بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

۹۳۲۵۲۳۳۸

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

گرایش جبر

عنوان

نمایش بولی BCK-جبرهای کراندار

استاد راهنما:

دکتر حبیب حریزاوی

استاد مشاور:

دکتر جمال هاشمی

نگارنده:

سارا تقوافر

بهمن ۱۳۹۳

باسمه تعالی

دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشکده‌ی ریاضی

(نتیجه‌ی ارزشیابی پایان‌نامه کارشناسی ارشد)

پایان‌نامه‌ی خانم **سارا تقوافر** دانشجوی رشته‌ی: **ریاضی محض** گرایش: **جبر**
دانشکده‌ی **ریاضی و علوم کامپیوتر** به شماره دانشجویی ۹۱۲۵۲۰۶

با عنوان:

نمایش بولی BCK-جبرهای کراندار

جهت اخذ مدرک: کارشناسی ارشد در تاریخ: ۱۳۹۳/۱۱/۴ **توسط هیأت داوران مورد ارزشیابی قرار گرفت و با درجه‌ی عالی تصویب گردید.**

اعضای هیأت داوران:	رتبه‌ی علمی	امضا
۱. استاد راهنما: دکتر حبیب حریزاوی	استادیار	
۲. استاد مشاور: دکتر جمال هاشمی	استادیار	
۳. استاد داور اول: دکتر منیره پیمان	استادیار	
۴. استاد داور دوم: دکتر محسن قریشی	استادیار	
۵. نماینده‌ی تحصیلات تکمیلی: دکتر مهدی جلالوند	استادیار	
۶. مدیر گروه: دکتر علی رضایی علی آباد	دانشیار	
۷. معاون پژوهشی و تحصیلات تکمیلی: دکتر مهرداد نامداری	استادیار	
۸. مدیر تحصیلات تکمیلی دانشگاه: دکتر عبدالرحمن راسخ	استاد	

تقدیم به

روح پاک پدرم که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه ی زندگی، ایستادگی را تجربه نمایم

به مادرم، دریای بی کران فداکاری و عشق که وجودم برایش همه رنج است و وجودش برایم همه مهر

و به همسر مهربانم که مسیح وار با صبرش در تمامی لحظات رفیق راه من بوده

و به گل نازم که کودکی گمشده ام را در چهره ی معصومش پیدا کردم.

سپاس‌گزاری...

سپاس ایزد منان که بر من منت نهاد تا در وادی علم و اندیشه گام بردارم و بی شک اگر لطف و عنایت ذات مقدسش نبود هرگز موفق به دستیابی این مرحله از دانش نمی‌شدم.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر حبیب حریزاوی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از مشاور مهربانم جناب آقای دکتر جمال هاشمی که در تکمیل این پایان‌نامه مرا مساعدت نمودند، کمال امتنان را دارم.

همچنین بر خود لازم می‌دانم که از راهنمایی‌های تمامی اساتید ارجمندم در طول سال‌های تحصیلی، همکلاسی‌های عزیزم و خانواده‌ی فداکار و مهربانم که مشوق آموختنم بوده‌اند، سپاسگزاری نمایم.

سارا تقوافر

بهمن ۱۳۹۳

فهرست مطالب

فهرست مطالب آ

چکیده پ

پیشگفتار ت

۱ نظریه‌ی عمومی ۱

۱.۱ تعاریف و مقدمات BCI ۲

۲.۱ BCK-جبر ۱۲

۳.۱ فیلترها و فیلترهای تولید شده توسط یک مجموعه ۱۹

۴.۱ همنهشتی‌ها و جبرهای خارج‌قسمتی ۲۹

۵.۱ BCK-جبرهای زیرمستقیماً تحویل‌ناپذیر ۳۵

۲ نمایش بولی BCK-جبرهای کراندار ۴۰

۱.۲ تعاریف و مقدمات ۴۱

۱.۱.۲ BCK-جبرهای کراندار ۴۹

۲.۲ مرکز بولی در BCK-جبرهای کراندار ۵۸

۳.۲ ساختار بولی BCK-جبرهای کراندار ۶۹

۴.۲ نمایش بولی و پیرس BCK-جبرهای کراندار ۸۰

۵.۲ نمایش پیرس با ساقه‌های مستقیماً تحویل‌ناپذیر ۸۶

۶.۲ نمایش‌پذیر پیرس تحویل‌ناپذیر متناهیاً زیرمستقیم و BCK-جبرهای ساده به عنوان ساقه‌ها ۹۱

