دانشگاه زنجان

پایان نامه ی دکتری

نامساوی‌های عملگری روی فضاهای هیلبرت

دانشجو

علی مرّضعی

اساتید راهنما

دکتر فرض اله میرزاپور

دکتر محمد صال مصلحیان

پاییز ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به

همسرم

و

دخترم مهنّا

تشکر و قدردانی

اول از همه، از خدای متعال به خاطر لطف بیشمارش، خانواده مهربانم و استادان بزرگم تشکر می‌کنم و سر تعظیم فرود می‌آورم.

دانشجوی دو استاد بزرگوار آقایان **دکتر فرض اله میرزاپور** از دانشگاه زنجان و **دکتر محمد صال مصلحیان** از دانشگاه فردوسی مشهد بودن که سرپرستی و راهنمایی رساله دکتری اینجانب را عهده‌دار بوده‌اند افتخار بزرگی برای من می‌باشد. بر خود وظیفه می‌دانم که از هر دو این عزیزان به خاطر شور و شوق بی‌پایان و ایده‌های جالبشان و فرصت‌هایی که به من دادند تا حرکت رو به جلو در پژوهش داشته باشم، تشکر می‌نمایم.

در این فرصت می‌خواهم از اعضای کمیته دفاع آقایان **دکتر مجید میرزاوزیری** از دانشگاه فردوسی مشهد، **دکتر جمال رویین** از دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، **دکتر سعید مقصودی** و **دکتر هادی خطیب زاده** از دانشگاه زنجان برای خواندن و داوری این رساله تشکر نمایم. از عزیزان جناب آقای دکتر مهدی حسنی برای راهنمایی‌های ارزنده، سرکار خانم موسوی مسئول آموزش تحصیلات تکمیلی دانشکده علوم پایه، سرکار خانم بهراملوئیان مسئول آموزش دانشکده علوم پایه نیز تشکر می‌نمایم که در طول این مدت راهنمای اینجانب در امور اداری و آموزشی بوده‌اند.

از همه دوستانم و همه دوره‌ایهای عزیزم آقایان نادر حبیبی، رسول اسکندری، اصغر مددی، مهدی آقابالی و ابراهیم اکبر بگلو که در طول دوره دکتری محیطی صمیمی را فراهم کرده بودند تشکر نموده و خواستار موفقیت همگی این عزیزان می‌باشم.

تشکر بسیار ویژه‌ام را به مادر عزیزم، برادرانم و خواهرم برای عشق و تشویق آنها تقدیم می‌کنم. در تمام این مدت احساس شادی را در کنار آنها داشته‌ام. به روان پاک پدرم درود می‌فرستم و امیدوارم توانسته باشم روح پاکش را شاد نمایم.

در نهایت، تشکر و قدردانی بسیار صمیمی‌ام را تقدیم می‌دارم به همسر عزیزم، کسی که بیش از حد تصور به من فرصت داد تا بتوانم مراحل تحصیل و تحقیق خود را در کمال آرامش و شادابی به پایان برسانم، و دخترم، که صبر و شکیبایی بی پایان او مرا دلگرم می‌کرد.

علی مرصّعی

زنجان

پاییز ۱۳۹۱

چکیده

در این رساله، برخی از نسخه‌های عملگری نامساوی بلمن را ثابت می‌کنیم. بویژه، ثابت می‌کنیم که اگر $\Phi : \mathcal{B}(\mathscr{H}) \to \mathcal{B}(\mathscr{K})$ نگاشت خطی مثبت یکانی، $A, B \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ انقباض، $p > 1$ و $0 \leq \lambda \leq 1$ باشد، آن‌گاه

$$\left(\Phi(1_{\mathscr{H}} - A\nabla_{\lambda}B)\right)^{1/p} \geq \Phi\left((1_{\mathscr{H}} - A)^{1/p}\nabla_{\lambda}(1_{\mathscr{H}} - B)^{1/p}\right).$$

همچنین نامساوی‌های بلمن را برای فرم‌های شبه خطی و نرم‌های ناوردا بدست می‌آوریم. در ادامه، نامساوی عملگری ینسن را تظریف می‌کنیم و سپس با استفاده از آن تظریفی از نامساوی عملگری بلمن را ارائه خواهیم کرد.

