بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده فیزیک

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته فیزیک گرایش اتمی مولکولی

بررسی پدیده ی شفافیت القای الکترومغناطیسی محیط سه ترازی

مولف:

سید محمود میرنجفی زاده

استاد راهنما:

دکتر محمد حسین زندی

دیماه ۱۳۹۱

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم که همواره حامی من بودند و همسر مهربانم که حضورش مایه ی دلگرمی من برای ادامه ی مسیر زندگیم بوده است.

تشکر و قدردانی:

حمد و سپاس خدای را که در تمامی لحظات زندگی یار و یاور من بوده است.

صمیمانه ترین سپاس های خود را تقدیم می کنم به استاد راهنمای گرانقدرم جناب آقای دکتر زندی که در این کار مرا یاری نمودند.

از اساتید گرانقدر جناب آقای دکتر تراز و سرکار خانم دکتر شجاعی که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند بسیار متشکرم.

چکیده:

وقتی نور به طور عادی به محیطی بتابد درصدی از آن جذب و شدت آن کاهش می یابد، اگر نور بصورت پالسی با پهنای کمتر از زمان واهلش اتم ها باشد تغییرات شدت آن جزیی خواهد بود و بعد از چند طول جذب ثابت می شود؛ به این پدیده شفافیت القای الکترومغناطیسی گفته می شود. ما در این جا به بررسی سیستم سه ترازی متشکل از دو تراز پایه بدون برهمکنش و یک تراز تحریکی پرداختیم. جهت ایجاد شفافیت الکترومغناطیسی بایستی جذب در حالت تشدید حذف شود و برای رسیدن به این منظور یک برهمنهی همدوس بین ترازهای پایه و تراز برانگیخته باید وجود داشته باشد، از دو لیزر با میدان هایی با دو بسامد متفاوت که به ترتیب بین ترازهای پایه و تراز برانگیخته اعمال می شوند استفاده می کنیم.

نهایتا پس از محاسبه ی ماتریس دانسیته برای اتم سه ترازی با پیکربندی Λبه بررسی پدیده ی شفافیت القایی پرداختیم و نشان دادیم وقتی که همدوسی وجود دارد با در نظر گرفتن فروافت تراز ها پدیده ی شفافیت القایی الکترومغناطیسی رخ می دهد.

کلید واژه: پدیده ی شفافیت القایی؛ لیزر؛ سیستم سه ترازی.

فصل اول:

مقدمه

مقدمه:

برای یک سیستم کوانتومی که حالت آن کاملا مشخص باشد در صورت داشتن بردار حالت می توان تمامی اطلاعات کوانتومی مورد نظر سیستم را به دست آورد. با استفاده از تئوری نیمه کلاسیک به راحتی می‌توان برهمکنش بین اتم‌های کوانتیده و میدان‌های الکترومغناطیسی را بررسی نمود و جهت توصیف برهمکنش میدان با محیط فعال متشکل از تعداد زیادی سیستم های اتمی به عملگر دانسیته نیازمندیم.

به عبارتی در عمل، حالت دستگاه غالبا کاملا معین نیست. این امر، به عنوان مثال، در مورد قطبش فوتون هایی که از یک منبع نور طبیعی (غیر قطبی) صادر می‌شوند و همچنین برای اتم‌های باریکه‌ای که از یک کوره در دمای T صادر شده است و انرژی جنبشی آن‌ها فقط به طور آماری معلوم است، صادق است. مسئله‌ی مطرح شده به وسیله‌ی توصیف کوانتومی یک دستگاه به این شرح است: چگونه اطلاعات ناکاملی را که درباره‌ی حالت دستگاه داریم وارد صورتبندی کنیم تا بتوانیم پیش بینی‌هایی که بیشترین اتکا را به این اطلاعات جزئی دارند انجام دهیم. برای این منظور در این جا یک وسیله‌ی ریاضی بسیار مفید عملگر دانسیته است که کاربرد همزمان اصول موضوعه‌ی مکانیک کوانتومی و نتایج محاسبات احتمالات می باشد.

