بسم الله الرحمن الرحیم

از صد هزار پرده، برون کرده‌ای جمال

با صد هزار دیده، تماشا کنم تو را

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضیات و کاربردها

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی

مدل تپه شنی و بازی ریزش چیپ

استاد راهنما

دکتر اردشیر دولتی

استاد مشاور

دکتر بهنام زرپاک

نگارش

بهاره بخشایش

تیرماه ۱۳۹۰

تقدیر و تشکر

تقدیم به پدر و مادر مهربانم که تابش بی دریغ محبت هایشان در همه مراحل زندگی بهترین دلگرمی و وجوشش زلال حمایت هایشان در روزهای سخت زندگی گرانترین سرمایه من بوده است. و برای خواهر مهربان و عزیزتر از جانم، نهال.

با تشکر و تقدیر از راهنمائی های دلسوزانه استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر اردشیر دولتی و رهنمودهای استاد مشاور گرانقدر جناب آقای دکتر بهنام زرپاک که راه را برای به سرانجام رسیدن این پایان نامه هموار نمودند.

چکیده

مدل تپه شنی، یک مدل دینامیکی گسسته ساده است که در فیزیک برای مدل کردن پدیده خودسامان‌ده بحرانی، که برای توصیف رفتار سیستم‌های پیچیده توسط بک، تنگ و ویزنفلد ارائه شده است، به کار می‌رود و به طور مستقیم با افرازهای صحیح در ارتباط است. این مدل حالت خاصی از بازی ریزش چیپ است که به طور مستقل توسط برنر، لواس و شور، تعریف شده است. در این پایان‌نامه ضمن بیان دو مدل تپه شنی و بازی ریزش چیپ و ارتباط آن‌ها، چند تعمیم مهم از مدل تپه شنی و برخی از خواص آن‌ها را بیان می‌کنیم. نشان داده شده است که ساختار مشبکه به طیف وسیعی از مدل‌های دینامیکی گسسته، خصوصا مدل تپه شنی و بازی ریزش چیپ مرتبط است.

واژه‌های کلیدی: *مدل تپه شنی، بازی ریزش چیپ، خودسامان دهی بحرانی، مشبکه، پیکربندی، نقطه ثابت، فضای پیکربندی، زنجیر مارکوف*

فهرست مطالب

[۱] $Crazy\, Office$

[۲] $recurrent\ configuration$
[۳] $transitive\ configuration$

لیست تصاویر

مقدمه

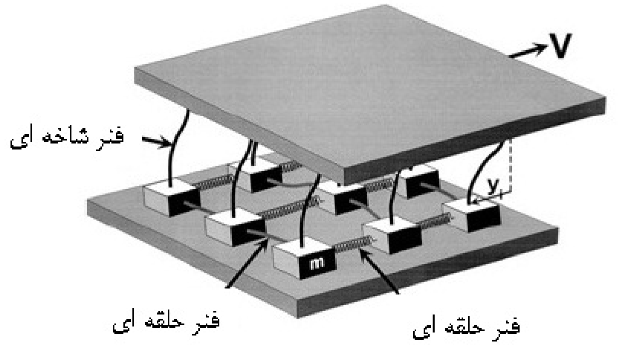
جهان اطراف ما متشکل از سیستم‌های پیچیده ای است که در طی زمان‌های طولانی و حتی از آغاز پیدایش حیات، شکل گرفته‌اند [۴۸] . سوالی که مطرح می‌شود این است که چرا جهانی که در ابتدا با اجزایی از انواع ساده در انفجار بزرگ [۴] شکل گرفته‌اند، در نهایت به حیات، تاریخ، اقتصاد و غیره ختم می‌شود؟ درحقیقت تا چندی قبل تلاش عده کمی از دانشمندان وقف فهم این بود که چرا طبیعت پیچیده است. تا این‌که در سال ۱۹۸۷ بک، تنگ و ویزنفلد[۵] (BTW) نظریه خودسامان‌ده بحرانی[۶] (SOC) خود را برای توجیه این رفتارهای پیچیده ارائه کردند. پدیده SOC توضیح می‌دهد که این رفتارهای پیچیده، بازتاب تمایل خودبه‌خودی سیستم‌های بزرگ با تعداد اجزای زیاد برای تکامل به سمت یک حالت بحرانی (حالتی با مینیمم پایداری) است که در آن اختلالات کوچک می‌توانند منجر به ایجاد بهمن‌هایی با اندازه‌های بزرگ شوند. نکته مهم این است که این تکامل بدون طرح قبلی و صرفا به دلیل واکنش‌های خودبه‌خودی سیستم انجام می‌شود . [۲]