همچنین، حالتی از آنتروپی نسبی عملگری را که توسط جی.آی. فوجی و ای. کامئی شروع شده، مورد بررسی قرار خواهیم داد. برای دو دنباله $\mathbf{A} = (A_1, \cdots, A_n)$ و $\mathbf{B} = (B_1, \cdots, B_n)$ از عملگرهای مثبت روی فضای هیلبرت، عدد حقیقی q و تابع یکنوای عملگری f بحث آنتروپی را به صورت زیر تعمیم می‌دهیم

$$S_q^f(\mathbf{A}|\mathbf{B}) := \sum_{j=1}^{n} A_j^{\frac{1}{2}} \left(A_j^{-\frac{1}{2}} B_j A_j^{-\frac{1}{2}}\right)^q f\left(A_j^{-\frac{1}{2}} B_j A_j^{-\frac{1}{2}}\right) A_j^{\frac{1}{2}},$$

و سپس کران‌های بالا و پایینی برای $S_q^f(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ به عنوان یک توسیع از نامساوی ارائه شده توسط تی.

فوروتا تحت شرایط معین، بدست خواهیم آورد. بعد از آن، برخی از نامساوی‌های مربوط به آنتروپی شنون کلاسیک را از آن نتیجه خواهیم گرفت.

کلمات و واژه‌های کلیدی. نامساوی بلمن، میانگین حسابی عملگری، مقعر عملگری، نزولی عملگری، تابعک خطی مثبت، نامساوی ینسن، آنتروپی عملگری، نامساوی آنتروپی، میانگین عملگری.

فهرست مطالب

فصل ۱

نتایج مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در این فصل، برخی تعاریف مهم، نتایج و نمادهای اساسی را که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار خواهند گرفت، می‌آوریم. همچنین، در این فصل بسیاری از نتایج مرتبط با عملگرهای خودالحاق کراندار، توابع محدب عملگری و یکنوای عملگری، نامساوی نوع ینسن، نگاشتهای خطی مثبت و میانگین‌های عملگری را بیان می‌کنیم.

۲.۱ عملگرهای خطی کراندار

فرض کنیم $\mathscr{A}$ یک جبر باناخ باشد. نگاشت خطی مزدوج $* : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ یک برگشت برای $\mathscr{A}$ است هرگاه

$$x^{**} = x, \quad (xy)^* = y^*x^*, \quad \|x^*\| = \|x\| \quad (x, y \in \mathscr{A}).$$

اگر شرایط بالا برقرار باشد، آن‌گاه $\mathscr{A}$ یک جبر *باناخ برگشتی* یا یک $*$-جبر *باناخ* نامیده می‌شود. علاوه بر این، هرگاه، $\|x^*x\| = \|x\|^۲$، آن‌گاه $\mathscr{A}$ یک C^*-جبر نامیده می‌شود.

فرض کنیم $\mathscr{H}$ یک فضای برداری روی میدان مختلط $\mathbb{C}$ باشد. نگاشت $(x,y) \to \langle x,y\rangle$ از $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ به $\mathbb{C}$ یک *ضرب داخلی* روی $\mathscr{H}$ نامیده می‌شود هرگاه برای $x,y,z \in \mathscr{H}$ و برای $\lambda \in \mathbb{C}$، خواص زیر را داشته باشیم

(الف) (جمعی) $\langle x+y, z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$؛

(ب) (همگنی) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x,y\rangle$؛

(ج) (متقارن-مزدوج) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$؛

(د) (مثبت) $\langle x,x\rangle \geq ۰$؛

(ه) (ناتبهگون) هرگاه $\langle x,x\rangle = ۰$، آن‌گاه $x = ۰$.

یک فضای برداری مجهز به یک ضرب داخلی، *فضای ضرب داخلی* نامیده می‌شود. در یک فضای ضرب داخلی $\mathscr{H}$، می‌نویسیم $(x \in \mathscr{H}) \quad \|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$.

فرض کنیم $\mathscr{H}$ یک فضای ضرب داخلی باشد. برای $x,y,z \in \mathscr{H}$ و برای هر عدد مختلط α, β، خواص زیر برقرارند:

(الف) خطی مزدوج: $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\,\langle x,y\rangle + \overline{\beta}\,\langle x,z\rangle$،

(ب) قانون متوازی‌الاضلاع: $\|x+y\|^۲ + \|x-y\|^۲ = ۲\|x\|^۲ + ۲\|y\|^۲$،

(ج) اتحاد قطبی:

$$۴\,\langle x,y\rangle = \|x+y\|^۲ - \|x-y\|^۲ + i\|x+iy\|^۲ - i\|x-iy\|^۲ = \sum_{k=۰}^{۳} i^k \|x+i^k y\|^۲ .$$

اگر فضای ضرب داخلی $\mathscr{H}$ نسبت به متر $d(x,y) = \|x-y\|$ کامل باشد، آن‌گاه $\mathscr{H}$ *فضای هیلبرت* نامیده می‌شود.