در مطالعه‌ی مکانیک کلاسیک و ترمودینامیک به یک سری قوانین و معادلات برخورد می‌کنیم که تا حد امکان یک موضوع را بطور کامل بیان می‌کنند. مثلا در مکانیک کلاسیک قوانین حرکت نیوتن نقش کلیدی را بازی می‌کنند، به گونه‌ای که تشریح حرکت بدون استفاده از این قوانین عملا غیر ممکن است. اغراق نکرده‌ایم اگر بگوییم کلیه مباحث الکترومغناطیس کلاسیک بر اساس معادلات ماکسول صورت می‌گیرند.

امروزه خواص اپتیکی سیستم های اتمی توسط میدان‌های لیزری تحت تاثیر قرار می‌گیرند. همدوسی القایی ناشی از دمش میدان‌های همدوس یا غیرهمدوس نقش مهمی در تغییر خواص اپتیکی مواد ایفا می‌کند. برهمنهی همدوس حالات، اساس کار بسیاری از فرایندهای کوانتومی نظیر کنترل فرآیندهای شیمیایی، پردازش اطلاعات کوانتومی و اپتیک غیرخطی می باشد. ساز وکارهای فوق سریع برای تولید برهمنهی حالت‌های زمینه، برپایه ی نظریه ی کنترل بهینه [۱] یا استفاده از قطار تپ‌های کوتاه [۲] در این زمینه پیش بینی شده است.

روش گذار بی دررو دامان(استیرپ)[1] به دلیل عدم جمعیت دار شدن حالت تحریکی برای ایجاد برهمنهی همدوس حالت‌های زمینه مورد توجه می‌باشد. در مرجع [۳] ایجاد برهمنهی دلخواه از حالات زمینه با استفاده از روش استیرپ از طریق تپ‌های مناسب در سیستم N پایه انجام شده است.

وارونی جمعیت مهمترین عامل برای تقویت نور در سیستم های اتمی چند ترازی است. با پیشرفت در علم اپتیک کوانتومی، پدیده‌هایی نظیر تله اندازی همدوس جمعیت الکترون‌ها [۴]، لیزرهای بدون وارونی جمعیت[۵,۶] حذف گسیل خودبخودی[۷] و به دنبال آن شفافیت القایی الکترومغناطیسی [۸,۹] مورد بررسی قرار گرفته است. این پدیده ها را با تداخل کوانتومی و همدوس اتمی توجیه کرده اند. در اکثر حالت‌های انتخابی، لیزرزایی در غیاب وارونی جمعیت رخ می‌دهد [۱۰,۱۱] . هرچند این گونه به نظر می‌رسد که لیزرزایی باید از هر دو دیدگاه در غیاب وارونی جمعیت رخ دهد، اما نشان داده شده است که لیزر زایی در غیاب و با حضور وارونی جمعیت در هر دو دیدگاه از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است[۱۲].

اما نوع دیگری از همدوسی مربوط به همدوسی‌گسیل خودبخودی است که توسط تداخل گسیل خودبخودی پایدار می شود. این نوع همدوسی وقتی ظاهر می‌شود که یک تراز برانگیخته به دو تراز نزدیک به هم فروافت کند[۱۳] یا دو تراز برانگیخته نزدیک به هم به یک تراز فروافت کند[۱۴] و همچنین نحوه ترازهای اتمی به شکل نردبان باشد [۱۵]، مطالعات زیادی مبنی بر اثرهمدوس‌گسیل خودبخودی بر ضریب غیر خطی صورت گرفته است [۱۶].

