بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی محض گرایش جبر

گراف غیر دوري وابسته به یك گروه

استاد راهنما:

دکتر علی‌اکبر محمدی حسن‌آبادی

پژوهشگر:

بهاره فردناظمی

آبان‌ماه ۱۳۸۹

شیوه نگارش پایان نامه
رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر خانم بهاره فردناظمی

تحت عنوان:

گراف غیر دوری وابسته به یک گروه

در تاریخ ۸۹/۸/۸ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه عالی به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر علی اکبر محمدی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۲- استاد داور داخل گروه	دکتر علیرضا عبدالهی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۳- استاد داور خارج گروه	دکتر محمد جواد عطایی	با مرتبه علمی استادیار	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

گروه ریاضی دانشگاه اصفهان

در آغاز، حمد و سپاس خداوند را که همواره یاری رسانم بوده است تا بتوانم در این راه قدمی به سوی مطلوب بردارم و سپاس بی‌پایان از اساتید بزرگواری که طی این مسیر، بدون راهنمایی و مدد آنها ناممکن بود، جناب آقای دکتر علی‌اکبر محمدی که با دقت نظر و حوصله‌ی بی‌حد، راهنمایی دلسوز برایم بودند و این پژوهش بی شک، بدون مساعدت ایشان قابل انجام نبود و جناب آقای دکتر علیرضا عبداللهی که نظرات و راهنمایی‌های ایشان همیشه گره‌گشا و چاره‌ساز بود و نیز تمامی اساتیدی که در طی دوران تحصیل، سبب‌ساز پیشرفت اینجانب بوده‌اند.

از پدر و مادر مهربان و خانواده‌ی عزیزم که در تمامی دوران تحصیل، یاری‌رسان من بوده‌اند و همسر مهربانم که در مراحل مختلف این پژوهش، همراه و یاوری بی‌نظیر برایم بودند صمیمانه تقدیر و تشکر می‌نمایم.

در پایان، بر خود لازم می‌دانم که از تمام بزرگوارانی که در طول تحصیل و شکل‌گیری این رساله، مددرسانم بوده‌اند، تشکر نمایم.

تقدیم به:

پدر و مادرم

که سوختند تا مرا ساختند

دخترم

که تجلی‌گاه رحمت الهی و مرا معنی زندگی است

و

همسرم

که تجسم همت و اهتمام و گل خوشبوی آرزوهایم است.

چکیده

در این پایان‌نامه، قطر و عدد غلبه‌ی گراف‌های دوری و غیر دوری را بررسی می‌کنیم و گروه‌هایی را مشخص می‌کنیم که گراف غیر دوری وابسته به آن‌ها دارای عدد خوشه‌ای کوچک‌تر یا مساوی ۴ هستند. هم‌چنین گروه‌هایی که گراف غیر دوری وابسته به آن‌ها مسطح یا همیلتونی هستند، را دسته‌بندی می‌کنیم. اما هدف اصلی این پایان‌نامه، ارائه‌ی یک شرط کافی برای حل‌پذیری یک گروه است با اثبات این مطلب که گروه G حل‌پذیر است اگر عدد خوشه‌ای گراف غیر دوری وابسته به آن، کوچک‌تر از ۳۱ باشد. هم‌چنین عدد خوشه‌ای گراف غیر دوری وابسته به یک گروه غیر حل‌پذیر G برابر ۳۱ است اگر و تنها اگر گروه $G/Cyc(G)$ یک‌ریخت با گروه متقارن از درجه‌ی ۵ $(S5)$ یا گروه متناوب از درجه‌ی ۵ $(A5)$ باشد.

کلمات کلیدی: گراف غیر دوری، قطر، عدد غلبه، عدد خوشه‌ای، گروه حل‌پذیر.

فهرست مندرجات

مقدمه

یک گراف را می‌توان به طرق مختلف به یک گروه مربوط کرد؛ برای مثال عبداللهی و همکارانش در [۱]، برترام[۱] و همکارانش در [۶]، گرانوالد[۲] و همکارانش در [۱۱]، مقدم‌فر و همکارانش در [۱۲]، نویمن[۳] در [۱۳] و ویلیامز[۴] در [۲۱]، از روش‌های گوناگون به این کار پرداخته‌اند. هدف اصلی این کار، مطالعه‌ی ساختار گروه‌ها توسط خواص نظریه گرافی گراف‌های وابسته به آن گروه‌ها می‌باشد.

