بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی محض گرایش جبر

جبرهای لی BC_N – مدرج به دست آمده ازنمایش های فرمیونیک

استادان راهنما:

دکتر ملیحه یوسف زاده

دکتر سعید اعظم

پژوهشگر:

نرگس شیخی

آذر ماه ۱۳۸۸

الحمدلله الّذی تحبّب علیّ و هو غنی عنّی

«سپاس خداوند را که خود را به ما شناسانید و شکر خویش را الهام فرمود و درهای معرفت را بر ما گشود که پروردگار خود را شناختیم و ما را به توحید خالص رهبری کرد و از انکار و شک دور داشت . . .

سپاسی که تا زنده باشیم از سپاسگزاران او باشیم و چون عمر به پایان رسد سوی رضا و عفو او بشتابیم . حمدی که تاریکی های عالم برزخ برای ما به سبب آن روشن گردد و راه رستاخیز را هموار سازد و جای ما را در موقف گواهان رفیع گرداند . . .

سپاس خداوند را که زیباترین صورت را برای ما برگزید و روزیهای پاک را برای ما مجری داشت و ما را بر همه آفریدگان برتری داد تا مالک آنها شدیم همه آفریدگان به قدرت او فرمانبر ما گشتند و به عزت او به سوی ما شتافتند . . .

سپاس خدای را که باب احتیاج را از همه سوی بر ما بست مگر به سوی خودش چگونه سپاس او توانیم و کی حق شکر او گذاریم . البته نتوانیم ! کی شکر او خواهیم گذاشت ؟»

"صحیفه سجادیه"

شایسته آن است که از اساتید مهربانم سرکار خانم دکتر یوسف زاده و جناب آقای دکتر اعظم که با صبر و بزرگ منشی یک استاد واقعی مرا در طول این مدت یاری کردند سپاسگزاری کنم . چگونه آموختن و چگونه آموزش دادن یکی از درس های بزرگی بود که من از این اساتید بزرگوار فرا گرفتم .

از خداوند بزرگ خیر و مسرّت حقیقی در لحظه لحظه ی زندگی شان را مسئلت می نمایم .

از جناب آقای دکتر رکنی زاده و دکتر سالاریان که زحمت بازخوانی و داوری این پایان نامه بر دوش ایشان بود کمال تشکر را دارم . همچنین از زحمات سرکار خانم ها گرامی، غازی، فرهمند و معمار که در تدوین این پایان نامه مرا یاری نموده اند سپاسگزارم .

از زیباترین گلهای باغ زندگیم

پدر و مادرم

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ی ایثار و به پاس از خودگذشتگیشان

به پاس عاطفه ی سرشار و گرما بخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است

به پاس قلب های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید

به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند

عاجزانه سپاسگزارم و سایه ی مهرشان بر زندگیم مستدام باد.

و در پایان از خواهران خوب و مهربانم ، فرشتگان زیبای صداقت که با پاکی کلام و رفتارشان بزم زندگیم را لبریز از شور و نشاط و دنیایم را عطرآگین نمودند صمیمانه و خالصانه تشکر و قدردانی مینمایم.

تقدیم به حضرت دوست

که هرچه دارم از اوست

و تقدیم به پیشگاه حجت زمان امام عصر(عج)

چکیده

در این پایان نامه ابتدا به معرفی جبرهای لی BC_N- مدرج می پردازیم. یـک جبـر لـي BC_N- مـدرج $\mathcal{L}$ داراي یـک زیرجبر ساده از بعد متناهی است. نشان می دهیم $\mathcal{L}$ به عنوان یک $\mathcal{G}$ –مدول کاملاً تحویل پـذیر اسـت و هـر مؤلفـه ی تحویل ناپذیر را به طور کامل مشخص مي کنیم. سپس با استفاده از نمایش های فرمیونیک، یک کلاس از جبرهای لـی BC_N– مدرج مختصاتی شده با چنبره های کوانتومی که توسیع مرکزی نابدیهی دارند، به دست می آورِیم .

واژه های کلیدی: جبرهای لی مدرج شده به وسیله ی سیستم های ریشه ی متناهی از نوع BC ، چنبره های کوانتومی، نمایش های فرمیونیک، توسیع مرکزی.

