دانشکده علوم ریاضی و آمار

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق در عملیات

عنوان

سریعترین ماکزیمم جریان پویا با کمترین هزینه در یک شبکه پویا

استاد راهنما

دکتر مسعود امان

استاد مشاور

دکتر نسیم نصرآبادی

نگارنده

طیبه محمدی

شهریور ۱۳۹۲

چکیده

بسیاری از مسائل تصمیم گیری در جهان واقعی می‌توانند به عنوان مسائل شبکه‌ی جریان ایستا و پویا مدل سازی شوند. ضرورت وجود مدل‌های نزدیک تر به شبکه‌های واقعی موجب پیشرفت نظریه‌ی شبکه‌های پویا شد. در مدل‌های شبکه‌ی جریان پویا، پارامترهای شبکه نسبت به زمان تغییر می‌کنند. علاوه بر این، زمان پیمایش روی کمان‌ها و ذخیره سازی جریان در گره‌ها نیز تعریف می‌شود. اگر چه شبکه‌های پویا به طور گسترده در مدل بندی شبکه‌های مختلف استفاده می‌شوند، اما به دلیل پیچیدگی شان به اندازه شبکه‌های استاتیک مورد بحث و بررسی قرار نگرفته‌اند. از طرف دیگر، در بسیاری از مسائل بهینه سازی انتخاب جواب بر اساس چند معیار انجام می‌شود که اغلب اوقات این معیارها متضاد هستند. بنابراین فرمول‌بندی جریان شبکه‌ی چند هدفه برای مسائل ضروری است. در این تحقیق مسأله‌ی ماکزیمم جریان پویا با مینیمم هزینه‌ی دو هدفه و مسأله‌ی سریعترین ماکزیمم جریان پویا با مینیمم هزینه‌ی سه هدفه، روی یک شبکه‌ی پویا فرمول‌بندی و الگوریتم‌هایی برای حل این مسائل ارائه می‌شود. ایده‌ی حل مسأله‌ی سریعترین ماکزیمم جریان پویا با مینیمم هزینه، مبتنی بر تولید نقاط فرین کارا در فضای هدف با حل مکرر یک دنباله از مسائل ماکزیمم جریان پویا با مینیمم هزینه می‌باشد. با حل هر مسأله یا یک نقطه‌ی فرین کارای جدید بدست می‌آید یا جهت جستجو در فضای هدف تغییر می‌کند.

واژگان کلیدی: سریعترین جریان، کوتاهترین مسیر پویا، جریان دو معیاره، شبکه پویای زمان گسسته، ماکزیمم جریان پویا، کوتاهترین مسیر متوالی
تعداد صفحات پایان نامه: ۱۰۱

تقدیم به پدر و مادر مهربانم که هر لحظه وجودم را از

چشمه سار پر از عشق چشمانشان سیراب می کنند

و تقدیم به برادرانم ، حمیدرضا و محمدامین

خدایا... [1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

---

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزاری

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه‌چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.
در آغاز وظیفه خود می‌دانم از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر مسعود امان، صمیمانه قدردانی و تشکر کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. همچنین از سرکار خانم دکتر نسیم نصرآبادی که مشاوره این پایان نامه را بر عهده داشته‌اند و اساتید محترم جناب آقای دکتر حسن حسن‌پور و جناب آقای دکتر اسدا... محمودزاده وزیری برای قبول داوری این پایان نامه کمال تشکر را دارم.
در پایان از پدر و مادر عزیزم که زمینه را برای ادامه تحصیل من فراهم آورده‌اند و برادران عزیزم که در تمام مراحل همراه من بوده‌اند، سپاس گزاری می‌نمایم.