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۱۰۱

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۱۰۶

کتاب‌نامه ۱۱۱

چکیده

نام خانوادگی: تقوافر	**نام:** سارا	**شماره دانشجویی:** ۹۱۲۵۲۰۶
عنوان پایان‌نامه: نمایش بولی BCK-جبرهای کراندار		
استاد راهنما: دکتر حبیب حریزاوی		
استاد مشاور: دکتر جمال هاشمی		
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد	**رشته:** ریاضی محض	**گرایش:** جبر
دانشگاه: شهید چمران اهواز	**دانشکده:** علوم ریاضی و کامپیوتر	**گروه:** ریاضی
تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۳/۱۱/۴		**تعداد صفحه:** ۱۱۶
واژه‌های کلیدی: BCK-جبرهای کراندار، عناصر عامل بولی، حاصل‌ضرب بولی ضعیف، BCK-نمایش پیرس		

چکیده: در این پایان‌نامه، مرکز بولی و ساختار بولی از BCK−جبرهای کراندار را تعریف نموده و توسط ساختار بولی، نمایشی از BCK−جبرهای کراندار که نمایش پیرس $b\mathbb{BCK}$ (ضعیف) به عنوان حاصل‌ضرب بولی از BCK−جبرهای کراندار نامیده می‌شوند را ارائه می‌دهیم. همچنین رده‌هایی که ساقه‌هایشان در این نمایش‌ها مستقیماً یا زیرمستقیماً تحویل‌ناپذیر و یا جبرهای ساده هستند را تجزیه و تحلیل می‌نماییم و برای روشن ساختن نتایج، تعدادی مثال از جبرها و زیر واریته‌های نسبی از BCK−جبرهای کراندار را ارائه می‌دهیم.

پیشگفتار

یک وظیفه‌ی مهم هوش مصنوعی ساختن رایانه‌هایی همانند انسان در اندازه‌های مشخص و نامشخص اطلاعات است. به خوبی می‌دانیم که پردازش اطلاعات مشخص، مخصوصاً مبنای نتایج روی اطلاعات مشخص، اساسی بر روی دو ارزش سنتی منطق است. در جهت دقیق و کامل اصل منطقی (منطق سنتی) به دست آوردن نتایجی درباره‌ی اطلاعات مشخص می‌تواند با سطوح اطمینان بالا انجام شود. بنابراین به صورت طبیعی و ضروری برای ثابت کردن این‌که دستگاه منطقی گویا همانند اصل منطقی برای پردازش اطلاعات نامشخص است، تلاش می‌کند. آشکار است که این نمونه‌ی منطقی نمی‌تواند دو ارزش منطقی خودش باشد، اما توانایی تشکیل یک بسط مشخص، دو ارزش منطقی را دارد.

پس نمونه‌های مختلف دستگاه‌های منطقی غیر سنتی باید به طور گسترده در امر تشکیل طبیعی و اندازه‌گیری دستگاه‌های استنباط مؤثر نامشخص مورد بررسی قرار گیرد. جبرهای BCK و BCI دو کلاس از جبرهای منطق بودند که در سال ۱۹۶۶ توسط ایسکی [۱] به منظور ارائه‌ی ساختار منطقی جبری برای BCK–منطق معرفی شدند و

[۱] Iseki

توسط پژوهشگران مختلف از جمله بلوک [۲] و رافتری [۳] در سال ۱۹۹۵ و سیگنولی [۴] و تورنس [۵] در سال ۲۰۰۲ گسترش یافتند. ایسکی در سال ۱۹۷۶ نشان داد که BCK–جبرهای کراندار به عنوان BCK–جبرهای با ثابت اضافی $\perp$ به عنوان کران پایین با یک سری اصول موضوعی ساده بیان می‌شوند. بیگلو [۶] و بوریس [۷] در سال ۱۹۹۰ نشان دادند که همنهشتی واریته‌های توزیع‌پذیر، خاصیت عامل همنهشتی بولی را دارند بدین معنا که عامل همنهشتی از عناصر جبر بولی است و به عنوان حاصل‌ضرب بولی ضعیف از جبرها در واریته‌ها نمایش داده می‌شود و یکریختی دسته‌های جهانی از بافه‌های بولی، بافه‌ی پیرس نامیده می‌شود. بیگلو و بوریس در سال ۱۹۹۰ و سانکاپاناور [۸] در سال ۱۹۸۱، رده‌ای از BCK–جبرهای کراندار که واریته نیستند، اما همنهشتی نسبی از شبه واریته‌های توزیع‌پذیر هستند را مطالعه کردند. هدف اصلی، مطالعه‌ی نمایشی از BCK–جبرهای کراندار به عنوان حاصل‌ضرب بولی ضعیف از BCK–جبرها بوده است. در این پایان‌نامه نشان داده می‌شود که هر BCK–جبر کراندار $\mathcal{A}$، عامل همنهشتی برای BCK–همنهشتی است و شکلی از جبرهای بولی است که $\mathcal{A}$ ویژگی عامل همنهشتی BCK–بولی نسبی را دارد. برای مشاهده‌ی این موضوع نشان داده می‌شود که در BCK–جبرها، عامل همنهشتی با عناصری از جبرها شناخته می‌شوند که عناصر عامل نامیده می‌شوند. همچنین مجموعه‌ی $B_F(\mathcal{A})$ مجموعه‌ی جهانی از زیرجبرهای $B_F(\mathcal{A})$