فهرست مطالب

پیشگفتار

اسپین از خاصیت‌های بنیادی ذرات ریز اتمی است که معادل کلاسیک ندارد و یک خاصیت کوانتومی به شمار می‌آید. از لحاظ ریاضی اسپین‌های گوناگون جنبه‌های نمایش یافته‌ی مختلف گروه $SU(2)$ می‌باشند. همانطور که ذره‌های بنیادی جرم و بار متفاوت دارند، اسپین متفاوت نیز دارند. اسپین هر ذره می‌تواند صفر یا هر عدد صحیح و نیم صحیح بزرگ‌تر از صفر باشد. به ذراتی که اسپین نیم صحیح دارند، یا به اصطلاح لازم است دو دور کامل بچرخند تا به وضعیت ابتدایی خویش بازگردند، به نام فیزیک‌دان ایتالیایی فرمی[۱]، فرمیون و به ذراتی که اسپین صحیح دارند، به نام فیزیکدان هندی بوز[۲]، بوزون می‌گویند. پس هر ذره‌ای که در جهان وجود دارد یا فرمیون است و یا بوزون.

ما از نمایش‌های فرمیونیک برای به‌دست آوردن یک کلاس از جبرهای لی BC_Nـمدرج مختصاتی‌شده با چنبره‌های کوانتومی، که توسیع مرکزی نابدیهی دارند، استفاده می‌کنیم. جبرهای لی مدرج شده توسط سیستم‌های ریشه‌ی متناهی کاهش یافته اولین بار به منظور مطالعه جبرهای ماتریسی مقطعی تعمیم یافته‌ی اسلودوی، توسط برمن[۳] و مودی[۴] [۷] معرفی شدند.

---

[۱] Fermi

[۲] Bose

[۳] Berman

[۴] Moody

برمن و مودی [۷] جبرهای لی مدرج شده توسط سیستم‌های ریشه از نوع A_l ($l \geqslant 2$)، D_l ($l \geqslant 4$)، E_6، E_7 و E_8 را با تقریب توسیع مرکزی، طبقه‌بندی کردند. همچنین بنکارت[۵] و زمانوف[۶] [۹] جبرهای لی مدرج شده توسط سیستم‌های ریشه از نوع B_l ($l \geqslant 2$)، C_l ($l \geqslant 3$)، F_4 و G_2 را با تقریب توسیع مرکزی طبقه‌بندی کردند. سپس نِهِر[۷] [۲۴] یک شیوه متفاوت برای همه سیستم‌های ریشه کاهش یافته به جز انواع E_8، F_4 و G_2 ارایه کرد. طبقه‌بندی این جبرها، نقشی اساسی در طبقه‌بندی جبرهای لی آفین تعمیم یافته که اخیراً مورد بررسی قرار گرفته‌اند، ایفا می‌کند. لازم به ذکر است که قبل از آن، ایده‌ی جبرهای لی مدرج شده به‌وسیله‌ی سیستم‌های ریشه در سال‌های ۱۹۶۲ و ۱۹۷۶ توسط تیتس[۸] [۲۷] و سلیگمن[۹] [۲۶] مطرح شده بود.

آلیسون[۱۰]، بنکارت و گائو[۱۱] [۲] به مطالعه‌ی توسیع مرکزی سیستم‌های ریشه‌ی کاهشی پرداختند.

همه جبرهای لی آفین کز—مودی به جز نوع $A_{2l}^{(2)}$ مثال‌هایی از جبرهای لی مدرج شده توسط سیستم‌های ریشه‌ی متناهی کاهش یافته هستند. به منظور طبقه بندی جبر های لی آفین تعمیم یافته‌ی ناکاهشی شامل جبرهای لی آفین پیچشی $A_{2l}^{(2)}$، آلیسون، بنکارت و گائو [۳] جبرهای لی مدرج شده توسط سیستم ریشه‌ی ناکاهشی BC_N را معرفی کردند. جبرهای لی BC_N- مدرج تنها در جبرهای لی آفین تعمیم یافته، شامل جبرهای لی آفین پیچشی ظاهر نمی شوند، بلکه در جبرهای لی ساده آیزوتروپیک با بعد متناهی نیز که توسط سلیگمن [۲۶] مطالعه شدند، ظاهر می‌گردند. جبرهای لی فرد سیمپلکتیک

[۵] Benkart

[۶] Zelmanov

[۷] Neher

[۸] Tits

[۹] Seligman

[۱۰] Allison

[۱۱] Gao

که توسط گلفاند[۱۲] – زلونسکی[۱۳] [۱۷] ، مالیاکاس[۱۴] [۲۱] و پروکتر[۱۵] [۲۵] مطالعه شدند، مثال‌های دیگری از جبرهای BC_N–مدرج هستند.