به دنبال مطرح شدن نظریه خودسامان دهی بحرانی، مدل‌های مختلفی برای آن ارائه شد. از جمله این مدل‌ها می توان به مدل ساده تپه شنی[۷] (SPM) اشاره کرد. این مدل می‌تواند روی یک گراف دلخواه تعریف شود که در آن مکان‌های سیستم یا رئوس گراف توسط تعدادی دانه شن اشغال می‌شوند و به هر مکان یک حد آستانه نسبت داده می‌شود. هرگاه تعداد دانه‌های شن از حد آستانه آن تجاوز کند، آن مکان ناپایدار شده و ریزش می‌کند. ریزش مکان‌های ناپایدار تا پایدار شدن سیستم (یعنی تا هنگامی که تعداد دانه‌های موجود در همه مکان‌ها از حد آستانه آن‌ها کمتر باشد) ادامه می‌یابد.

به منظور درک بهتر کارایی مدل، مثالی از یک پدیده طبیعی مطرح می‌کنیم. زلزله یکی از بهترین مثال‌های طبیعی برای پدیده SOC است. پوسته‌های زمین غالبا در حالت سکون و تعادل قرار

---
[۴] $The\ Big\ Bang$
[۵] $Bak, Tang, Wiesenfeld$
[۶] $self-organized\ criticality$
[۷] $sandpile\ model$

دارند. گاهی این آرامش ظاهری با تکان‌های متناوب و گاهی شدید از بین می‌رود. حرکت لایه‌های زمین، انرژی لازم برای زلزله را فراهم می‌کند. مدل زیر را درنظر بگیرید:



شکل ۱: مدل جعبه و فنر برای گسل‌های زلزله

شکل ۱ مدل جعبه و فنر[۸] است. در این شکل، گسل‌ها توسط بلوک‌های دوبعدی که با یک سطح صاف در تماسند، نشان داده شده‌اند. در مدل، بلوک‌ها توسط فنرهای شاخه‌ای[۹] به یک صفحه متحرک V متصلند. فنرهای شاخه‌ای نشان‌دهنده فشار روی مواد نزدیک گسل به خاطر حرکت لایه‌های زمین هستند. هم‌چنین بلوک‌ها توسط فنرهای حلقه‌ای[۱۰] به یکدیگر وصل شده‌اند. هرگاه مجموع نیروی فنرها کوچک‌تر از یک حد آستانه باشد، هر جزء به سطح می‌چسبد. فنرهای شاخه‌ای یک نیروی صعودی ثابت به همه بلوک‌ها وارد می‌کنند. وقتی نیرو روی یک بلوک مشخص بیش از حد آستانه شد، بلوک ناگهان در جهت میله متحرک می‌لغزد. به دلیل وجود فنرهای حلقه‌ای، این لغزش باعث افزایش نیرو روی فنرهای همسایه می‌شود و ممکن است باعث تجاوز از مقدار بحرانی یک یا چند تا از آن‌ها شود و آن‌ها نیز بلغزند. ادامه این فرآیند منجر به یک واکنش

