرار می دهیم $I_{y_{۱},y_{۲}}=\left[f(y_{۱})-p(y_{۱}-x_{\circ})\ ,\ p(y_{۲}+x_{\circ})-f(y_{۲})\right]$. از این که f یک تابعک خطی و p یک شبه نرم است به راحتی می توان دید که برای هر $y_{۱},y_{۲},y'_{۱},y'_{۲}\in Y$ داریم $I_{y_{۱},y_{۲}}\bigcap I_{y'_{۱},y'_{۲}}\neq\phi$. اکنون با توجه به یکی از مشهورترین خواص بنیادی خط حقیقی R که در زیر بیان می شود، اثبات کامل می گردد.

«اگر $\{I_{\alpha}\}_{\alpha\in\Gamma}$ گردایه ای از فاصله های بسته در R باشد که برای هر $\alpha,\beta\in\Gamma$ داشته باشیم $I_{\alpha}\bigcap I_{\beta}\neq\phi$ آن گاه $\bigcap_{\alpha\in\Gamma}I_{\alpha}\neq\phi$.»

همان طور که دیدیم خاصیت مذکور دلیل اصلی اثبات قضیه ی هان- باناخ است. و همین خاصیت در قلب اندیشه ای است که توسط آرونزاین و پانیچ پکدی کشف شد. می دانیم

1 - Hausdorff Maximal Principle

که فاصله ی بسته ی $[a,b]$ در خط حقیقی R را می توان به صورت یک گوی بسته به مرکز $\frac{a+b}{2}$ و به شعاع $\frac{b-a}{2}$ هم در نظر گرفت. به عبارتی $[a,b]=B(\frac{a+b}{2},\frac{b-a}{2})$. بنابراین خاصیت اشتراک بازه ها که در بالا ذکر شد می تواند به عنوان خاصیت اشتراک گوی ها هم بیان شود، و در فضا های متریک صحبت کردن در مورد گوی ها کاملاً طبیعی است.

لازم به ذکر است که در همه جای این پایان نامه گوی به مرکز a و به شعاع r در فضای متریک M را با نماد B(a , r) نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$B(a,r):=\{x\in M \mid d(x,a)\leq r\}.$$

تبصره ی ۲. ۱ فرض کنیم M یک فضای متریک باشد. اگر $B(x_1,r_1)\bigcap B(x_2,r_2)\neq\phi$ که $x_1,x_2\in M$ و r_2,r_1 اعداد حقیقی مثبت هستند آن گاه با استفاده از خاصیت مثلثی می توان نتیجه گرفت که $d(x_1,x_2)\leq r_1+r_2$.

تعریف ۳. ۱. فرض کنیم M یک فضای متریک باشد. می گوییم M محدب متری است اگر برای هر $x,y\in M$ و هر β, α از اعداد حقیقی مثبت که $d(x,y)\leq\alpha+\beta$، عنصر $z\in M$ چنان موجود باشد که $d(x,z)\leq\alpha$ و $d(z,y)\leq\beta$ یا به عبارتی $z\in B(x,\alpha)\bigcap B(y,\beta)$.

بنابراین فضای متریک M محدب متری است اگر $B(x,\alpha)\bigcap B(y,\beta)\neq\phi$ نتیجه دهد که $d(x,y)\leq\alpha+\beta$ و بر عکس.

تبصره ی ٤. ۱. تعریف دیگر محدب متری به این صورت است که فضای متریک M را محدب متری می گویند اگر و تنها اگر برای هر $x,y\in M$ و هر عدد α متعلق به بازه ی $[0,1]$

عنصر $z \in M$ چنان یافت شود که $d(x,z)=\alpha\, d(x,y)$ و $d(y,z)=(۱-\alpha)\, d(x,y)$.

بسادگی دیده می شود که این دو تعریف معادل یکدیگرند.

مطالب بی‌ان شده تا ای‌نجا بیانگر این است که گسترش قضیه ی هان- باناخ دقیقاً به خاصیت اشتراک گوی های بسته مربوط می شود که به نوعی با مفهوم محدب متری آمیخته شده است. چیزی که توسط آرونزاین و پانیچ پکدی به عنوان فوق محدب معرفی شده است این ادعا را به تصویر می کشد.

تعریف ٥. ١. فضای متریک M فوق محدب است اگر به ازای هر گردایه ی $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ از نقاط M و هر گردایه ی $\{r_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ از اعداد حقیقی مثبت که برای هر $\alpha,\beta \in \Gamma$، $d(x_\alpha,x_\beta) \le r_\alpha + r_\beta$ ، داشته باشیم $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} B(x_\alpha,r_\alpha) \neq \phi$.

بخش دوم: خواص مقدماتی فضا های فوق محدب

واضح است که خط اعداد حقیقی R فوق محدب است. در زیر نشان می دهیم که فضای باناخ نامتناهی البعد ℓ_∞ هم فوق محدب است.

قضیه ی ٦. ١. فرض کنیم $(M_\alpha,d_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ گردایه ای از فضا های متریک فوق محدب باشد. قرار می دهیم $M=\prod_{\alpha \in \Gamma} M_\alpha$. $a=(a_\alpha) \in M$ را ثابت در نظر می گیریم و زیر مجموعه ی M از M را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mathrm{M}=\{(x_\alpha) \in M \mid \sup\ d_\alpha(x_\alpha,a_\alpha)<\infty \ \ ,\ \ \alpha \in \Gamma\}.$$

در این صورت اگر برای هر $(x_\alpha),(y_\alpha)\in \mathrm{M}$ قرار دهیم

$d_\infty((x_\alpha),(y_\alpha))=\sup\limits_{\alpha\in\Gamma} d_\alpha(x_\alpha,y_\alpha)$ آن گاه (M,d_∞) یک فضای متریک فوق محدب خواهد شد.