در مطالعه‌ی نمایش‌های فرمیونیک روی جبرهای BC_Nـمدرج جبرهای کیلیفرد نقش اساسی ایفا می‌کنند. جبرهای کیلیفرد (وایل) نمایش‌هایی طبیعی بر روی جبر خارجی (متقارن) چند جمله‌ای‌ها روی نیمی از مولدها دارند. این نمایش‌ها در کوانتوم و مکانیک آماری بسیار مهم می‌باشند. در واقع عملگرهای تولید کننده یا پوچ کننده‌ی ذرات به عنوان مولدها در نظر گرفته می‌شوند. نمایش‌های فرمیونیک برای جبرهای لی آفین کز–مودی اولین بار توسط فرنکل[۱۶] [۱۳] و نیز کز[۱۷] و پیترسون[۱۸] [۱۹] به طور مستقل مورد بررسی قرارگرفتند. فینگلد و فرنکل [۱۲] نمایش‌هایی را برای همه جبرهای لی آفین کلاسیک، با استفاده از جبرهای وایل یا کیلیفرد با تعدادی نامتناهی مولد، به‌طورساختاری ارایه کردند. سپس گائو [۱۶] نمایش‌هایی بوزونیک و فرمیونیک برای جبرهای لی آفین تعمیم یافته $\widehat{gl_N(\mathbb{C}_q)}$ که $\mathbb{C}_q$ یک چنبره کوانتومی دو متغیره است، به‌دست آورد. سپس لائو [۲۰] ساختار کلی‌تری را ارایه داد.

در این پایان نامه ما فرمیون‌هایی، وابسته به پارامتر q به‌دست می‌آوریم. سپس با استفاده از این فرمیون‌ها نمایش‌هایی برای بعضی از جبرهای لی BC_Nـمدرج مختصاتی‌شده با چنبره های کوانتومی که توسیع مرکزی نابدیهی دارند، به‌دست می‌آوریم. قابل ذکر است که چون یک جبر لی C_Nـمدرج، BC_Nـمدرج نیز می‌باشد، روش ارایه شده به طور مشابه برای جبرهای لی C_N– مدرج قابل استفاده است.

Gelfand[۱۲]

Zelevinsky[۱۳]

Maliakas[۱۴]

Proctor[۱۵]

Frenkel[۱۶]

Kac[۱۷]

Peterson[۱۸]

پس از آن مثال‌هایی از جبرهای لی BC_Nـمدرج که زیرجبرهایی از $\widehat{gl_{2N}(\mathbb{C}_q)}$ یا $\widehat{gl_{2N+1}(\mathbb{C}_q)}$ هستند، را بیان می‌کنیم. سپس با استفاده از جبرهای وایل یا کیلیفرد با تعداد نامتناهی مولد از فرمیون‌ها یا بوزون‌ها، نمایش‌هایی برای جبرهای لی BC_Nـمدرج بیان شده، به‌دست می‌آوریم. توجه به‌این نکته لازم است که اگر چه ما جبرهای لی BC_Nـمدرج با زیرجبرهای مدرج شده از نوع B_N و C_N و D_N را به‌دست می‌آوریم ولی این جبرها تنها یک دسته‌ی خاص از جبرهای لی BC_Nـمدرج به‌دست آمده توسط ساختار فرمیونیک هستند.

تعریف ۲.۱.۱ فضای برداری $\mathcal{L}$ روی میدان $\mathbb{F}$ را با عمل ضرب $[\cdot,\cdot] : \mathcal{L}\times\mathcal{L}\to\mathcal{L}$ (عمل براکت) یک جبر لی می‌نامیم هرگاه

الف) عمل $[\cdot,\cdot]$ دوخطی باشد.

ب) برای هر $x\in\mathcal{L}$، $[x,x]=\circ$.