[۸] $block - spring$
[۹] $leaf - spring$
[۱۰] $coil - spring$

زنجیروار می‌شود و زلزله رخ می‌دهد. این مدل در ۱۹۶۷، توسط بریج[۱۱] و نپف [۱۲] در $UCLA$ معرفی شد. تمام اجزای مدل تپه شنی در مدل فوق قابل تشخیص هستند [۲]. در تناظر با مدل تپه شنی، مدل‌های دیگری مطرح شدند که هر یک بر مبنای قوانینی با شروع از یک حالت اولیه برای رسیدن به یک حالت پایدار، ریزش می‌کنند. از جمله این مدل‌ها می‌توان به مدل بریلاسکی[۱۳]، تپه یخی[۱۴] (IPM)، بازی کارت‌ها[۱۵]، بازی ریزش یال[۱۶] (EFG)، مدل تپه شنی آبلی[۱۷] (ASM) و غیره اشاره کرد [۲۹]. در سال ۱۹۹۱، برنر، لواس و شور[۱۸] بازی ریزش چیپ[۱۹] (CFG) را به طور مستقل تعریف نمودند. این بازی روی یک گراف تعریف می‌شود که در آن به هر راس، تعداد مشخصی از چیپ‌ها اختصاص یافته است. قانون بازی به این صورت است که هرگاه تعداد چیپ‌های یک راس از درجه آن بیشتر باشد، آن راس می‌تواند ریزش کند به طوری که از تعداد چیپ‌های آن به اندازه درجه راس کاسته شده و تعداد چیپ‌های همه رئوس همسایه یک واحد افزایش می‌یابند. این بازی تا زمانی که هیچ راسی در گراف ریزشی نباشد (حالت پایدار) ادامه می‌یابد.

چهارچوب پایان نامه به شرح زیر می باشد:

در فصل اول پس از بیان تعاریف پایه‌ای، بازی ریزش چیپ را تعریف می‌کنیم تا در فصل دوم به بیان ارتباط آن با مدل تپه شنی بپردازیم. در ادامه ثابت می‌کنیم هر بازی ریزش چیپ معادل با حالت ساده‌تری از آن می‌باشد. سپس با بیان تعاریف مورد نیاز، ثابت می‌کنیم فضای پیکربندی این مدل یک مشبکه است. اساس این فصل مرجع [۳۶] می‌باشد.

در فصل دوم، مدل تپه شنی استاندارد با نماد $SPM(n)$ برای هر n دلخواه، را تعریف کرده و نحوه مدل کردن آن به صورت یک بازی ریزش چیپ را توصیف می‌کنیم. در بخش بعد، الگوریتمی ارائه می‌دهیم که به کمک آن بتوان با داشتن $SPM(n)$، $SPM(n+۱)$ را تولید کرد. بنابراین

[۱۱] $Burridge$
[۱۲] $Lnopoff$
[۱۳] $Brylawski$
[۱۴] $Ice\ pile\ model$
[۱۵] $Game\ of\ cards$
[۱۶] $Edge\ firing\ game$
[۱۷] $Abelian\ Sandpile\ model$
[۱۸] $Bjorner, Lovasz, Shor$
[۱۹] $Chip\ firing\ game$

می‌توان با شروع از $SPM(۰)$ و با تکرار الگوریتم، برای هر n داده شده، $SPM(n)$ را به دست آورد. در ادامه مدل را به دو روش تعمیم داده و ثابت می‌کنیم فضای پیکربندی حاصل از این دو تعمیم با یکدیگر یکریخت می‌باشند. در نهایت ساختار درختی نامتناهی را شرح می‌دهیم که هر سطح آن، به ازای هر n، شامل $SPM(n)$ متناظر است. این درخت را با نماد $SPT(\infty)$ نشان می‌دهیم. اساس این فصل مراجع [۲۵، ۳۴] می‌باشد.