طیبه محمدی
شهریور ۱۳۹۲

فهرست مطالب

لیست تصاویر

پیش گفتار

مفهوم شبکه در بسیاری از مسائل زندگی روزمره مورد استفاده قرار می‌گیرد. سیستم تولید و توزیع کالا و شبکه حمل و نقل، نمونه‌هایی از مسائل شبکه مورد استفاده در زندگی روزمره هستند. بعد زمان مؤلفه بسیار مهمی در مدل سازی مسائل جهان واقعی می‌باشد. در مسائل شبکه جریان استاتیک این مولفه در نظر گرفته نمی‌شود و زمان انتقال روی هر کمان برابر صفر است. در این حالت تمام پارامترهای شبکه نسبت به زمان ثابت می‌باشند. اگرچه الگوریتم‌های کارایی برای حل مسائل روی این شبکه‌ها ارائه شده است، اما با طرح مسائلی که در آن‌ها به نوعی وابستگی به عامل زمان وجود دارد، نقص شبکه‌های استاتیک در تطابق با برخی مسائل واقعی بیش از پیش نمایان می‌شود. در راستای رفع این مشکل، شبکه‌های جدیدی تحت عنوان شبکه جریان پویا مطرح شد که در آن زمان انتقال جریان روی کمان‌ها و وابستگی پارامترهای شبکه به عامل زمان نقش کلیدی دارد. شبکه جریان پویا به طور گسترده در مدل بندی بسیاری از سیستم‌های واقعی مانند کنترل ترافیک، سیستم‌های تولید و توزیع، شبکه‌های مخابراتی و ... استفاده می‌شود. شبکه‌های پویا برای اولین بار توسط فورد و فولکرسون در سال ۱۹۵۸ مطرح شد [۷]. محققین برای شبکه‌های پویا دو نوع مدل بندی بر حسب زمان، به نام مدل زمان گسسته و مدل زمان پیوسته در نظر می‌گیرند [۶].

در بسیاری از مسائل واقعی، تصمیم گیرنده برای تصمیم گیری بیش از یک هدف را مد نظر قرار می‌دهد. در نظر گرفتن یک هدف ممکن است باعث بروز مشکلاتی شود. بنابراین لازم است در مسائل تصمیم گیری از مدل‌های چند هدفه استفاده شود. در مسائل چند هدفه ممکن است اهداف با هم در تضاد باشند. در این صورت یافتن نقطه‌ای که تمام اهداف را به طور همزمان بهینه کند، عملی نیست و با یک دسته از جواب‌ها روبرو هستیم که هیچ کدام از آنها نسبت به دیگری برتری ندارند.

در این تحقیق، مسأله سریعترین ماکزیمم جریان پویا با مینیمم هزینه مورد بررسی قرار گرفته است. در این مسأله، هدف مینیمم سازی هزینه‌ی انتقال و مدت زمان انتقال ماکزیمم مقدار جریان ممکنی است که می‌توان از مبدأ به مقصد در فاصله‌ی زمانی $N=\{0,...,T\}$ ارسال کرد.

در فصل اول، ابتدا مفاهیم و تعاریف مربوط به گراف‌ها را ارائه می‌کنیم. سپس برخی مسائل مطرح روی شبکه‌ی ایستا را فرمول‌بندی کرده و الگوریتم‌هایی برای حل این مسائل بیان می‌کنیم. در پایان مفاهیم و تعاریف مربوط به شبکه‌ی جریان پویا را ارائه کرده و برخی مسائل مطرح روی این شبکه را فرمول‌بندی می‌کنیم.

در فصل دوم، الگوریتمی با زمان شبه چند جمله‌ای برای حل مسأله‌ی سریعترین جریان وابسته

به زمان و زیر مسائل آن یعنی مسائل تخلیه‌ی اهالی وابسته به زمان و سریعترین حمل و نقل که دارای چند مبدأ و چند مقصد هستند، بیان می‌کنیم. الگوریتم سریعترین جریان وابسته به زمان، مسأله‌ی سریعترین جریان وابسته به زمان در یک شبکه‌ی پویا که در آن زمان انتقال، ظرفیت گره‌ها و کمان‌ها و عرضه در گره مبدأ نسبت به زمان تغییر می‌کنند را حل می‌کند. علاوه بر این، این الگوریتم را می‌توان برای حل مسأله‌ی مینیمم زمان جریان پویای وابسته به زمان نیز استفاده کرد.