ج) برای هر $x,y,z\in\mathcal{L}$ اتحاد $[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=\circ$ که به اتحاد ژاکوبی معروف است، برقرار باشد.

درصورتی که $\mathrm{char}\mathbb{F}\neq ۲$، دراین صورت شرط (ب) با شرط زیر هم‌ارز است

$$[x,y]=-[y,x].$$

اگر $\mathcal{L}$ یک فضای برداری با بعد متناهی باشد، $\mathcal{L}$ را یک جبرلی با بعد متناهی می‌گوییم.

تعریف ۳.۱.۱ **جبر لی نظیر به یک جبر شرکت‌پذیر**

فرض می‌کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر شرکت‌پذیر باشد، تعریف می‌کنیم $[\cdot,\cdot] : \mathcal{A}\times\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}$ را به طوری که برای هر $x,y\in\mathcal{A}$، $[x,y]=xy-yx$. $(\mathcal{A},[\cdot,\cdot])$ یک جبر لی است که با $\mathrm{Lie}(\mathcal{A})$ نشان داده می‌شود.

مثال ۴.۱.۱ $End(V)$ مجموعه‌ی تمام تبدیلات خطی از فضای برداری V با عمل براکت $[\varphi,\psi]=\varphi\psi-\psi\varphi$ برای $\psi,\varphi\in End(V)$ یک جبر لی است که با $\mathrm{Lie}(End_{\mathbb{F}}(V))$ یا $gl(V)$ نشان داده می‌شود.

به طور جزئی‌تر برای یک عدد صحیح مثبت N، $\mathrm{Lie}(M_N(\mathcal{A}))$ با عمل براکت $[A,B]=AB-BA$ برای هر $A,B\in(M_N(\mathcal{A}))$ یک جبر لی است که با $gl_N(\mathcal{A})$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۵.۱.۱ فرض می‌کنیم $\mathcal{L}$ یک جبر لی روی میدان $\mathbb{F}$ و I یک ایده‌آل از $\mathcal{L}$ باشد، در این صورت $\mathcal{L}/I$ همراه با عمل براکت $[x+I,y+I]=[x,y]+I$ یک جبر لی است که آن را جبر خارج‌قسمتی

می‌نامند.

در این پایان‌نامه، منظور از $\mathcal{L}$ یک جبر لی $\mathcal{L}$ بر روی میدان $\mathbb{F}$ می‌باشد.

تعریف ۶.۱.۱ الف) هرگاه S و T زیرفضاهایی از $\mathcal{L}$ باشند، منظور از $[\mathrm{S},\mathrm{T}]$ زیرفضای پدید آمده توسط عناصر $[x,y]$ که $x \in \mathrm{S}$ و $y \in \mathrm{T}$ می‌باشد.

ب) یک زیرفضای $\mathcal{H}$ از $\mathcal{L}$ را یک زیرجبر لی می‌گوییم هرگاه $[\mathcal{H},\mathcal{H}] \subseteq \mathcal{H}$.

ج) یک زیرفضای $\mathcal{A}$ از $\mathcal{L}$ را یک ایده‌آل از $\mathcal{L}$ می‌گوییم هرگاه $[\mathcal{A},\mathcal{L}] \subseteq \mathcal{A}$. به وضوح هر ایده‌آل یک زیرجبر است.

د) فرض می‌کنیم $\mathcal{L}'$ یک جبر لی باشد، نگاشت خطی $\varphi : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}'$ را یک همریختی از جبرهای لی می‌گوییم هرگاه برای هر x و y در $\mathcal{L}$ داشته باشیم

$$\varphi([x,y]) = [\varphi(x),\varphi(y)].$$

اگر $\ker(\varphi) = \{0\}$ همریختی φ را یک تکریختی می‌گوییم و اگر $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathcal{L}'$ همریختی φ را یک بروریختی می‌نامیم.

همریختی φ یکریختی است اگر φ تکریختی و بروریختی باشد.

ه) مجموعه‌ی تمام یکریختی‌های $\varphi : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ را با $\mathrm{Aut}(\mathcal{L})$ نمایش داده و هر عضو آن را یک خودریختی می‌نامیم.