در فصل‌های سوم و چهارم، چهار مدل دیگر را بیان می‌کنیم که تعمیم‌هایی از مدل تپه شنی می‌باشند. فصل سوم شامل دو مدل است که هر دو با تعمیم قانون ریزش مدل تپه شنی، فضاهای پیکربندی تولید می‌کنند که هم‌چنان ساختار مشبکه دارند. اساس این فصل مرجع [۲۸] است. در فصل چهارم، دو مدل دیگر را تعریف می‌کنیم. مدل اول، مدل تپه شنی متقارن بوده که در آن ریزش دانه‌ها به دو سمت راست و چپ امکان‌پذیر است. ثابت می‌کنیم فضای پیکربندی حاصل دارای پیکربندی پایدار یکتا نبوده و در نتیجه ساختار مشبکه ندارد. در ادامه خواصی برای مدل ثابت کرده و در نهایت فرمولی ساده برای تعداد پیکربندی‌های پایدار حاصل با شروع از پیکربندی اولیه (n) ارائه می‌دهیم. این مدل در مراجع [۲۳، ۲۴] بیان شده است. مدل دوم، مدل تپه شنی پایدار می‌باشد. در این مدل یک قانون بیرونی برای سیستم تعریف می‌کنیم و با شروع از یک پیکربندی پایدار، یک دانه روی یک ستون تصادفی از آن اضافه کرده و پس از انجام ریزش‌ها و پایداری مجدد سیستم، این روند را تکرار می‌کنیم. ثابت می‌کنیم با شروع از پیکربندی اولیه (۰)، فضای پیکربندی حاصل، زیرمشبکه‌ای از مشبکه یانگ می‌باشد. در ادامه خواصی برای مدل ثابت می‌کنیم. اساس این بخش مرجع [۱۸] می‌باشد.

درنهایت در فصل آخر مدل تپه شنی آبلی را معرفی می‌کنیم که نزدیک‌ترین مدل تپه شنی به بازی ریزش چیپ می‌باشد و درگراف زمینه آن یک راس چاه[۲۰] (راسی که قابلیت ریزش نداشته و همه یال‌های آن واردشونده می‌باشند) وجود دارد. این مدل در سال **۱۹۹۳** توسط دار[۲۱] معرفی شده و دارای خاصیت آبلی می‌باشد، یعنی ترتیب ریزش رئوس در آن تاثیری در حالت پایدار نهایی ندارد. در ادامه یک زنجیر مارکوف روی مجموعه پیکربندی‌های مدل تعریف کرده و از نظریه

[۲۰] $sink$
[۲۱] $Dhar$

زنجیرهای مارکوف، پیکربندی‌ها را به دو دسته بازگشتی و گذرا تقسیم می‌کنیم و خواصی برای آن‌ها ثابت می‌کنیم. سپس با معرفی الگوریتم سوختن، تناظری یک به یک بین درخت‌های فراگیر و پیکربندی‌های بازگشتی بیان می‌کنیم. در نهایت پیکربندی‌های مجاز را تعریف کرده و ثابت می‌کنیم مجموعه پیکربندی‌های مجاز و بازگشتی در حقیقت یکسان هستند. برای تهیه این فصل از مراجع [۳۵، ۳۹، ۴۴] استفاده شده است.

فصل ۱

بازی ریزش چیپ

۱.۰.۱ مقدمه

در این فصل به معرفی بازی ریزش چیپ می‌پردازیم و پس از بیان مدل و تعاریف موردنیاز ثابت می‌کنیم فضای پیکربندی آن یک مشبکه است.

۲.۰.۱ پیش‌نیاز

به منظور تعریف بازی ریزش چیپ، به چند تعریف اولیه نیاز داریم‌که در زیر بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱. مدل پویای‌گسسته از یک پیکربندی اولیه شروع شده و با به‌کار بردن یک یا چند قانون تکامل ادامه می‌یابد. این قانون شرایطی را بیان می‌کندکه تحت آن، یک پیکربندی بتواند تغییرکرده و پیکربندی جدیدی را نتیجه دهد. نکته قابل توجه این است‌که قانون تکامل می‌تواند در چندین مکان در یک پیکربندی به‌کار برده شده و به منجر به چندین پیکربندی متفاوت شود.