یک عملگر خطی A را روی فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ *کراندار* می‌نامیم هرگاه

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\| \;:\; \|x\| \leq ۱,\; x \in \mathscr{H}\} < \infty\,.$$

در این‌صورت $\|A\|$ *نرم عملگری* A نامیده می‌شود. *عملگر الحاقی* A^* از A به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle \quad (x, y \in \mathscr{H})\,.$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که $\|A\| = \|A^*\| = \|A^*A\|^{۱/۲}$. C^*- جبر همه عملگرهای خطی کراندار تعریف شده روی $\mathscr{H}$ را با $\mathbb{B}(\mathscr{H})$ نشان می‌دهیم. اگر $\dim\mathscr{H} = n$، $\mathbb{B}(\mathscr{H})$ را با جبر ماتریس‌های $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ متشکل از تمام ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های در میدان مختلط یکسان می‌گیریم.

منظور از *طیف* یک عملگر A عبارتست از مجموعه

$$\mathsf{sp}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \;:\; \text{معکوس‌پذیر نیست } \mathbb{B}(\mathscr{H}) \text{ در } A - \lambda ۱_{\mathscr{H}}\}\,.$$

طیف $\mathsf{sp}(A)$ مجموعه‌ای ناتهی و فشرده است. عملگر خطی کراندار A تعریف شده روی $\mathscr{H}$ *خود الحاق* نامیده می‌شود؛ یعنی، $A = A^*$ اگر و تنها اگر $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ برای هر $x \in \mathscr{H}$ و اگر A خودالحاق باشد، آن‌گاه

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=۱} |\langle Ax, x\rangle| = \sup_{\|x\|=\|y\|=۱} |\langle Ax, y\rangle|\,. \tag{۱.۱}$$

مجموعه تمام عملگرهای خودالحاق در $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ را با $\mathcal{B}_h(\mathscr{H})$ نمایش می‌دهیم.

رابطه ترتیب در $\mathcal{B}_h(\mathscr{H})$ را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

تعریف ۱.۱. فرض کنیم A عملگری خودالحاق روی $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ باشد. A مثبت نامیده می‌شود و می‌نویسیم $A \geq 0$، هرگاه برای هر $x \in \mathscr{H}$، $\langle Ax, x\rangle \geq 0$. بویژه، برای عملگرهای $A, B \in \mathcal{B}_h(\mathscr{H})$ می‌نویسیم $A \leq B$ (یا $B \geq A$) و آن را ترتیب عملگری می‌نامیم، هرگاه $B - A \geq 0$ باشد؛ یعنی برای هر $x \in \mathscr{H}$، $\langle Ax, x\rangle \leq \langle Bx, x\rangle$.

این نشان می‌دهد که $\leq$ ترتیب جزئی روی $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ می‌باشد [۳۵].

یک عملگر $A \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ مثبت است اگر و تنها اگر برای عملگری مانند $B \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$، $A = B^*B$ [۳۵].

برای اسکالرهای m و M، می‌نویسیم $m1_{\mathscr{H}} \leq A \leq M1_{\mathscr{H}}$ هرگاه برای هر بردار یکه $x \in \mathscr{H}$، $m \leq \langle Ax, x\rangle \leq M$. می‌دانیم که [۲۴، ص. ۲۹۴] برای عملگر خودالحاق A، $\mathrm{sp}(A) \subset [m, M]$ اگر و تنها اگر $m1_{\mathscr{H}} \leq A \leq M1_{\mathscr{H}}$.

عملگر $A \in \mathcal{B}_h(\mathscr{H})$ *اکیدا* مثبت نامیده می‌شود و می‌نویسیم $A > 0$، هرگاه مثبت و معکوس‌پذیر باشد.

مجموعه همه عملگرهای مثبت روی $\mathscr{H}$ را با $\mathcal{B}_+(\mathscr{H})$ و مجموعه همه عملگرهای اکیدا مثبت را با $\mathcal{B}_{++}(\mathscr{H})$ نمایش می‌دهیم. مجموعه $\mathcal{B}_+(\mathscr{H})$ مخروطی محدب مشمول در $\mathcal{B}_h(\mathscr{H})$ می‌باشد.