[۲] Blok

[۳] Raftery

[۴] Cignoli

[۵] Torrens

[۶] Bigelow

[۷] Burris

[۸] Sankappanavar

است و استخوان‌بندی بولی به حساب می‌آید. جبر بولی $B_C(\mathcal{A})$ که زیرجبری از $\mathcal{A}$ است مرکز بولی گفته می‌شود. هر عنصر $a \in B_C(\mathcal{A})$ یک عنصر بولی می‌باشد. عضوی از $\mathcal{A}$ که به عنوان فیلتر استلزامی تولید شده در مشبکه‌ی توزیع‌پذیر از i–فیلترها متمم شده است، فیلتر استلزامی تولید شده توسط $\neg a$ است. همچنین نتیجه‌ی اصلی نمایش‌پذیری هر BCK–جبر کراندار ارائه داده می‌شود که هر BCK–جبر کراندار، یک نمایش بولی ضعیف برای هر زیرجبر از $B_F(\mathcal{A})$ را می‌پذیرد. نمایش بولی ضعیف داده شده توسط $B_F(\mathcal{A})$ نمایش پیرس ضعیف نامیده می‌شود. همچنین شرط هم‌ارز که هرگاه جبر حاصل‌ضرب بولی یا نمایش‌پذیر پیرس، نمایش‌پذیر باشد، بافه‌ی پیرس هاسدورف است، به دست آورده می‌شود. زیرواریته‌های BCK–جبر کراندار یا زیر شبه واریته‌های تعریف شده توسط همانی جمعی که عناصرش ساقه‌های مستقیماً تحویل‌ناپذیری در نمایش پیرس ضعیفشان دارند تجزیه و تحلیل می‌شود. همچنین BCK–جبرهایی که در نمایش پیرسشان ساقه‌ی زیرمستقیم متناهیاً تحویل‌ناپذیر یا ساده هستند، مشخص می‌شوند و توصیفی از زیرواریته‌های نسبی که همه‌ی عناصرشان ابر ارشمیدسی یا نمایش‌پذیر پیرس با جبرهای ساده به عنوان ساقه هستند، شرح داده می‌شوند.

فصل ۱

نظریه‌ی عمومی

مقدمه

در این فصل که شامل پنج بخش می‌باشد به بیان و بررسی تعاریف و خواص کلی جبرهای BCI و BCK می‌پردازیم. در سه بخش اول، خواص کلی جبرهای BCI و BCK بیان می‌شوند. در بخش چهارم، همنهشتی‌ها و جبرهای خارج‌قسمتی معرفی می‌شوند و روابط آن‌ها با جبرهای BCI مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش پنجم، به BCK–جبرهای زیرمستقیماً تحویل‌ناپذیر می‌پردازیم.

۱.۱ تعاریف و مقدمات BCI

تعریف ۱.۱.۱. جبر $(X,\to,\top)$ از نوع $(۲,۰)$ که در آن "$\to$" یک عمل دوتایی روی X و "$\top$" عنصر ثابتی از X است را یک BCI–جبر گوییم، هرگاه برای هر x، y و z از X داشته باشیم:

$$\begin{cases} ۱-\mathrm{BCI}:\ (y\to z)\to((z\to x)\to(y\to x))=\top \\ ۲-\mathrm{BCI}:\ \top\to x=x \\ ۳-\mathrm{BCI}:\ y\to x=\top \quad , \quad x\to y=\top\Rightarrow x=y \end{cases}$$

تعریف ۲.۱.۱. برای هر x و y از X، گوییم $x\leq y$، اگر و تنها اگر $x\to y=\top$.