در فصل سوم، ابتدا مفاهیم و تعاریف مربوط به مسائل چند معیاره را مطرح می‌کنیم. سپس مسأله‌ی ماکزیمم جریان پویای ضمنی با مینیمم هزینه و مسأله ماکزیمم جریان پویا با مینیمم هزینه دوهدفه را فرمول بندی و الگوریتمی برای حل این مسائل ارائه می‌کنیم. الگوریتم حل مسأله‌ی ماکزیمم جریان پویای ضمنی با مینیمم هزینه را طوری طراحی می‌کنیم که با در نظر گرفتن هدف صریح مینیمم سازی هزینه‌ی جریان ارسالی از مبدأ به مقصد، به طور ضمنی ماکزیمم جریان ارسالی از مبدأ به مقصد نیز بدست آید. لذا این مسأله را مسأله‌ی ماکزیمم جریان پویای ضمنی با مینیمم هزینه می‌نامیم. الگوریتم حل مسأله‌ی ماکزیمم جریان پویای ضمنی با مینیمم هزینه، مسأله‌ی ماکزیمم جریان پویا با مینیمم هزینه را نیز حل می‌کند. در پایان، مسأله‌ی سریعترین ماکزیمم جریان پویا با مینیمم هزینه سه هدفه را فرمول بندی و الگوریتمی برای حل این مسأله ارائه می‌کنیم. ایده‌ی حل این مسأله، مبتنی بر تولید نقاط فرین کارا در فضای هدف با حل مکرر یک دنباله از مسائل ماکزیمم جریان پویا با مینیمم هزینه می‌باشد. با حل هر مسأله یا یک نقطه فرین کارای جدید بدست می‌آید یا جهت جستجو در فضای هدف تغییر می‌کند.

فصل ۱
مفاهیم و تعاریف مقدماتی

.

در این فصل ابتدا مفاهیم و تعاریف مربوط به گراف‌ها را ارائه می‌کنیم. اگرچه بحث و گفتگو پیرامون گراف‌ها، تعاریف و مفاهیم زیادی می‌طلبد ولی به دلیل نگنجیدن در زمان و محتوای این تحقیق از ذکر همه آنها پرهیز کرده و به ذکر پاره‌ای از تعاریف که در این تحقیق مورد نیاز است بسنده می‌کنیم. سپس برخی مسائل مطرح روی شبکه‌ی ایستا را فرمول‌بندی کرده و الگوریتم‌هایی برای حل این مسائل بیان می‌کنیم. در پایان مفاهیم و تعاریف مربوط به شبکه‌ی جریان پویا را ارائه کرده و برخی مسائل مطرح روی این شبکه را فرمول‌بندی می‌کنیم. خواننده برای مطالعه بیش‌تر می‌تواند به [۱] و [۱۷] مراجعه کند.

۱.۱ مقدمه‌ای بر گراف‌ها

در سال‌های اخیر نظریه‌ی گراف نقش قابل توجهی در کاربردهای علمی به ویژه فن آوری اطلاعات و ارتباطات پیدا کرده است و نقش قابل توجه خود را در علوم رایانه‌ای بر همگان روشن کرده است. به نظر می‌رسد که نظریه‌ی گراف در سال ۱۷۳۶ با انتشار حل مسأله پل کوئینسبرگ توسط اویلر[۱] آغاز شده است. دویست سال بعد، در سال ۱۹۳۶ دنیس خونیگ[۲] اولین کتاب را در زمینه‌ی نظریه‌ی گراف نوشت. مدت کوتاهی پس از آن، پیشرفت‌های اساسی در نظریه‌ی گراف رخ داد که بسیار مدیون پیشرفت علوم کامپیوتر و ارتباط آن با نظریه‌ی گراف است. در این بخش قسمتی از تعاریف اولیه‌ی نظریه‌ی گراف را بیان می‌کنیم.

[۱] Euler
[۲] Denes Kőnig

تعریف ۱.۱.۱. **گراف** G که به صورت $G = (V, A)$ نمایش داده می‌شود، شامل یک مجموعه‌ی ناتهی متناهی V از عناصری به نام **رأس** (گره یا نقطه) و مجموعه‌ی A (که می‌تواند تهی باشد) از زیرمجموعه‌های دو عضوی V است که هر عضو A یک **یال** گراف نامیده می‌شود. تعداد رأس‌ها در گراف G **مرتبه‌ی** آن و تعداد یال‌ها، **اندازه‌ی** گراف نامیده می‌شود. در حالت کلی، مرتبه‌ی گراف G را با p و اندازه‌ی آن را با q نشان می‌دهیم.