تعریف ۷.۱.۱ فرض می‌کنیم $\mathcal{L}$ یک جبر لی باشد. منظور از یک مشتق $\mathcal{L}$، یک نگاشت خطی $D : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ است به طوری که برای هر $a,b \in \mathcal{L}$، $D([a,b]) = [D(a),b] + [a,D(b)]$.

مجموعه‌ی $Der(\mathcal{L})$ شامل تمام مشتقات D از $\mathcal{L}$، یک زیرجبر از $End(\mathcal{L})$ می‌باشد.

تعریف ۸.۱.۱ فرض می کنیم $(\mathcal{L}_1,[\cdot,\cdot]_1)$ و $(\mathcal{L}_2,[\cdot,\cdot]_2)$ دو جبر لی روی میدان $\mathbb{F}$ باشند.

برای هر $x_1, y_1 \in \mathcal{L}_1$ و $x_2, y_2 \in \mathcal{L}_2$ عمل ضرب روی $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$[x_1 + x_2, y_1 + y_2] = [x_1, y_1]_1 + [x_2, y_2]_2.$$

در این صورت $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ همراه با ضرب فوق یک جبر لی می‌باشد و آن را مجموع مستقیم از جبرهای لی $\mathcal{L}_1$ و $\mathcal{L}_2$ می نامیم.

تعریف ۹.۱.۱ جبر $\mathcal{L}$ را ساده می‌گوییم هرگاه $[\mathcal{L}, \mathcal{L}] \neq \{0\}$ و تنها ایده‌آل‌های آن $\{0\}$ و $\mathcal{L}$ باشند و نیم ساده می‌گوییم هرگاه مجموع مستقیمی از ایده‌آل‌های ساده باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱ مرکز جبر لی $\mathcal{L}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Z(\mathcal{L}) = \{x \in \mathcal{L} : [x, y] = 0 \quad \forall y \in \mathcal{L}\}.$$

تعریف ۱۱.۱.۱ الف) فرض می‌کنیم $\mathcal{L}$ یک جبر لی بر روی میدان $\mathbb{F}$ باشد، یک همریختی جبر لی $\pi : \mathcal{L} \longrightarrow gl(V)$ را یک نمایش از $\mathcal{L}$ بر روی فضای برداری V می‌نامیم.

ب) اگر $\pi : \mathcal{L} \longrightarrow gl(V)$ یک نمایش از جبر لی $\mathcal{L}$ بر روی فضای برداری V باشد، V را یک $\mathcal{L}$ـمدول می‌نامیم.

قرارداد. $\pi(x)(v)$ را با $x \cdot v$ نشان می‌دهیم.

از آنجایی که π یک همریختی از جبرهای لی است، برای هر $x, y \in \mathcal{L}$ و $v \in V$ داریم

$$[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v).$$

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض می‌کنیم V یک $\mathcal{L}$ـمدول و W زیرفضایی از V باشد، W را یک زیرمدول V گوییم اگر به ازای هر $x \in \mathcal{L}$ و $w \in W$، $x \cdot w \in W$ باشد.

تعریف ۱۳.۱.۱ الف) $\mathcal{L}$ـمدول V را تحویل‌ناپذیر می‌نامیم اگر هیچ زیرمدول سره‌ی نابدیهی نداشته باشد.

ب) $\mathcal{L}$ـمدول V را کاملاً تحویل‌پذیر می‌نامیم هرگاه V مجموع مستقیمی از $\mathcal{L}$ـمدول‌های تحویل‌ناپذیر باشد.

تعریف ۱۴.۱.۱ فرض می‌کنیم $\pi : \mathcal{L} \longrightarrow gl(V)$ و $\pi' : \mathcal{L} \longrightarrow gl(W)$ دو نمایش از جبر لی $\mathcal{L}$ باشند. یک همریختی $\mathcal{L}$ـمدولی از $\mathcal{L}$ـمدول V به W، یک نگاشت خطی $f : V \longrightarrow W$ است به طوری که برای هر $v \in V$،

$$\pi'(x)(f(v)) = f(\pi(x)v).$$

تعریف ۱۵.۱.۱ برای $x \in \mathcal{L}$، تعریف می‌کنیم $\mathrm{ad}x : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ که $\mathrm{ad}_x(y) = [x, y]$. همریختی $\mathrm{ad} : \mathcal{L} \longrightarrow End(\mathcal{L})$ که $x \mapsto \mathrm{ad}x$ یک نمایش است که آن را نمایش الحاقی می‌نامیم.