اثبات: متر بودن d_∞ واضح است. به بررسی فوق محدب بودن M می پردازیم. فرض می کنیم $\{x_i\}_{i\in I}$ گردایه ای از نقاط M و $\{r_i\}_{i\in I}$ گردایه ای از اعداد حقیقی مثبت باشند که $d_\infty(x_i,x_j)\le r_i+r_j$. نشان می دهیم که $\bigcap B(x_i,r_i)\neq\phi$. اگر برای هر $i\in I$ x_i را به صورت زیر در نظر بگیریم

$$x_i=(\mathrm{x}^{\mathrm{i}}_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}\quad,\quad \mathrm{x}^{\mathrm{i}}_\alpha\in M_\alpha$$

آن گاه با توجه به تعریف d_∞ و این که به ازای هر $\alpha\in\Gamma$ فضای متریک M_α فوق محدب است، داریم

$$\bigcap_{i\in I} B(x^i_\alpha,r_i)\neq\phi\,.$$

به عبارتی اشتراک گوی ها به مرکز $x_\alpha{}^i$ و به شعاع r_i در فضای فوق محدب M_α مخالف تهی است. از طرفی تساوی $B((x_\alpha),r)=\prod\limits_{\alpha\in\Gamma} B(x_\alpha,r)$ به راحتی با عضوگیری از طرفین ثابت می شود. بنابراین:

$$\bigcap_{i\in I} B(x_i,r_i)=\bigcap_{i\in I} B((x_\alpha{}^i),r_i)=\bigcap_{i\in I}\left(\prod_{\alpha\in\Gamma} B(x_\alpha{}^i,r_i)\right)=\prod_{\alpha\in\Gamma}\left(\bigcap_{i\in I} B(x_\alpha{}^i,r_i)\right)$$

حال از این که برای هر $\alpha \in \Gamma$ نشان دادیم $\bigcap_{i \in I} B(x_\alpha{}^i, r_i) \neq \phi$ می توان حکم را نتیجه گرفت. □

در ادامه نشان می دهیم که هر فضای متریک می تواند به نوعی در یک فضای متریک فوق محدب قرار بگیرد. فرض کنیم (M,d) یک فضای متریک باشد. قرار می دهیم:

$$\ell_\infty(M) = \left\{ (x_m)_{m \in M} \in R^M ; \sup_{m \in M} |x_m| < \infty \right\}.$$

متریک d_∞ را به صورت زیر روی $\ell_\infty(M)$ تعریف می کنیم

$$d_\infty((x_m),(y_m)) = \sup_{m \in M} |x_m - y_m|.$$

با توجه به قضیه ی(۱. ٦) واضح است که $(\ell_\infty(M), d_\infty)$ یک فضای متریک فوق محدب است. $a \in M$ را ثابت در نظر می گیریم. نگاشت $I : M \to \ell_\infty(M)$ را به صورت $I(b) = (d(b,m) - d(a,m))_{m \in M}$ ، به ازای هر $b \in M$ تعریف می کنیم. بنابراین:

$$d_\infty(I(b), I(c)) = d(b,c) \qquad\qquad b,c \in M.$$

مطلب دیگری که به بررسی آن می پردازیم کامل بودن هر فضای متریک فوق محدب است.

قضیه ی ۷. ۱. هر فضای متریک فوق محدب کامل است.

اثبات: فرض کنیم M یک فضای متریک فوق محدب و $(x_n)_{n \geq ۱}$ دنباله ای کشی در آن باشد. قرار می دهیم

$$r_n = Sup \left\{ d(x_n, x_m) : m \geq n \right\}.$$

بنابراین $(r_n)_{n\geq 1}$ یک دنباله ی نزولی است و داریم $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. از طرفی

$$d(x_n, x_m) \leq r_n + r_m \qquad m,n\in N.$$

پس بنا بر فوق محدب بودن M

$$\bigcap_{n\geq 1} B(x_n, r_n) \neq \phi.$$

در نتیجه حکم ثابت می شود. □

در این قسمت به معرفی چند نماد می پردازیم. فرض کنیم A زیر مجموعه ای از فضای متریک M باشد. تعریف می کنیم

$$\begin{aligned}
&r_x(A) = \sup\{ d(x,y) : y\in A \}, \qquad x\in M;\\
&r(A) = \inf\{ r_x(A) : x\in M \};\\
&R(A) = \inf\{ r_x(A) : x\in A \};\\
&diam(A) = \sup\{ d(x,y) : x,y\in A \};\\
&C(A) = \{ x\in M : r_x(A) = r(A) \};\\
&C_A(A) = \{ x\in A : r_x(A) = R(A) \};\\
&\operatorname{cov}(A) = \bigcap\{ B : A\subseteq B, \quad \text{B یک گوی در M است} \}.
\end{aligned}$$

$r(A)$ را شعاع A (نسبت به M) می گویند. اما منظور از $R(A)$ شعاع چیبیشف A است. diam(A) نشان دهنده ی قطر A است و C(A) مرکز A را (نسبت به M) نشان می دهد درحالی که $C_A(A)$ مرکز چبیشف A خوانده می شود. و در آخر cov(A) پوشش A را بیان می کند.