تعریف ۲.۱. یک مجموعه جزئا مرتب[۱] s، مجموعه‌ای با رابطه ترتیب $\leq$ است‌که دارای خواص بازتابی، پادتقارنی و تعدی باشد. این مجموعه با نماد $(s, \leq)$ نمایش داده می‌شود.

[۱] *partially ordered set*

تعریف ۳.۱. در یک مجموعه جزئا مرتب $\mathcal{L}$، برای دو عنصر x و y از آن، کوچک‌ترین کران بالای آن‌ها، وست [۲] یا سوپریمم نامیده شده و با نماد $x \vee y$ مشخص می‌شود. هم‌چنین برای دو عنصر x و y از مجموعه $\mathcal{L}$، بزرگ‌ترین کران پایین آن‌ها، رسند[۳] یا اینفیمم نامیده شده و با نماد $x \wedge y$ مشخص می‌شود.

تعریف ۴.۱. یک مجموعه جزئا مرتب [۴] $\mathcal{L}$، را یک مشبکه [۵] گوییم هرگاه هر دو عنصر x و y از آن، دارای یک وست با نماد $x \vee y$ و یک رسند باشند. این مشبکه با نماد $(\mathcal{L}, \vee, \wedge)$ نشان داده می‌شود.

بنابراین واضح است که اگرمجموعه داده شده دارای عنصر مینیمم بوده و نسبت به وست بسته باشد و یا یک عنصر سوپریمم داشته باشد و نسبت به رسند بسته باشد، آنگاه مجموعه داده شده یک مشبکه را تعریف می‌کند.

تعریف ۵.۱. (زیر مشبکه[۶]): زیر مجموعه L_1 از مشبکه L یک زیر مشبکه از L است، اگر L_1 نسبت به وست و رسند در L بسته باشد، یعنی اینکه برای هر $x, y \in L_1$ داشته باشیم $x \vee y \in L_1$ و $x \wedge y \in L_1$.

تعریف ۶.۱. فرض کنید $\mathbb{L} = (L, \vee, \wedge)$ و $\mathbb{K} = (K, \vee, \wedge)$ و $h : L \to K$. آنگاه h را یک هومورفیسم مشبکه‌ای[۷] گوییم اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$$\forall a, b \in L : h(a \vee b) = h(a) \vee h(b), h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b).$$

تعریف ۷.۱. یک هومورفیسم مشبکه‌ای یک به یک را یک جانشانی مشبکه‌ای[۸] گویند و هرگاه این جانشانی مشبکه‌ای پوشا نیز باشد، آن‌را یک یکریختی مشبکه‌ای[۹] گویند.

[۲] $Join$
[۳] $Meet$
[۴] $poset$
[۵] $lattice$
[۶] $Sublattice$
[۷] $lattice\ homomorphism$
[۸] $lattice\ embedding$
[۹] $lattice\ isomorphism$

تعریف ۸.۱. برای هر دو مجموعه جزئا مرتب داده شده،$(S, \leq_S), (T, \leq_T)$، یک یکریختی ترتیبی[۱۰] از $(S, \leq_S)$ به $(T, \leq_T)$ یک نگاشت دوسویی به صورت $h : S \to T$ است به طوری که داشته باشیم $\forall u, v \in S : h(u) \leq_T h(v) \Leftrightarrow u \leq_S v$.

تعریف ۹.۱. هر مدل پویای گسسته روی یک گراف $G = (V, E)$ تعریف می‌شود که گراف پشتیبانی بازی نامیده می‌شود.