ما در این پایان‌نامه در ادامه‌ی کاری که عبداللهی و محمدی در [۲] انجام داده‌اند، یک گراف $\mathcal{C}_G$ (که آن را گراف غیردوری G می‌نامیم)، را به یک گروه غیرموضعاً دوری G به صورت زیر مربوط می‌کنیم:

مجموعه‌ی $G \setminus Cyc(G)$ را به عنوان مجموعه رئوس $\mathcal{C}_G$ در نظر می‌گیریم، جایی‌که $Cyc(G) = \{x \in G \mid \langle x, y \rangle$ برای هر $y \in G$، دوری است $\}$ دوری‌ساز G خوانده می‌شود، و دو رأس توسط یک یال به یکدیگر وصل می‌شوند اگر آن دو رأس با یکدیگر گروه دوری

Bertram[۱]

Grunewald[۲]

Neumann[۳]

Williams[۴]

تشکیل ندهند.

مکمل گراف $\mathcal{C}_G$ (که آن را گراف دوری G می‌نامیم)، دارای مجموعه رئوسی یکسان با مجموعه رئوس $\mathcal{C}_G$ است و دو رأس در آن به یکدیگر متصل می‌شوند اگر گروه تولید شده توسط آن دو رأس دوری باشد. گراف دوری G را با $\overline{\mathcal{C}_G}$ نشان می‌دهیم.

این پایان‌نامه شامل دو فصل است. در فصل اول که شامل سه بخش است، برخی مفاهیم مورد نیاز در نظریه گراف و هم‌چنین بعضی تعاریف و قضایای مورد نیاز در نظریه گروه را بیان می‌کنیم.

فصل دوم مشتمل بر چهار بخش است. در بخش اول، قطر و عدد غلبه‌ی گراف‌های دوری و غیردوری را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در بخش دوم، همه‌ی گروه‌هایی که گراف غیردوری آن‌ها عدد خوشه‌ای کوچک‌تر یا مساوی ۴ دارند، را مشخص می‌کنیم. در بخش سوم، به دسته‌بندی گروه‌هایی که گراف غیردوری آن‌ها مسطح یا همیلتونی هستند، می‌پردازیم. و بالاخره در بخش چهارم، یک شرط کافی برای حل‌پذیری یک گروه ارائه می‌دهیم به این صورت که ثابت می‌کنیم اگر $\omega(\mathcal{C}_G) < ۳۱$، آن‌گاه G حل‌پذیر است. هم‌چنین ثابت می‌کنیم که کران ۳۱، کوچک‌ترین کران بالاست و در واقع تساوی $\omega(\mathcal{C}_G) = ۳۱$ برای یک گروه غیرحل‌پذیر G برقرار است اگر و تنها اگر $G/Cyc(G) \cong S_5$ یا A_5، جایی‌که S_5 گروه متقارن از درجه‌ی ۵ و A_5 گروه متناوب از درجه‌ی ۵ است.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل برخی تعاریف و قضایای مقدماتی که در اثبات قضایای فصل بعد به‌کار می‌روند، بیان شده است. خواننده می‌تواند اثبات اکثر این قضایا را در کتاب‌های نظریه‌ی گروه‌ها پیدا کند. بنابراین از آوردن اثبات برخی از آن‌ها خودداری می‌کنیم و به اثبات قضایایی که عمومیت کم‌تری دارند، می‌پردازیم.

۱—۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی گروه

تعریف ۱—۱.۱ . فرض کنید G یک گروه باشد. مرکزساز[۱] یک عضو مانند $x \in G$ که آن را با $C_G(x)$ نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_G(x) = \{ \ y \in G \ \mid \ xy = yx \ \}$$

که زیرگروهی از گروه G است.

هم‌چنین برای یک زیر مجموعه‌ی ناتهی X از G ، مرکزساز X در G عبارت است از:

$$C_G(X) = \bigcap_{x \in X} C_G(x) = \{ \ y \in G \ \mid \ xy = yx \ \ \forall \ x \in X \ \}.$$

تعریف ۱—۲.۱ . در تعریف ۱—۱.۱ اگر $X = G$، آن‌گاه $C_G(G)$ را مرکز[۲] گروه G می‌گوییم و آن‌را با $Z(G)$ نشان می‌دهیم، یعنی مرکز گروه G عبارت است از:

$$Z(G) = \{ \ y \in G \ \mid \ \forall \ x \in G \ : \ xy = yx \ \}$$

که یک زیرگروه نرمال از گروه G است.