۳.۱ توابع پیوسته از عملگرهای خودالحاق

فرض کنیم $\mathcal{P}$ جبر تمام چندجمله‌ای‌های یک متغیره با ضرایب مختلط باشد؛ یعنی

$$\mathcal{P} := \left\{ p(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k \ : \ n \geq 0, \quad \alpha_k \in \mathbb{C}, \quad 0 \leq k \leq n \right\}.$$

قضیه ۱.۱. [۲۸] فرض کنیم $A \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ و برای $p(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k \in \mathcal{P}$ تعریف می‌کنیم $p(A) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A^k \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$، که $A^0 = 1_{\mathscr{H}}$ و $\overline{p}(A) = \sum_{k=0}^{n} \overline{\alpha_k} (A^*)^k \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$. دراین‌صورت نگاشت $p(t) \mapsto p(A)$ دارای خواص زیر است:

الف) $(p+q)(A) = p(A) + q(A)$؛

ب) $(\lambda p)(A) = \lambda p(A)$؛

ج) $(pq)(A) = p(A)q(A)$؛

د) $[p(A)]^* = \overline{p}(A)$.

توجه کنیم که $p(A)q(A) = q(A)p(A)$ و چندجمله‌ای ثابت $p(t) = \alpha_0$ به عملگر $p(A) = \alpha_0 1_{\mathscr{H}}$ نگاشته می‌شود.

قضیه ۱.۱ تاکید می‌کند که نگاشتی که هر چندجمله‌ای $p(t)$ را به عملگر $p(A)$ نظیر می‌کند یک همریختی از $\mathcal{P}$ به $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ با خاصیت اضافه (د) می‌باشد.

نتیجه زیر ارتباط بین طیف A و طیف عملگر $p(A)$ را بیان می‌کند.

قضیه ۲.۱. [۲۸] اگر $A \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ و $p \in \mathcal{P}$، آن‌گاه

$$\mathsf{sp}(p(A)) = p(\mathsf{sp}(A))\,.$$

نتیجه ۳.۱. [۲۸] هرگاه $A \in \mathcal{B}_h(\mathscr{H})$ و چندجمله‌ای $p(t) \in \mathcal{P}$ دارای ضرایب حقیقی باشد، آن‌گاه $p(A)$ خودالحاق بوده و

$$\|p(A)\| = \max\{|p(\lambda)| \;:\; \lambda \in \mathsf{sp}(A)\}\,. \tag{۲.۱}$$

تبصره ۱. هرگاه $A \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ و $p \in \mathcal{P}$، آن‌گاه

(الف) عملگر $p(A)$ معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر $\lambda \in \mathsf{sp}(A)$، $p(\lambda) \neq 0$؛

(ب) هرگاه $p(A)$ معکوس‌پذیر باشد، آن‌گاه

$$\mathsf{sp}\left(p(A)^{-1}\right) = \left\{p(\lambda)^{-1} \ : \ \lambda \in \mathsf{sp}(A)\right\} .$$

فرض کنید A عملگری خودالحاق روی فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ باشد. برای هر تابع f تعریف شده روی $\mathbb{R}$، قرار می‌دهیم

$$\|f\|_A = \sup\{|f(\lambda)| \ : \ \lambda \in \mathsf{sp}(A)\} .$$

هرگاه f پیوسته باشد، بویژه اگر f یک چندجمله‌ای باشد، آن‌گاه سوپریمم روی نقاط مجموعه فشرده $\mathsf{sp}(A)$ گرفته شده است. بنابراین، سوپریمم می‌تواند به صورت ماکزیمم نوشته شود و فرمول (۲.۱) می‌تواند به شکل $\|f(A)\| = \|f\|_A$ نوشته شود.

جبر همه توابع پیوسته مختلط تعریف شده روی $\mathbb{R}$ را با $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ نشان می‌دهیم. نتایج اساسی زیر برای حساب تابعی پیوسته برقرار است:

قضیه ۴.۱. [۲۸، ص. ۲۳۲] *هرگاه A عملگر خودالحاق کراندار روی فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ باشد و $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$، آن‌گاه عملگر یکتای $f(A) \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ با خاصیت زیر وجود دارد: هرگاه $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}$ بطوری که $\lim_{n\to\infty} \|f-p_n\|_A = 0$، آن‌گاه $f(A) = \lim_{n\to\infty} p_n(A)$. نگاشت $f \to f(A)$ یک همریختی از جبر $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ به $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ با خواص اضافه $[f(A)]^* = \overline{f}(A)$ و $\|f(A)\| \leq 2\|f\|_A$ می‌باشد. علاوه بر این، $f(A)$ یک عملگر نرمال می‌باشد؛ یعنی $[f(A)]^*f(A) = f(A)[f(A)]^*$. هرگاه f حقیقی مقدار باشد، آن‌گاه $f(A)$ خودالحاق می‌باشد.*