اگر $e = uv$ یالی از گراف G باشد، گوییم u و v در G مجاورند و یال e، دو رأس u و v را به هم وصل می‌کند. برای هر رأس v از گراف G، همسایگی رأس v که با $N(v)$ نشان داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N(v) = \{u \in V | uv \in A\}.$$

در این صورت درجه‌ی v که با $deg\ v$ نشان داده می‌شود برابر است با $deg\ v = \mid N(v) \mid$. یک **گشت** در گراف G یک دنباله‌ی متناوب از رئوس و یال‌ها مانند

$$W : v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., v_{n-1}, e_n, v_n \qquad (n \geq 0)$$

است که ابتدا و انتهای آن رئوس هستند، به طوری که برای $i = 1, 2, ..., n$، $e_i = v_{i-1}v_i \in A$. چون W از v_0 شروع و به v_n ختم می‌شود، W را به عنوان یک گشت $v_0 - v_n$ در نظر می‌گیریم. طول یک گشت تعداد یال‌های آن تعریف می‌شود، بنابراین طول گشت W، برابر n است. گشت با طول صفر یک گشت بدیهی نامیده می‌شود. یک **مسیر**، گشتی است که رأس تکراری ندارد. یک گشت $u - v$ بسته است اگر $u = v$ و باز است اگر $u \neq v$. یک دور گشتی بسته است که رأس تکراری (به جز رأس ابتدا و انتهای آن) ندارد.

فرض کنید u و v رئوسی در گراف G باشند. می‌گوییم u و v **مرتبط** (همبند) هستند، اگر G شامل حداقل یک مسیر $u - v$ باشد. گراف G **همبند** است اگر برای هر زوج u و v از رئوس G، u و v مرتبط باشند. گرافی که همبند نیست، **ناهمبند** نامیده می‌شود. بنابراین، گراف ناهمبند G دارای دو رأس u و v است به طوری که G شامل هیچ $u - v$ مسیری نباشد. تمام گراف‌ها و شبکه‌هایی که در این تحقیق مورد استفاده قرار می‌گیرد همبند فرض می‌شوند مگر آن که خلاف آن ذکر شود.

تعریف ۲.۱.۱. یک **گراف جهت دار** مانند D که به صورت $D = (V, A)$ نمایش داده می‌شود، شامل یک مجموعه‌ی متناهی ناتهی V از رئوس و یک مجموعه‌ی A شامل بعضی از زوج‌های مرتب عناصر V است. اعضای A کمان نامیده می‌شوند.

گراف زمینه‌ی یک گراف جهت دار D گرافی مانند G است که از جایگزینی تمام کمان‌های (u,v) و یا (v,u) از D با یال uv به دست می‌آید. تعداد رئوس در گراف جهت دار D، مرتبه‌ی آن و تعداد کمان‌های D، اندازه‌ی آن نامیده می‌شود. طوقه در یک گراف جهت دار، کمانی است که یک رأس را به خودش وصل می‌کند. اگر (u,v) یک کمان از D باشد گفته می شود u **مجاور به** v است و v **مجاور از** u است. برای هر رأس v از گراف جهت دار D، درجه‌ی خروجی رأس v که با نماد $od\ v$ نشان داده می‌شود، برابر با تعداد رئوسی است که از v مجاورند (تعداد همه کمان‌هایی که از v خارج می‌شوند) و درجه‌ی ورودی رأس v که با نماد $id\ v$ نشان داده می‌شود، برابر با تعداد رئوسی است که به v مجاورند (تعداد همه کمان‌هایی که به v وارد می‌شوند). درجه‌ی رأس v $(deg\ v)$ در گراف جهت دار D به صورت $deg\ v = od\ v + id\ v$ تعریف می‌شود.

یک گشت جهت دار در گراف جهت دار D یک دنباله متناوب

$$W: v_0, e_1, v_1, e_2, ..., e_{n-1}, v_{n-1}, e_n, v_n \qquad (n \geq 0)$$

از رئوس و کمان‌ها است، که ابتدا و انتهای آن رئوس هستند به گونه‌ای که برای هر $i = 1, 2, ..., n$، $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in A$.