تعریف ۱—۳.۱ . فرض کنید G یک گروه باشد. جابه‌جاگر[۳] یک جفت مرتب g_1 و g_2 از عناصر گروه G که آن را با $[g_1, g_2]$ نشان می‌دهیم، عبارت است از:

$$[g_1, g_2] = g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2 \in G.$$

Centralizer[۱]

Center[۲]

Commutator[۳]

بنابراین طبق تعریف داریم:

الف) $[g_1, g_2] = [g_2, g_1]^{-1}$، و

ب) $1 = [g_1, g_2]$ اگر و تنها اگر g_1 و g_2 با یکدیگر جابه‌جا شوند، یعنی: $g_1 g_2 = g_2 g_1$.

تعریف ۱—۴.۱ . فرض کنید $H, K \subseteq G$. جابه‌جاگر H و K عبارت است از:

$$[H, K] = \langle\ [h, k]\ :\ h \in H\ ,\ k \in K\ \rangle \leq G\cdot$$

در حالت خاص زیرگروه $[G, G]$، تولید شده توسط تمام جابه‌جاگرهای موجود در G، که آن را با G' نشان می‌دهیم، زیرگروه مشتق[۴] (یا زیرگروه جابه‌جاگر) گروه G نامیده می‌شود و عبارت است از:

$$[G, G] = \langle\ [x, y]\ :\ x, y \in G\ \rangle$$

که یک زیرگروه نرمال در G است.

تعریف ۱—۵.۱ . فرض کنید G یک گروه باشد. دراین‌صورت G را موضعاً دوری[۵] گوییم اگر هر زیرگروه با تولید متناهی آن دوری باشد.

تعریف ۱—۶.۱ . یک گروه غیربدیهی G را ساده گویند اگر G شامل زیرگروه نرمال غیربدیهی نباشد.

تعریف ۱—۷.۱ . فرض کنید G یک گروه باشد و $x \in G$ عنصر دلخواهی از G باشد.

[۴] derived subgroup

[۵] Locally cyclic

دراین‌صورت دوری‌ساز[۶] x که آن را با $Cyc_G(x)$ نشان می‌دهیم عبارت است از:

$$Cyc_G(x) = \{\ y \in G \mid \exists t \in G \quad : \quad \langle x, y \rangle = \langle t \rangle\ \}$$

هم‌چنین برای یک زیر مجموعه‌ی ناتهی X از G ، دوری‌ساز X در G عبارت است از:

$$Cyc_G(X) = \bigcap_{x \in X} Cyc_G(x)\cdot$$

تعریف ۱—۸.۱ . در تعریف ۱—۷.۱ اگر $X = G$، آن‌گاه $Cyc_G(G)$ را دوری‌ساز گروه G می‌گوییم و آن را با $Cyc(G)$ نشان می‌دهیم، یعنی دوری‌ساز گروه G عبارت است از:

$$Cyc(G) = \{\ y \in G \mid \forall\ x \in G\ ,\ \exists\ t \in G \quad : \quad \langle x, y \rangle = \langle t \rangle\ \}$$

که یک زیرگروه موضعاً دوری از گروه G است.

تذکر ۱—۹.۱ . با توجه به [۱۶] در حالت کلی برای هر عنصر x از یک گروه دلخواه مانند G، $Cyc_G(x)$ لزوماً زیرگروهی از G نیست؛ برای مثال در گروه $G = \mathbb{Z}_۲ \oplus \mathbb{Z}_۴$ داریم:

$$Cyc_H((۰,۲)) = \{\ (۰,۰), (۰,۱), (۰,۲), (۰,۳), (۱,۱), (۱,۳)\ \}$$

که زیرگروهی از گروه G نیست.

تعریف ۱—۱۰.۱ . فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و ϖ یک مجموعه باشد. گوییم گروه G یک ϖ—گروه است اگر مجموعه‌ی ϖ حاوی تمام شمارنده‌های اول $|G|$ باشد.

---

[۶] Cyclicizer

بنابراین اگر G یک ϖ—گروه باشد، آن‌گاه همه‌ی زیرگروه‌ها و همه‌ی گروه‌های خارج قسمت گروه G نیز ϖ—گروه هستند.

در حالت خاص اگر $\varpi = \{p\}$ جایی‌که p یک عدد اول است، آن‌گاه یک ϖ—گروه را یک p—گروه می‌نامیم.