مثال. هرگاه $A \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ خودالحاق باشد و $t \in \mathbb{R}$,$f(t) = e^{it}$، آن‌گاه

$$e^{iA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(iA)^n .$$

علاوه بر این، e^{iA} عملگر یکانی است و معکوس آن عبارتست از عملگر

$$\left(e^{iA}\right)^* = e^{-iA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-iA)^n .$$

مثال. فرض کنیم $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$، $A \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ خودالحاق و $f(t) = \frac{1}{t-\lambda} \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. در نتیجه، $f(A) = (A - \lambda 1_{\mathscr{H}})^{-1}$.

هرگاه توابع $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ و $A \in \mathcal{B}_h(\mathscr{H})$ داده شده باشند، آن‌گاه خاصیت جابجایی $f(A)g(A) = g(A)f(A)$ را بدست می‌آوریم. این خاصیت می‌تواند برای عملگرهای دیگر به صورت زیر توسعه داده شود، برای مثال [۲۸، ص. ۲۳۵] را ببینید:

قضیه ۵.۱. *فرض کنیم $A \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ و تابع $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ داده شده باشد و فرض کنیم عملگر $B \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ در $AB = BA$ صدق کند. در این صورت $f(A)B = Bf(A)$.*

نتیجه بعدی توسیع قضیه ۲.۱ به توابع پیوسته می‌باشد، برای مثال [۲۸، ص. ۲۳۵] را ببینید:

قضیه ۶.۱. *هرگاه $A \in \mathcal{B}_h(\mathscr{H})$ و $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$، آن‌گاه*

$$\mathsf{sp}(f(A)) = f(\mathsf{sp}(A)) .$$

نتیجه زیر از قضیه ۶.۱ بدست می‌آید:

نتیجه ۷.۱. *با مفروضات قضیه ۶.۱ داریم:*

(الف) عملگر $f(A)$ *خودالحاق است اگر و تنها اگر برای هر* $\lambda \in \mathsf{sp}(A)$، $f(\lambda) \in \mathbb{R}$؛

(ب) عملگر $f(A)$ *یکانی است اگر و تنها اگر برای هر* $\lambda \in \mathsf{sp}(A)$، $|f(\lambda)| = ۱$؛

(ج) عملگر $f(A)$ *معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر* $\lambda \in \mathsf{sp}(A)$، $f(\lambda) \neq ۰$؛

(د) *هرگاه* $f(A)$ *خودالحاق باشد، آن‌گاه* $\|f(A)\| = \|f\|_A$.

قضیه زیر، بیان می‌کند که ترتیب برای توابع حقیقی، برای توابع از عملگرهای خودالحاق را نیز حفظ می‌کند.

قضیه ۸.۱. [۲۸، ص. ۲۴۰] *فرض کنیم که* $A \in \mathcal{B}_h(\mathscr{H})$. *همریختی* $\varphi \to \varphi(A)$ *از* $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ *به* $\mathcal{B}(\mathscr{H})$ *حافظ ترتیب است؛ یعنی، هرگاه* $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ *روی* $\mathsf{sp}(A)$ *حقیقی مقدار باشند و برای هر* $t \in \mathsf{sp}(A)$، $f(t) \geq g(t)$، *آن‌گاه در ترتیب عملگری* $\mathcal{B}(\mathscr{H})$

$$f(A) \geq g(A)\,.$$

قضیه ۹.۱. [۲۸، ص. ۲۴۰] *هرگاه عملگر* $A \in \mathcal{B}_+(\mathscr{H})$ *خودالحاق باشد، آن‌گاه عملگر خودالحاق مثبت منحصربفرد* $B := \sqrt{A} \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ *چنان موجود است که* $B^۲ = A$. *هرگاه* A *وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه* B *نیز چنین است.*

عملگر B در قضیه ۹.۱ ریشه‌ی دوم عملگر مثبت کراندار خودالحاق A روی $\mathscr{H}$ نامیده می‌شود.

هرگاه $A \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$، آن‌گاه عملگر A^*A مثبت و خودالحاق است. *قدر مطلق* عملگر را با $|A| := \sqrt{A^*A}$ تعریف می‌کنیم.