یک مسیر جهت دار، گشت جهت داری بدون رأس تکراری است. یک دور جهت دار، یک مسیر جهت دار مانند $v_1, v_2, ..., v_r$ همراه با کمان (v_r, v_1) است. توجه داریم که مسیر و دور جهت دار در گراف جهت دار باید همواره در جهت کمان‌های موجود در آن‌ها طی شود. اگر یک مسیر جهت دار از گره v_i به گره v_j وجود داشته باشد آنگاه گفته می‌شود v_j از v_i **قابل دسترسی**[۳] است.

تعریف ۳.۱.۱. یک برش، یک افراز از مجموعه گره V به دو زیر مجموعه S و $\overline{S} = V \setminus S$ است و با نماد $[S, \overline{S}]$ نشان داده می‌شود. بنابراین یک برش می‌تواند به صورت مجموعه کمان‌هایی با یک انتها در S و انتهای دیگر در $\overline{S}$ نیز تعریف شود. برشی که در آن $s \in S$ و $t \in \overline{S}$ یک $s-t$ برش[۴] نامیده می‌شود.

۲.۱ مقدمه‌ای بر شبکه‌ی جریان ایستا

مفهوم شبکه در بسیاری از مسائل زندگی روزمره مورد استفاده قرار می‌گیرد. سیستم تولید و توزیع کالا و شبکه حمل و نقل، نمونه‌هایی از مسائل شبکه مورد استفاده در زندگی روزمره هستند. در تمامی مسائل فوق قصد داریم که یک شیء (سفارش مشتری، شخص و ...) را از محلی در شبکه

[۳] Reachable
[۴] s-t cut

به محلی دیگر، در حالی که نیاز کاربران شبکه تأمین شود، با بیش‌ترین بهره وری انتقال دهیم. در این بخش بیان خواهیم کرد که چگونه این مسائل، در قالب یک مسأله‌ی ریاضی مدل‌بندی و حل می‌شوند. پیشینه‌ی مسأله‌ی جریان شبکه مربوط به زمانی است که کیرشهف[۵] و دیگر مهندسان الکترونیک روی مدارهای الکتریکی کار می‌کردند. این مطالعات اولیه، اساس بسیاری از ایده‌های اصلی در نظریه‌ی جریان شبکه هستند. مسائل مختلفی مانند مسأله‌ی مینیمم هزینه‌ی جریان[۶]، مسأله‌ی ماکزیمم جریان[۷]، مسأله‌ی کوتاهترین مسیر[۸]، مسأله‌ی تخصیص[۹] و ... در بحث جریان شبکه وجود دارد که ما فقط بعضی از آن‌ها را بیان خواهیم کرد و خواننده را برای مطالعه بیش‌تر به [۱] ارجاع می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۱. یک **شبکه‌ی**[۱۰] (جهت دار) $G=(V,A)$، یک گراف (جهت دار) با مجموعه رئوس V و مجموعه یال (کمان) A است به طوری که در آن متناظر با هر یال (کمان) و/یا هر رأس مقادیر عددی مفروضی (هزینه، ظرفیت و/یا عرضه، تقاضا) تعریف شده است.

شبکه‌ها به دو دسته‌ی ایستا و پویا تقسیم می‌شوند. شبکه‌ی بیان شده در تعریف ۱.۲.۱ شبکه‌ی ایستا یا به اختصار، شبکه نامیده می‌شود. در شبکه‌های پویا پارامترهای شبکه نسبت به زمان تغییر می‌کنند، علاوه بر این زمان پیمایش روی کمان‌ها نیز تعریف می‌شود. در ادامه مسائل مطرح شده روی شبکه‌های ایستا و پویا را معرفی می‌کنیم.