تعریف ۱—۱۱.۱ . گروه آبلی G را یک p —گروه آبلی مقدماتی[۷] گوییم اگر مرتبه‌ی همه‌ی عناصر غیربدیهی آن برابر p باشد.

قضیه ۱—۱۲.۱ (قضیه لاگرانژ[۸]). اگر G یک گروه و H زیرگروهی از آن باشد، آن‌گاه $|G| = |G : H| \cdot |H|$. اگر G متناهی باشد، آن‌گاه $|G : H| = |G|/|H|$.

بنابراین برای یک گروه متناهی، مرتبه‌ی یک زیرگروه همواره مرتبه‌ی گروه را می‌شمارد.

اثبات . ر. ک. به [[۱۷] صفحه‌ی ۱۱]. □

تعریف ۱—۱۳.۱ . فرض کنیم G یک گروه متناهی و p یک عدد اول باشد. اگر $|G| = p^a m$ جایی‌که $(p, m) = ۱$، آن‌گاه طبق قضیه‌ی لاگرانژ، یک p—زیرگروه از G نمی‌تواند دارای مرتبه‌ی بیش‌تر از p^a باشد.

یک p—زیرگروه از G که دارای بیش‌ترین مرتبه‌ی p^a است، را یک p—زیرگروه سیلو[۹] از G می‌نامیم.

---

[۷] Elementary abelian

[۸] Lagrange's theorem

[۹] Sylow p-subgroup

قضیه ۱—۱۴.۱ (قضیه سیلو[۱۰]). فرض کنید G یک گروه متناهی با مرتبه‌ی $p^{\alpha}m$ باشد جایی‌که p یک عدد اول باشد و عدد صحیح m را نشمارد. دراین‌صورت

(۱) G همواره شامل یک p—زیرگروه سیلو است.

(۲) اگر n_p تعداد p—زیرگروه‌های سیلو باشد، آن‌گاه $n_p \equiv ۱ \pmod p$ و هم‌چنین $n_p \mid m$.

(۳) تمام p—زیرگروه‌های سیلو در G مزدوجند.

اثبات . ر. ک. به [[۱۷] صفحه‌ی ۳۹]. □

تعریف ۱—۱۵.۱ . فرض کنیم G یک گروه آبلی باشد. عناصری با مرتبه‌ی توانی از یک عدد اول ثابت p که تشکیل یک زیرگروه می‌دهند را یک مؤلفه‌ی p—اولیه[۱۱] از G می‌نامیم و آن‌را با G_p نشان می‌دهیم.

تعریف ۱—۱۶.۱ . گروهی که مرتبه‌ی تمام عناصر آن متناهی باشد، گروه تابی[۱۲] (دوره‌ای[۱۳]) نامیده می‌شود.

از طرف دیگر گروهی که مرتبه‌ی همه‌ی عناصر غیربدیهی آن نامتناهی باشد گروه تاب‌آزاد[۱۴] (غیردوره‌ای[۱۵]) نامیده می‌شود.

تعریف ۱—۱۷.۱ . یک عنصر با مرتبه‌ی ۲ در یک گروه را، اغلب یک پیچش می‌نامیم.

[۱۰] Sylow's theorem

[۱۱] p-primary component

[۱۲] Torsion

[۱۳] Periodic

[۱۴] Torsion-free

[۱۵] Aperiodic

لم ۱—۱۸.۱ . فرض کنیم G یک گروه باشد و $x \in G$ و $\bar{G} = \frac{G}{Cyc(G)}$ و $\tilde{G} = \frac{G}{Z(G)}$، دراین‌صورت:

(۱) $\frac{Cyc_G(x)}{Cyc(G)} = Cyc_{\bar{G}}(xCyc(G))$.

(۲) $Cyc(\bar{G}) = ۱$.

(۳) $Cyc(\tilde{G}) = ۱$.

(۴) اگر G نه تابی و نه تاب‌آزاد باشد، آن‌گاه $Cyc(G) = ۱$.

(۵) اگر G یک گروه تاب‌آزاد باشد به‌طوری‌که $Cyc(G)$ یک گروه غیربدیهی باشد، آن‌گاه $Cyc(G) = Z(G)$.

به‌علاوه اگر $Z(G)$ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه G موضعاً دوری است.