تعریف ۱۰.۱. برای هر گراف جهت‌دار $G = (V, E)$ داده شده، مجموعه همسایگی یک راس $i \in V$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$N_G(i) = \{j \in V : (i, j) \in E\},$$

هم چنین درجه راس $i \in V$ را با نماد d_i و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d_i = |N_G(i)| < \infty.$$

تعریف ۱۱.۱. در ابتدا به هر راس i از یک گراف جهت‌دار داده شده، به اندازه $c(i)$ چیپ اختصاص می‌دهیم که درحقیقت

$$\begin{cases} c: & V \to \mathbb{N} \\ & i \mapsto c(i) \end{cases}$$

است. این واگذاری را یک پیکربندی[۱۱] از چیپ‌ها می‌نامیم.

تعریف ۱۲.۱. یک پیکربندی از چیپ‌ها را نقطه ثابت[۱۲] می‌گوییم هرگاه هیچ راسی در گراف موجود نباشد که بتواند مطابق با قانون یا قوانین تعریف شده برای مدل عمل کند.

---
[۱۰] *order isomorphism*
[۱۱] *configuration*
[۱۲] *fixed point*

تعریف ۱.۱۳. برای هر مدل، مجموعه همه پیکربندی‌های به دست آمده از پیکربندی اولیه (یعنی پیکربندی‌هایی که در هر مرحله پس از عمل ریزش روی یک راس با توجه به قوانین تکامل مدل، از پیکربندی قبلی به دست می‌آیند) را فضای پیکربندی[13] می‌نامیم. شایان ذکر است که فضای پیکربندی یک مدل ممکن است ساختار مشبکه داشته باشد.

۱.۱ تعریف مدل و قانون آن

فرض کنیم $G = (V, E)$ گرافی با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های $E \subseteq V \times V$ باشد. تابع $\tau : W \to \{۰, ۱\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم (قابل توجه است که $W = \{۰\} \cup \mathbb{N}$).

$$\tau(u) = \begin{cases} ۱ & ; u \geq ۰ \\ ۰ & \text{در غیر این صورت؛} \end{cases}$$

برای گراف G یک مجموعه از همه پیکربندی‌های صحیح نامنفی W^V را در نظر گرفته (که W مجموعه اعداد حسابي می‌باشد) و برای هر $i \in V$ توابع انتقال موضعی θ_i را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \theta_i : \quad W^V \to W^V \\ \qquad \theta_i(x) = y. \end{cases}$$

که در آن:

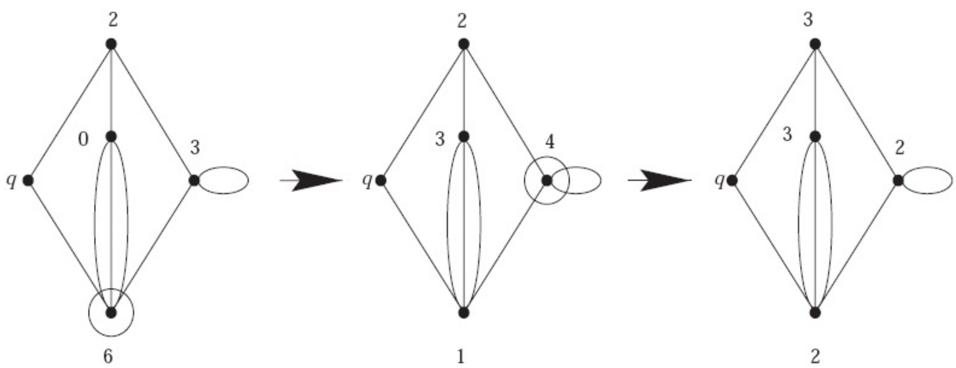
$$y_j = \begin{cases} x_j - d_i\tau(x_j - d_i) & ; j = i \\ x_j + \tau(x_j - d_i) & ; j \in N_G(i) \\ x_j & \text{در غیر این صورت؛} \end{cases}$$

[13] $configuration\ space$

که x_i تعداد چیپ‌های روی راس i را نشان می‌دهند. بنا به قوانین موضعی θ_i که در بالا تعریف شد، برای یک پیکربندی $x \in W^V$ داده شده هرگاه تعداد چیپ‌های راس دلخواه i بیش از درجه خروجی آن باشد، آنگاه یک چیپ از راس i را در طول هر یک از یال‌های خروجی به همسایه‌های مجاورش انتقال می‌دهیم، این فرآیند را ریزش راس i می‌نامیم. مثالی از این بازی در شکل ۱.۱ آمده است.