۱.۲.۱ مسأله‌ی مینیمم هزینه‌ی جریان

شبکه‌ی جهت دار $G=(V,A)$ را در نظر بگیرید که در آن V مجموعه‌ی گره‌ها و A مجموعه‌ی کمان‌ها است. فرض کنید این شبکه دارای n گره و m کمان است. متناظر با هر کمان $(i,j)\in A$ سه مقدار c_{ij}، u_{ij} و l_{ij} داده شده است. c_{ij} نشان دهنده‌ی هزینه‌ی عبور یک واحد جریان روی کمان (i,j) است. u_{ij} ماکزیمم مقدار جریانی است که می‌تواند در کمان جریان یابد و l_{ij} نشان دهنده‌ی مینیمم مقدار جریانی است که باید در کمان جریان داشته باشد. برای هر گره $i\in V$، عدد صحیح $b(i)$ که نشان دهنده عرضه/تقاضا است، مفروض است. اگر $b(i)>0$، گره i گره عرضه و اگر $b(i)<0$، گره i گره تقاضا و اگر $b(i)=0$، گره i را گره میانی می‌نامند. مقدار $b(i)$،

[۵] Kirchhof
[۶] Minimum cost flow
[۷] Maximum flow
[۸] Shortest path
[۹] Assignment
[۱۰] Network

مقدار تعادل[۱۱] گره i نامیده می‌شود. این مقادیر باید در شرط $\sum_{i=1}^{n} b(i) = 0$ صدق کنند، اما اگر $\sum_{i=1}^{n} b(i) > 0$، برای برقراری شرط، یک گره تقاضای مجازی با مقدار تقاضای $-\sum_{i=1}^{n} b(i)$ و کمان‌هایی با هزینه‌ی صفر از تمام گره‌های عرضه به گره جدید ایجاد می‌کنیم. همچنین اگر $\sum_{i=1}^{n} b(i) < 0$، برای برقراری شرط، یک گره عرضه‌ی مجازی با مقدار عرضه‌ی $-\sum_{i=1}^{n} b(i)$ و کمان‌هایی با هزینه‌ی صفر از گره جدید به تمام گره‌های تقاضا ایجاد می‌کنیم. در مسأله‌ی مینیمم هزینه‌ی جریان، هدف یافتن جریانی با کمترین هزینه است به طوری که مقادیر عرضه و تقاضا در گره‌ها برآورده شود و جریان روی هر کمان در محدودیت ظرفیت صدق کند. بنابراین فرمول‌بندی این مسأله به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&Min \quad \textstyle\sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} \\
&S.to: \quad \textstyle\sum_{\{j:(i,j)\in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(j,i)\in A\}} x_{ji} = b(i) \quad i \in V \qquad (۱.۱)\\
&\qquad\quad l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij} \qquad\qquad (i,j)\in A
\end{aligned}
$$

که در آن x_{ij} نشان دهنده‌ی مقدار جریان در کمان $(i,j) \in A$ است. محدودیت‌های اول در مسأله (۱.۱) محدودیت‌های بقای جریان[۱۲] (تعادل جرم[۱۳]) نامیده می‌شوند. محدویت‌های بقای جریان شامل یک محدودیت برای هر گره i است که تضمین می‌کند مقدار جریان خروجی از گره منهای جریان ورودی به گره، برابر مقدار تعادل در گره باشد. محدویت‌های دوم در مسأله (۱.۱) محدودیت‌های کران جریان[۱۴] نامیده می‌شود. بدون اینکه از کلیت مسأله کاسته شود، کران پایین صفر در نظر گرفته می‌شود.

روش‌های بسیاری برای حل مسأله‌ی مینیمم هزینه‌ی جریان وجود دارد مانند الگوریتم حذف دور منفی[۱۵]، الگوریتم کوتاهترین مسیر متوالی[۱۶] ، الگوریتم اولیه - دوگان[۱۷] ، الگوریتم تخفیف[۱۸] ، الگوریتم سیمپلکس شبکه[۱۹] و .... که به دلیل کاربرد الگوریتم کوتاهترین مسیر متوالی در فصل‌های بعد، این الگوریتم را در بخش ۵.۲.۱ بیان می‌کنیم. خواننده برای مطالعه بیش‌تر می‌تواند به فصل‌های ۹، ۱۰ و ۱۱ از [۱] مراجعه کند.