قضیه ۱۶.۱.۱ فرض می‌کنیم $\mathcal{L}$ یک جبر لی نیم ساده و $\pi : \mathcal{L} \longrightarrow gl(V)$ یک نمایش با بعد متناهی باشد. اگر W یک زیرمدول از V باشد، زیرمدول $W' \subset V$ وجود دارد به طوری که $V = W \oplus W'$.

اثبات. رجوع کنید به قضیه‌ی ۴.۴.۵ از مرجع [۱۵]. □

قضیه ۱۷.۱.۱ (**قضیه‌ی وایل**) فرض می‌کنیم $\mathcal{L}$ یک جبر لی نیم ساده از بعد متناهی و $\pi : \mathcal{L} \longrightarrow gl(V)$ یک نمایش با بعد متناهی باشد، در این صورت π کاملاً تحویل‌پذیر است.

اثبات. رجوع کنید به قضیه‌ی ۶.۳ از مرجع [۱۸] . □

تعریف ۱۸.۱.۱ اگر $(\cdot,\cdot) : \mathcal{L}\times\mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{F}$ یک فرم دوخطی باشد، در این صورت گوییم

الف) فرم روی $\mathcal{L}$ ناتباهیده است هرگاه $x \in \mathcal{L}$ و $(x,\mathcal{L}) = \{0\}$ ایجاب کند که $x = 0$.

ب) فرم روی $\mathcal{L}$ متقارن است هرگاه برای هر $x,y \in \mathcal{L}$، $(x,y) = (y,x)$.

ج) فرم روی $\mathcal{L}$ پایاست هرگاه برای هر $x,y,z \in \mathcal{L}$، $(x,[y,z]) = ([x,y],z)$.

د) فرم معین مثبت است هرگاه برای هر $x \neq 0$ در $\mathcal{L}$ داشته باشیم $(x,x) > 0$.

و) فرم نیمه معین مثبت است هرگاه برای هر $x \neq 0$ در $\mathcal{L}$ داشته باشیم $(x,x) \geqslant 0$.

تعریف ۱۹.۱.۱ فرض می‌کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر شرکت‌پذیر باشد، یک تبدیل خطی $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$، را یک برگشت می‌نامیم اگر در شرایط زیر صدق کند

الف) $f(a\cdot b) = f(b)\cdot f(a)$،

ب) $f^2 = id$.

تعریف ۲۰.۱.۱ فرض می‌کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ و G یک گروه آبلی باشد $\mathcal{A}$ را G–مدرج می‌گوییم هرگاه

الف) $\mathcal{A} = \bigoplus_{\alpha\in G} \mathcal{A}_\alpha$ جایی که به ازای هر $\alpha \in G$، $\mathcal{A}_\alpha$ یک زیرفضای $\mathcal{A}$ است.

ب) برای هر α و β در G، $\mathcal{A}_\alpha\mathcal{A}_\beta \subseteq \mathcal{A}_{\alpha+\beta}$.

اگر $\alpha \in G$، هر عنصر $x \in \mathcal{A}_\alpha$ را یک عنصر همگن از درجه α می‌نامیم.

تعریف ۲۱.۱.۱ فرض کنید X یک مجموعه باشد. جبر لی $\mathcal{L}$ را روی X آزاد گوییم هرگاه $X \subseteq \mathcal{L}$ و برای هر جبر لی دیگر $\mathcal{G}$ و هر نگاشت $f : X \longrightarrow \mathcal{G}$، همریختی (جبرهای لی) منحصر به فرد $f' : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{G}$، وجود داشته باشد به طوری که $f'i = f$ که i نگاشت شمول $i : X \longrightarrow \mathcal{L}$ است.

جبر لی آزاد روی X را با $\mathcal{F}(X)$ نمایش می‌دهیم و به راحتی می‌توان نشان داد که $\mathcal{F}(X)$ با تقریب یکریختی یکتاست.

تعریف ۲۲.۱.۱ فرض می‌کنیم X یک مجموعه و R زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{F}(X)$ باشند. $I(R)$ را ایده‌آل $\mathcal{F}(X)$ تولید شده توسط R در نظر می‌گیریم و $\mathcal{G} = \mathcal{F}(X)/I(R)$ را جبر لی تولید شده توسط X و روابط R می‌نامیم.