۴.۱ نامساوی‌های نوع ینسن

در این بخش، نامساوی‌های نوع ینسن را برای توابع محدب عملگری بیان می‌کنیم. ابتدا نامساوی کلاسیک ینسن متناظر با یک تابع محدب را بیان می‌کنیم:

اگر f یک تابع محدب حقیقی مقدار روی بازه $[m,M]$ باشد، آن‌گاه برای هر $x_1,\cdots,x_n \in [m,M]$ و برای همه اعداد حقیقی $t_1,\cdots,t_n$ با $\sum_{j=1}^{n} t_j = 1$، خواهیم داشت

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} t_j x_j\right) \le \sum_{j=1}^{n} t_j f(x_j)\,. \tag{۳.۱}$$

حال (۳.۱) را با استفاده از ماتریس‌های مناسب دوباره نویسی می‌کنیم. اگر قرار دهیم

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & x_n \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad x = \begin{pmatrix} \sqrt{t_1} \\ \vdots \\ \sqrt{t_n} \end{pmatrix},$$

آن‌گاه نامساوی کلاسیک ینسن (۳.۱) برای هر بردار واحد x به صورت زیر خواهد شد

$$f\big(\langle Ax,x\rangle\big) \le \langle f(A)x,x\rangle\ .$$

قضیه زیر یک صورت عملگری از نامساوی کلاسیک ینسن می‌باشد.

قضیه ۱۰.۱. [۲۴] *فرض کنیم $A \in \mathcal{B}_h(\mathscr{H})$ یک عملگر خود الحاق با $\mathrm{sp}(A) \subset [m,M]$ برای اسکالرهای $m < M$ باشد. اگر f تابعی محدب و پیوسته روی $[m,M]$ باشد، آن‌گاه برای هر بردار*

واحد $x \in \mathscr{H}$

$$f\big(\langle Ax, x\rangle\big) \leq \langle f(A)x, x\rangle \ . \tag{۴.۱}$$

قضیه زیر یک صورت عملگری چندتایی از قضیه ۱۰.۱ می‌باشد.

قضیه ۱۱.۱. [۲۴] *فرض کنیم* $A_j \in \mathcal{B}_h(\mathscr{H})$ *عملگرهای خودالحاقی با* $\mathrm{sp}(A_j) \subset [m, M]$ $(j = 1, \cdots, n)$ *برای اسکالرهای* $m < M$ *باشند. فرض کنیم* $x_1, \cdots, x_n \in \mathscr{H}$ *هر تعداد متناهی از بردارهایی باشند که* $\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2 = 1$. *اگر* f *یک تابع محدب و پیوسته روی* $[m, M]$ *باشد، آن‌گاه*

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} \langle A_j x_j, x_j\rangle\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \langle f(A_j)x_j, x_j\rangle \ . \tag{۵.۱}$$

همچنین یک حالت خاص از قضیه ۱۱.۱، نامساوی هولدر-مک‌کارتی است که به صورت زیر می‌باشد.

قضیه ۱۲.۱ (هولدر-مک‌کارتی). [۲۴] *فرض کنیم* $A \in \mathcal{B}_h(\mathscr{H})$ *عملگر مثبتی روی فضای هیلبرت* $\mathscr{H}$ *باشد. آن‌گاه*

۱. *برای هر* $r > 1$ *و هر بردار واحد* $x \in \mathscr{H}$

$$\langle A^r x, x\rangle \geq \langle Ax, x\rangle^r \ .$$

۲. برای هر $0 < r < 1$ و هر بردار واحد $x \in \mathscr{H}$

$$\langle A^r x, x\rangle \le \langle Ax, x\rangle^r \ .$$

۳. اگر A معکوس‌پذیر باشد، آن‌گاه برای هر $r < 0$ و هر بردار واحد $x \in \mathscr{H}$

$$\langle A^r x, x\rangle \ge \langle Ax, x\rangle^r \ .$$

۵.۱ توابع یکنوای عملگری و محدب عملگری

در این بخش، توابع محدب عملگری و یکنوای عملگری را تعریف کرده و سپس صورت عملگری دیگری از نامساوی کلاسیک ینسن (۳.۱) را بیان می‌کنیم. شکل ماتریس را دوباره به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

اگر قرار دهیم

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & x_n \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad V = \begin{pmatrix} \sqrt{t_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ \sqrt{t_n} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

آن‌گاه نامساوی کلاسیک ینسن به صورت زیر تبدیل خواهد شد

$$f(V^*AV) \le V^* f(A) V \, .$$

ابتدا، تعریف زیر را در نظر می‌گیریم.