مثال ۳.۱.۱. فرض کنیم $(G,\top)$ یک گروه آبلی باشد. عمل "$\to$" روی G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\forall\, x,y\in G \quad , \quad y\to x=xy^{-۱}$$

در این صورت $(G,\to,\top)$ یک BCI–جبر است.

بررسی اصول موضوعه‌ی BCI:

$$\begin{aligned} ۱-\mathrm{BCI}:\ (y\to z)\to((z\to x)\to(y\to x)) &= (zy^{-۱})((xy^{-۱})(xz^{-۱})^{-۱})^{-۱} \\ &= (zy^{-۱})(xy^{-۱}x^{-۱}z)^{-۱} \\ &= zy^{-۱}yz^{-۱} \\ &= \top \end{aligned}$$

$$۲-\mathrm{BCI}:\ \top\to x=x\top^{-۱}=x$$

$$\text{۳} - \mathrm{BCI}: \; y \to x = \top \;,\; x \to y = \top \Rightarrow xy^{-۱} = \top \;,\; yx^{-۱} = \top \Rightarrow x = y.$$

قضیه ۴.۱.۱ (شرایط معادل BCI–جبر). فرض کنیم $(X, \to, \top)$ یک جبر از نوع $(۲,۰)$ باشد. در این صورت X یک BCI –جبر است، اگر و تنها اگر برای هر x، y و z از X شرایط زیر برقرار باشد:

(الف) $(y \to z) \to ((z \to x) \to (y \to x)) = \top;$

(ب) $y \to ((y \to x) \to x) = \top;$ (۱.۱)

(پ) $x \to x = \top;$ (۲.۱)

(ت) $x \to y = \top \;,\; y \to x = \top \Rightarrow x = y.$ (۳.۱)

برهان. فرض کنیم X یک BCI –جبر باشد. اگر در اصل موضوعه‌ی BCI − ۱، $y = \top$ و به جای z، y را قرار دهیم، داریم:

$$(\top \to y) \to ((y \to x) \to (\top \to x)) = \top$$

چون بنا بر اصل موضوعه‌ی BCI − ۲، $\top \to x = x$، بنابراین تساوی فوق ایجاب می‌کند که $\top \to y = y$. در نتیجه $y \to ((y \to x) \to x) = \top$. پس رابطه‌ی (ب) برقرار است. اگر در رابطه‌ی (ب)، $y = \top$ را قرار دهیم و اصل موضوعه‌ی BCI − ۲ را به کار گیریم، آن‌گاه $\top \to ((\top \to x) \to x) = \top$. لذا $\top \to (x \to x) = \top$ و از این رو $x \to x = \top$. بنابراین رابطه‌ی (پ) برقرار است. روابط (الف) و (ت) با توجه به تعریف جبر BCI برقرارند.

برعکس، فرض کنیم روابط (الف)، (ب)، (پ) و (ت) برقرار باشند. بنابراین کافی است درستی اصل موضوعه‌ی $\mathrm{BCI}-۲$؛ یعنی، $\top \to x = x$ را اثبات کنیم. در رابطه‌ی (ب)، عبارت $y = x$ را جایگزین می‌کنیم، در نتیجه $x \to ((x \to x) \to x) = \top$. پس بنا بر رابطه‌ی (پ)، داریم $x \to (\top \to x) = \top$. اگر در رابطه‌ی (ب)، $y = \top$ را جایگزین کنیم، به دست می‌آوریم

$$\top \to ((\top \to x) \to x) = \top \tag{۴.۱}$$

اگر در رابطه‌ی (الف)، به جای y عبارت $\top \to x$ و به جای z، x قرار دهیم، داریم:

$$((\top \to x) \to x) \to (\top \to ((\top \to x) \to x)) = \top$$

لذا

$$((\top \to x) \to x) \to \top = \top \tag{۵.۱}$$

از مقایسه‌ی روابط (۴.۱) و (۵.۱)، نتیجه می‌شود که $(\top \to x) \to x = \top$ و از این رو $\top \to x = x$. بنابراین X یک $\mathrm{BCI}-$جبر است. □

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم X یک $\mathrm{BCI}-$جبر باشد. X را یک $\mathrm{BCK}-$جبر می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $x \in X$، داشته باشیم:

$$۱-\mathrm{BCK}: \quad x \to \top = \top.$$

قضیه ۶.۱.۱. فرض کنیم $(X, \to, \top)$ یک BCI–جبر (BCK–جبر) باشد. در این صورت X همراه رابطه‌ی "$\leq$" تعریف شده به صورت زیر یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب است

$$\forall x, y \in X: \ x \leq y \Leftrightarrow x \to y = \top \tag{۶.۱}$$

برهان. نشان می‌دهیم رابطه‌ی "$\leq$" یک ترتیب جزئی است.