---
[۱۱] Blance
[۱۲] Flow conservation constraints
[۱۳] Mass balance constraints
[۱۴] Flow bound constraints
[۱۵] Cycle-canceling algorithm
[۱۶] Successive shortest path algorithm
[۱۷] Primal-dual algorithm
[۱۸] Relaxation algorithm
[۱۹] Network simplex algorithm

۲.۲.۱ مسأله‌ی ماکزیمم جریان

شبکه‌ی جهت دار $G = (V, A)$ را با گره مبدأ s و گره مقصد d در نظر بگیرید. متناظر با هر کمان $(i, j) \in A$، ظرفیت نامنفی u_{ij} مفروض است که نشان دهنده‌ی ماکزیمم مقدار جریانی است که می‌تواند در کمان (i, j) جریان یابد. در مسأله‌ی ماکزیمم جریان[۲۰] ، هدف یافتن جریانی از گره مبدأ به گره مقصد با ماکزیمم مقدار ممکن است به طوری که در محدودیت‌های بقای جریان و ظرفیت صدق کند. بنابراین فرمول‌بندی این مسأله به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{array}{lll} Max & v & \\ S.to: & \sum_{\{j:(i,j)\in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(j,i)\in A\}} x_{ji} = & \begin{cases} v & i = s \\ 0 & \forall i \in V \setminus \{s, d\} \\ -v & i = d \end{cases} \\ & 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} & (i, j) \in A \end{array} \qquad (۲.۱)$$

که در آن x_{ij} نشان دهنده‌ی مقدار جریان در کمان $(i, j) \in A$ است و بردار $x = \{x_{ij}\}$ که در محدودیت‌های معادله (۲.۱) صدق می‌کند، بردار جریان نامیده می‌شود. متغییر عددی v نشان دهنده‌ی مقدار جریان خالص است که می‌توان از گره s به گره d فرستاد، مقدار متناظر با این متغیر، مقدار جریان[۲۱] نامیده می‌شود. برای حل مسأله‌ی ماکزیمم جریان، از الگوریتم مسیر افزایشی[۲۲] (الگوریتم فورد و فولکرسون[۲۳]) ، الگوریتم مقیاس بندی ظرفیت[۲۴] و .... استفاده می‌شود که به دلیل کاربرد الگوریتم مسیر افزایشی در فصل‌های بعد، این الگوریتم را در بخش ۶.۲.۱ بیان می‌کنیم. خواننده برای مطالعه بیشتر می تواند به [۱] مراجعه کند.

۳.۲.۱ مسأله‌ی کوتاهترین مسیر

شبکه‌ی جهت دار $G = (V, A)$ را با گره مبدأ s و گره مقصد d در نظر بگیرید. متناظر با هر کمان $(i, j) \in A$، هزینه (طول) c_{ij} داده شده است. در مسأله‌ی کوتاهترین مسیر[۲۵] ، هدف یافتن مسیر جهت داری با کمترین هزینه (طول) از گره مبدأ s به گره مقصد d می‌باشد. اگر در مسأله‌ی مینیمم هزینه‌ی جریان قرار دهیم $b(s) = 1$، $b(d) = -1$ و برای هر $i \in V \setminus \{s, d\}$، $b(i) = 0$، در این صورت جواب مسأله‌ی کوتاهترین مسیر هم ارز فرستادن یک واحد جریان از گره s به گره d با

[۲۰] Maximum flow problem
[۲۱] Value of the flow
[۲۲] Augmenting path algorithm
[۲۳] Ford-fulkerson algorithm
[۲۴] Capacity scaling algorithm
[۲۵] Shortest path

کمترین هزینه ممکن در مسأله‌ی مینیمم هزینه‌ی جریان است. لذا فرمول‌بندی مسأله‌ی کوتاهترین مسیر به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{array}{lll} Min & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} & \\ S.to: & \sum_{\{j:(i,j)\in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(j,i)\in A\}} x_{ji} = & \begin{cases} 1 & i=s \\ 0 & \forall i\in V\setminus\{s,d\} \\ -1 & i=d \end{cases} \\ & x_{ij}\in\{0,1\} & (i,j)\in A \end{array} \tag{۳.۱}$$

برای حل مسأله‌ی کوتاهترین مسیر از الگوریتم تثبیت برچسب گذاری[۲۶] و الگوریتم تصحیح برچسب گذاری[۲۷] استفاده می‌شود که به دلیل کاربرد الگوریتم تصحیح برچسب گذاری در فصل‌های بعد، این الگوریتم را در بخش ۴.۲.۱ بیان می‌کنیم. خواننده برای مطالعه بیشتر می‌تواند به [۱] مراجعه کند.