گزاره ۲۳.۱.۱ فرض می‌کنیم V یک فضای برداری و $\mathcal{S}$ مجموعه‌ای متناهی از عملگرهای خطی روی V باشد به طوری که برای هر $T, S \in \mathcal{S}$، $TS = ST$. اگر عناصر $\mathcal{S}$ قطری‌پذیر باشند، در این صورت عناصر $\mathcal{S}$ همزمان قطری شدنی هستند. در این حالت، V را می‌توان به صورت مجموعی مستقیم از فضاهای ویژه نوشت.

اثبات. فرض کنیم $S, T \in \mathcal{S}$ و $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ و $\{\mu_j\}_{j\in J}$ به ترتیب مجموعه‌ی مقادیر ویژه متمایز عملگرهای خطی T و S باشند.(I و J دو مجموعه اندیس هستند.)

برای هر $i \in I$ قرارمی‌دهیم $V_i = \ker(T-\lambda_i I)$ و برای هر $j \in J$ قرار می‌دهیم $W_j = \ker(S-\mu_j I)$. از آنجاکه T و S قطری‌پذیر هستند، داریم

$$V = \oplus_{i\in I} V_i$$

و

$$V = \oplus_{j\in J} W_j.$$

ادعا می‌کنیم که برای هر $i \in I$، زیرفضای V_i، تحت عملگر S پایاست. برای اثبات این ادعا فرض می‌کنیم $v \in V_i$، در این صورت چون $TS = ST$ داریم

$$T(S(v)) = S(T(v)) = S(\lambda_i v) = \lambda_i S(v)$$

و بنابراین

$$S(v) \in \ker(T - \lambda_i I) = V_i$$

و به همین ترتیب به ازای هر $j \in J$، زیرفضای W_j تحت عملگر T پایاست.

حال نشان می‌دهیم که به ازای هر $i \in I$ داریم $V_i = \oplus_{j\in J}(V_i \cap W_j)$. برای این منظور فرض می‌کنیم $v \in V_i$، چون $V_i \subset V$ و $V = \oplus_{j\in J} W_j$، برای هر $n \in \mathbb{N}$، زیرمجموعه‌ی $\{j_1, \ldots, j_n\} \subset J$ از اندیس‌ها وجود دارد به طوری که $v = w_{j_1} + \cdots + w_{j_n}$ که در آن برای هر $1 \leqslant k \leqslant n$، $w_{jk} \in W_{jk}$. چنانچه نشان دهیم به ازای هر $1 \leqslant k \leqslant n$، $w_{jk} \in V_i$، به تساوی مطلوب دست می‌یابیم.

چون $v \in V_i$، پس

$$\lambda_i w_{j_1} + \cdots + \lambda_i w_{j_n} = \lambda_i v = T(v) = T(w_{j_1}) + \cdots + T(w_{j_n})$$

و چون هر W_{jk}، $T-$ پایا می‌باشد، برای هر $1 \leqslant k \leqslant n$ داریم

$$T(w_{jk}) = \lambda_i w_{jk}.$$

بنابراین برای هر $1 \leqslant k \leqslant n$، $w_{jk} \in V_i$ و در نتیجه برای هر $i \in I$، $V_i = \oplus_{j\in J}(V_i \cap W_j)$

اما به ازای هر $i \in I$ و $j \in J$، $V_i \cap W_j$ زیرفضایی از V است و داریم

$$V = \oplus_{i\in I} \oplus_{j\in J} (V_i \cap W_j).$$

حال برای پایه‌ی B_{ij} از زیر فضای $V_i \cap W_j$، $T|_{V_i\cap W_j}$ و $S|_{V_i\cap W_j}$ نسبت به پایه‌ی B_{ij} قطری‌پذیر هستند، بنابراین $B = \cup_{i\in I, j\in J} B_{ij}$ پایه‌ای از V است که شامل بردارهای ویژه‌ی مشترک T و S می‌باشد و بنابراین T و S هم‌زمان قطری‌شدنی هستند. این مطلب را برای همه‌ی عملگرهای S تعمیم می‌دهیم و بنابراین حکم گزاره برقرار است. □