تعریف ۱۴.۱. یک CFG را همگرا گوییم هرگاه ریزش رئوس با هر ترتیبی منجر به یک پیکربندی نهایی یکسان شود.

تعریف ۱۵.۱. دو بازی همگرای C و C' را معادل گوییم هرگاه فضای پیکربندی دو بازی با یکدیگر یکریخت باشند.



شکل ۱.۱: یک مثال از ریزش دو راس در بازی CFG.

از آن‌جایی‌که در طول بازی CFG، هر راس ممکن است چندین بار ریزش کند،برای ساده‌کردن برهان قضایا، بازی ریزش چیپ ساده را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱۶.۱. یک CFG همگرا را ساده‌گوییم هرگاه هر راس ازگراف پشتیبانی آن، حداکثر یک بار در طول اجرای بازی ریزش کند.

قابل توجه است که هر CFG ساده لزوما همگرا است. قضیه زیر بیان می‌کند که هر CFG همگرا معادل با یک CFG ساده است. بنابراین در ادامه می‌توان به جای CFG، بدون کاسته شدن از کلیت، به مطالعه CFG ساده متناظر آن پرداخت.

قضیه ۱.۱. *[۳۶] هر CFG همگرا، معادل با یک CFG ساده است.*

باتوجه به قانون بازی، برای هر CFG داده شده، رئوس می‌توانند با ترتیب‌های متفاوتی ریزش کنند. واضح است که هرگاه دو دنباله ریزش متفاوت از رئوس، دارای رئوس مشابهی باشند، با شروع از یک پیکربندی اولیه یکسان، به یک نقطه ثابت یکسان نیز خواهند رسید. عکس این مطلب در قضیه زیر آمده است:

قضیه ۲.۱. *برای هر CFG ساده داده شده مانند C، اگر دو دنباله ریزش s و t با شروع از یک پیکربندی مشابه، به یک نقطه ثابت یکسان برسند، آنگاه مجموعه رئوس ریزش در s و t مشابه خواهند بود.*

اثبات. فرض کنید C یک CFG ساده باگراف پشتیبانی $G = (V, E)$ ، و s و t دو دنباله ریزش باشند که پیکربندی σ را به پیکربندی σ' می‌رسانند. همچنین فرض کنید X و Y به ترتیب مجموعه رئوس ریزش کرده در دنباله‌های s و t باشند. به برهان خلف فرض کنید $X \neq Y$. بدون از دست دادن کلیت مسئله، می‌توانیم فرض کنیم $X \setminus Y$ ناتهی است. دنباله s را با دنباله s_1، که ممکن است تهی باشد، از رئوس $X \cap Y$ شروع می‌کنیم، پس از ریزش رئوس دنباله s_1، چون $X \setminus Y$ ناتهی بود، $v \in X \setminus Y$ موجود است که در ادامه ریزش می‌کند، یعنی v شامل چیپ بیشتری نسبت به درجه خروجی‌اش است. از طرفی اگر با دنباله t از σ به σ' برسیم، واضح است که همه رئوس $X \cap Y$، یعنی رئوس s_1، در این دنباله ریزش کرده‌اند. بنابراین بعد از ریزش همه رئوس Y، راس v می‌تواند ریزش کند یعنی v در پیکربندی σ' می‌تواند ریزش کند. از آنجا که σ' را می‌توان به کمک دنباله ، بعد از ریزش همه رئوس X (شامل v) به‌دست آورد و چون v در پیکربندی σ' نیز می‌تواند ریزش کند، نتیجه می‌گیریم که v حداقل ۲ بار می‌تواند ریزش کند که با ساده بودن C در تناقض است. بنابراین $X = Y$. □