(۱) از آن‌جا که $x \to x = \top$، بنابراین $x \leq x$. در نتیجه "$\leq$" انعکاسی است.

(۲) فرض می‌کنیم $x \leq y$ و $y \leq x$. پس $x \to y = \top$ و $y \to x = \top$. لذا بنا بر اصل موضوعه‌ی BCI – ۳، $x = y$؛ یعنی، "$\leq$" پادمتقارن است.

(۳) فرض می‌کنیم $x \leq y$ و $y \leq z$. بنابراین $x \to y = \top$ و $y \to z = \top$. در نتیجه با توجه به $x = \top \to x$،

$$x \to z = \top \to (\top \to (x \to z))$$

$$= (y \to z) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = \top \qquad \text{بنا بر اصل موضوعه BCI – ۱}$$

پس $x \to z = \top$ و لذا $x \leq z$. بنابراین "$\leq$" متعدی است. □

تعریف ۷.۱.۱. ترتیب "$\leq$" تعریف شده در قضیه‌ی ۶.۱.۱ را یک BCI–ترتیب (BCK–ترتیب) می‌نامیم.

قضیه ۸.۱.۱. برای هر x، y و z متعلق به BCI–جبر (BCK–جبر) X داریم:

$$z \to (y \to x) = y \to (z \to x) \qquad \text{(قانون جابجایی).}$$

برهان. با توجه به خواص BCI داریم $z \leq (z \to x) \to x$. نامساوی اخیر را از سمت

چپ در $(y \to x)$ ضرب می‌کنیم، بنابراین

$$z \to (y \to x) \geq ((z \to x) \to x) \to (y \to x).$$

بنا بر $\mathrm{BCI}-۱$، معادل طرف راست را می‌نویسیم؛ یعنی،

$$((z \to x) \to x) \to (y \to x) \geq y \to (z \to x).$$

چون $\leq$ متعدی است، در نتیجه

$$z \to (y \to x) \geq y \to (z \to x) \tag{۷.۱}$$

با تعویض نقش y و z داریم

$$y \to (z \to x) \geq z \to (y \to x) \tag{۸.۱}$$

از روابط (۷.۱) و (۸.۱)، نتیجه می‌شود که $z \to (y \to x) = y \to (z \to x)$. $\square$

قضیه ۹.۱.۱ (خاصیت همنوا). فرض کنیم X یک $\mathrm{BCI}-$جبر ($\mathrm{BCK}-$جبر) باشد. در این صورت به ازای هر x، y و z از X داریم:

الف) اگر $x \leq y$، آن‌گاه $y \to z \leq x \to z$ (خاصیت آنتی‌تون)؛

ب) اگر $x \leq y$، آن‌گاه $z \to x \leq z \to y$ (خاصیت ایزوتون).

برهان. الف) از آن‌جا که $x \leq y$، بنابراین با توجه به قضیه‌ی ۶.۱.۱، $x \to y = \top$. در نتیجه بنا بر $\mathrm{BCI}-۱$ و قانون جابجایی، داریم $(x \to y) \to [(y \to z) \to (x \to z)] = \top$. پس $\top \to ((y \to z) \to (x \to z)) = \top$. لذا با توجه به اصل موضوعه‌ی $\mathrm{BCI}-۲$، به

دست می‌آوریم $\top = (y \to z) \to (x \to z) \to (y \to z)$. این ایجاب می‌کند که $y \to z \leq x \to z$.

ب) این قسمت نیز با استفاده از BCI − ۱ و قانون جابجایی و با تعویض x و y همانند بالا اثبات می‌شود. □

نکته ۱.۱.۱۰. اگر $x \leq \top$، آن‌گاه $x = \top$ (یعنی، $\top$ عنصر مینیمال است).