۴.۲.۱ الگوریتم تصحیح برچسب گذاری

در این بخش الگوریتم تصحیح برچسب گذاری را برای حل مسأله‌ی کوتاهترین مسیر بیان می‌کنیم. قبل از توصیف الگوریتم، برخی قضایایی را که در الگوریتم به کار می‌روند، بیان می‌کنیم.

قضیه ۲.۲.۱ (شرایط بهینگی کوتاهترین مسیر). *فرض کنید برای هر گره $j\in V$، $d(j)$ نشان دهنده‌ی طول یک مسیر جهت‌دار از گره مبدأ به گره j باشد. در این صورت $d(j)$ نشان دهنده‌ی طول کوتاهترین مسیر از گره مبدأ به گره j است اگر و تنها اگر در شرایط زیر صدق کند:*

$$d(j)\leqslant d(i)+c_{ij} \qquad \forall (i,j)\in A.$$

برهان. برای اثبات به [۱] مراجعه شود. □

برای هر کمان $(i,j)\in A$، هزینه‌ی کاهش یافته c^d_{ij} به صورت $c^d_{ij}=c_{ij}-d(j)+d(i)$ تعریف می‌شود.

گزاره ۳.۲.۱. (آ) *برای هر دور W داریم* $\sum_{(i,j)\in W} c^d_{ij}=\sum_{(i,j)\in W} c_{ij}$.

(ب) *برای هر مسیر جهت دار P از گره k به گره l داریم:*

$$\sum_{(i,j)\in P} c^d_{ij}=\sum_{(i,j)\in P} c_{ij}+d(k)-d(l).$$

[۲۶] Label-Setting
[۲۷] Label-Correcting

(پ) *اگر* $d(.)$ *نشان دهنده‌ی طول کوتاهترین مسیر از گره* s *به گره‌های دیگر در شبکه* G *باشد آنگاه برای هر* $(i,j) \in A$ ، $c_{ij}^d \geqslant 0$.

برهان. برای اثبات به [۱] مراجعه شود. □

در الگوریتم تصحیح برچسب گذاری، $pred(j)$ نشان دهنده‌ی گره پیشین گره j در طول کوتاهترین مسیر جهت‌دار از گره مبدأ به گره j می‌باشد. در شروع الگوریتم، برچسب‌های فاصله‌ی هر گره $j \in V$ به صورت زیر مقدار دهی می‌شود:

$$d(s) = 0; \quad d(j) = \infty, \quad j \in V \setminus \{s\}.$$

در این الگوریتم از $LIST$ برای ذخیره‌ی گره‌هایی که برچسب فاصله این گره‌ها بهبود می‌یابد، استفاده می‌کنیم. در شروع الگوریتم، $LIST$ تنها شامل گره مبدأ می‌باشد. الگوریتم تصحیح برچسب گذاری دارای یک روند تکراری به صورت زیر است.

در هر تکرار این الگوریتم، یک گره مانند i از $LIST$ انتخاب و حذف می‌کنیم. سپس برای هر کمان $(i,j) \in A(i) = \{(i,j) \in A : j \in V\}$، اگر این کمان در شرایط بهینگی کوتاهترین مسیر صدق نکند، برچسب فاصله‌ی گره j را به روز رسانی کرده و قرار می‌دهیم $pred(j) = i$. گره j را در صورتی که متعلق به $LIST$ نباشد، به $LIST$ اضافه می‌کنیم. این فرآیند را تازمانی که $LIST$ تهی شود، ادامه می‌دهیم.

کد گذاری الگوریتم تصحیح برچسب گذاری به صورت زیر می‌باشد:

label-correcting

---

begin

$d(s) = 0; \quad pred(s) = 0;$

$d(j) = \infty, \quad j \in V \setminus \{s\};$

$LIST = \{s\};$

while $LIST \neq \emptyset$ do

begin

remove an element i from $LIST$;

for each arc $(i,j) \in A(i)$ do

if $d(j) > d(i) + c_{ij}$ then

begin