اثبات . ر. ک. به [[۲] لم ۳.۲]. □

تعریف ۱—۱۹.۱ . اگر مرتبه‌ی تمام عناصر یک گروه متناهی و کران‌دار باشد، گروه را با نمای متناهی[۱۶] گوییم. نمای چنین گروهی عبارت است از کوچک‌ترین مضرب مشترک مرتبه‌ی عناصر گروه.

به‌وضوح یک گروه متناهی دارای نمای متناهی است و یک گروه با نمای متناهی یک گروه تابی است.

تذکر ۱—۲۰.۱ . نمای یک گروه تابی می‌تواند نامتناهی باشد $(\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۴ \times \cdots)$ و نمای یک گروه نامتناهی می‌تواند متناهی باشد $(\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲ \times \cdots)$.

تعریف ۱—۲۱.۱ . فرض کنید $H \leq G$. دراین‌صورت:

[۱۶] Finite exponent

(۱) منظور از یک سری بین H و G، یک دنباله‌ی متناهی از زیرگروه‌های G به صورت زیر است:

$$H = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq H_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_m = G \qquad (*)$$

(۲) منظور از یک سری برای گروه G، یک سری بین $\{e\}$ (زیرگروه بدیهی) و G است؛ یعنی:

$$\{e\} = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq H_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_m = G \qquad (**)$$

(۳) اگر در سری $(**)$ برای هر i $(0 \leq i \leq n)$، داشته باشیم $H_i \trianglelefteq G$، آن‌گاه سری را نرمال گوییم.

(۴) در سری $(**)$ به ازای هر i $(1 \leq i \leq m)$، $\frac{H_i}{H_{i-1}}$ را یک عامل از سری و تعداد عوامل غیربدیهی را طول سری می‌نامیم.

تعریف ۱−۱.۲۲ . (۱) یک عامل H/K از یک سری از G را یک عامل مرکزی G گوییم اگر $K \triangleleft G$ و هم‌چنین داشته باشیم $H/K \leq Z(G/K)$.

(۲) گروه G را پوچ‌توان[۱۷] گوییم اگر یک سری نرمال داشته باشد که همه‌ی عوامل آن مرکزی باشند. چنین سری را یک سری مرکزی می‌نامیم.

(۳) گروه G را حل‌پذیر[۱۸] گوییم اگر یک سری داشته باشد که همه‌ی عوامل آن آبلی باشند. چنین سری را یک سری آبلی می‌نامیم.

به‌وضوح هر گروه آبلی هم پوچ‌توان و هم حل‌پذیر است.

[۱۷] nilpotent

[۱۸] soluble

تذکر ۱—۱.۲۳ . دقت کنید که یک سری مرکزی لزوماً آبلی است ولی یک سری آبلی ممکن است مرکزی نباشد.

نتیجه ۱—۱.۲۴ . هر گروه ساده‌ی غیرآبلی حل‌پذیر نیست.

قضیه ۱—۱.۲۵ . هر زیرگروه و هر گروه خارج قسمت از یک گروه پوچ‌توان (حل‌پذیر)، نیز پوچ‌توان (حل‌پذیر) است.

اثبات . ر. ک. به [[۱۸] صفحه‌ی ۱۴۶]. □

تعریف ۱—۱.۲۶ . اگر H و K دو گروه باشند و G گروهی باشد که

$$\exists\, N \leq G \quad : \quad N \cong K\ ,\ G/N \cong H$$

آن‌گاه گویند که G یک توسیع از K توسط H است.

قضیه ۱—۱.۲۷ . فرض کنید $N \trianglelefteq G$. اگر N و G/N حل‌پذیر باشند، آن‌گاه G حل‌پذیر است. به عبارت دیگر خاصیت حل‌پذیری تحت توسیع بسته است.

اثبات . ر. ک. به [[۱۸] صفحه‌ی ۱۴۷]. □

تذکر ۱—۱.۲۸ . خاصیت پوچ‌توانی تحت توسیع بسته نیست. برای مثال فرض می‌کنیم $G = S_3$. حال زیرگروه $A_3 \trianglelefteq G$ را درنظر می‌گیریم؛ گروه‌های A_3 و G/A_3 آبلی و لذا پوچ‌توان هستند ولی گروه $G = A_3$ پوچ‌توان نیست.

نتیجه ۱—۱.۲۹ . اگر G یک گروه متناهی باشد، آن‌گاه بزرگ‌ترین زیرگروه نرمال حل‌پذیر (رادیکال حل‌پذیر) از G همواره موجود است.

اثبات . ر. ک. به [[۱۸] صفحه‌ی ۱۴۷]. □