قضیه ۱.۱.۱۱. فرض کنیم X یک BCI −جبر (BCK −جبر) باشد. در این صورت به ازای هر x و y متعلق به X داریم:

الف) قانون جذب: $((y \to x) \to x) \to x = y \to x$؛

ب) قانون توزیع‌پذیری راست $\top$: $(y \to x) \to \top = (y \to \top) \to (x \to \top)$.

برهان. الف) داریم:

بنا بر قانون جابجایی $(y \to x) \to (((y \to x) \to x) \to x) = ((y \to x) \to x) \to ((y \to x) \to x)$

بنا بر $x \to x = \top$ $\qquad = \top$

بنابراین

$$(y \to x) \to (((y \to x) \to x) \to x) = \top \tag{۱.۹}$$

از طرفی

بنا بر BCI − ۱ $\qquad (((y \to x) \to x) \to x) \to (y \to x) \leq y \to ((y \to x) \to x) = \top$

در نتیجه

$$(((y \to x) \to x) \to x) \to (y \to x) = \top \tag{۱.۱۰}$$

از روابط (۹.۱) و (۱۰.۱) تساوی به دست می‌آید.

ب) داریم:

$$(y \to \top) \to (x \to \top) = (y \to \top) \to (x \to ((y \to x) \to (y \to x))) \qquad \text{بنا بر } x \to x = \top$$

$$= (y \to \top) \to [(y \to x) \to (x \to (y \to x))] \qquad \text{بنا بر قانون جابجایی}$$

$$= (y \to x) \to ((y \to \top) \to (x \to (y \to x))) \qquad \text{بنا بر قانون جابجایی}$$

$$= (y \to x) \to ((y \to \top) \to (y \to (x \to x))) \qquad \text{بنا بر قانون جابجایی}$$

$$= (y \to x) \to ((y \to \top) \to (y \to \top)) \qquad \text{بنا بر } x \to x = \top$$

$$= (y \to x) \to \top \qquad \text{بنا بر خاصیت انعکاسی}$$

$\square$

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنیم X یک BCI–جبر (BCK–جبر) باشد:

الف) عنصر $a \in X$ را مثبت می‌نامیم، هرگاه $a \to \top = \top$؛

ب) عنصر $a \in X$ را مینیمال می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $x \in X$، $a \to x = \top$ ایجاب کند $x = a$؛

پ) عنصر $a \in X$ را ماکسیمال می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $x \in X$، $x \to a = \top$ ایجاب کند $a = x$؛

ت) عنصر $a \in X$ را کوچکترین (بزرگترین) می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $x \in X$، $a \leq x$ ($x \leq a$).

مثال ۱۳.۱.۱. به ازای هر $x \in X$، عنصر $x \to ((x \to \top) \to \top)$ مثبت است.

برهان. داریم:

بنا بر توزیع‌پذیری چپ صفر $(((x \to \top) \to \top) \to x) \to \top = (((x \to \top) \to \top) \to \top) \to (x \to \top) \to (((x \to \top) \to \top) \to x))$

بنا بر قانون جذب $= (x \to \top) \to (x \to \top)$

بنا بر خاصیت انعکاسی $(x \to x = \top)$ $= \top$

$\square$

نکته ۱۴.۱.۱. $\top \in X$ عنصر مینیمال است، زیرا اگر $\top \to x = \top$ به ازای $x \in X$ای، آن‌گاه چون $\top \to x = x$، $x = \top$.

قضیه ۱۵.۱.۱ (شرایط معادل مینیمال). فرض کنیم X یک BCI–جبر باشد و $a \in X$. در این صورت شرایط زیر معادل‌اند:

الف) a مینیمال است؛

ب) $(a \to \top) \to \top = a$؛

پ) عنصر $x \in X$ وجود دارد که $a = x \to \top$.

برهان. (الف) $\Leftarrow$ (ب) فرض می‌کنیم a مینیمال باشد. داریم $a \to ((a \to \top) \to \top) = \top$. بنا بر خاصیت $y \to ((y \to x) \to x) = \top$، چون a مینیمال است، بنابراین تساوی اخیر ایجاب می‌کند که $(a \to \top) \to \top = a$.

(ب) $\Leftarrow$ (پ) فرض می‌کنیم $(a \to \top) \to \top = a$. با اختیار $x = a \to \top$ به دست می‌آوریم $x \to \top = a$.

(پ) $\Leftarrow$ (الف) فرض می‌کنیم $x \in X$ وجود داشته باشد که $x \to \top = a$. همچنین فرض