یکی از اثرهای برهمکنش همدوس بین تابش و سیستم های اتمی پدیده ای بنام شفافیت القایی EIT[2] است. تپ‌های تشدید شده از میان یک محیط جذب‌کننده با میرایی پایین انتشار می‌یابند، حالت بالا زمانی اتفاق می‌افتد که پهنای تپ در مقایسه با زمان واهلش کوتاه باشد و فرکانس مرکز تپ به فرکانس تشدید اتم نزدیک باشد تا حالت تشدید اتفاق افتد [۱۷].
بعد از چند طول موج جذب تپ به حالت ایستایی می‌رسد که در این حالت پهنا، انرژی و شکل تپ ثابت می‌ماند و دیگر جذب نمی شود. سرعت تپ در مقایسه با سرعت نور در محیط بسیار کمتر است. ما یک تپ اپتیکی را در نظر می‌گیریم و آن را توسط معادله‌ی شرودینگر حل می‌کنیم؛ در این

[1] STRAP
[2] Electromagnetically Induced Transparency

صورت دو سری مجموعه جواب بدست می‌آید که حل آن ها شکل، انرژی و سرعت تپ را نتیجه می‌دهد. برای این کار تمرکز خود را بر روی فرمول بندی ماتریس دانسیته معطوف می‌کنیم.
EIT مشخصه ها و خصوصیات خیلی زیادی را در عکس العمل نوری نمایان کرده است. به عنوان مثال پراکندگی شیب دار در اطراف فرکانس شفافیت به ما اجازه می‌دهد که انتشاری کم و بدون جذب زیاد داشته باشیم. همچنین خاصیت انکساری نیز در EIT مورد پژوهش قرار گرفته است.
در فصل دوم در ابتدا مقدمه‌ای راجع به معادلات ماکسول گفته می شود و پس از آن به بررسی اتم دو ترازی می‌پردازیم و در ادامه کار خود را معطوف به یافتن ماتریس دانسیته برای اتم دو ترازی کرده و در شرایط خاص آن را محاسبه می‌کنیم.

در فصل سوم نیز به بررسی همین شرایط و عبارات در اتم سه ترازی می پردازیم و در نهایت پدیده ی شفافیت القایی در محیط سه ترازی را که موضوع کار اصلی این پایان نامه است مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فصل دوم:

برهمکنش تابش الکترومغناطیسی با ماده

۱.۲- مقدمه:

هنگامی که صحبت از برهمکنش میدان الکتریکی با ماده می‌شود می‌توانیم چنین مسئله ای را از سه طریق کاملا متفاوت (که در بعضی موارد جواب یکسانی دارند) بررسی کنیم. رهیافت کلاسیک ساده ترین روشی است که می‌توان انتخاب کرد. در این روش هم میدان‌های الکترومغناطیسی و هم ذرات مادی به صورت کلاسیک توصیف می‌شوند. بدیهی است که این روش بسیار ساده و قابل درک است. اما متاسفانه در تمامی موارد (به ویژه هنگامی که با پدیده های میکروسکوپی سروکار داریم) نظریه ی موفقی نیست. از این رو برای چنین پدیده‌هایی به نظریه ی نیمه کلاسیکی متوسل می‌شوند. در این نظریه میدان تابشی به صورت کلاسیک، اما ماده (دقیق‌تر بگوییم اتم ها و مولکول ها) به صورت کوانتومی توصیف می‌شوند. موفقیت چنین نظریه‌ای در محدوده ی میکروسکوپی بسیار چشمگیر است. در این روش مفهوم فوتون نقش بسیار کوچکی ایفا می‌کند. به عبارت دقیق تر بهتر آن است که در چنین روشی حتی الامکان از به کار بردن کلمه‌ی فوتون اجتناب‌کنیم چون این مفهوم در چارچوب نظریه ی نیمه کلاسیکی کاملا نارسانا و ابهام برانگیز است. موفقیت روش نیمه کلاسیک نسبت به روش کلاسیک گویای آن است که در یک نظریه ی دقیق تر محدوده ی میکروسکوپی بایستی میدان تابشی و ماده هردو به صورت کوانتومی توصیف شوند. بدیهی است در چنین نظریه‌ای کمیت‌هایی نظیر میدان الکتریکی و مغناطیسی کمیت‌های جبری نبوده بلکه عملگرهایی خواهند بود که روی حالت سیستم عمل می‌کنند. در این پایان نامه برای بررسی مسئله از روش نیمه کلاسیکی استفاده می‌کنیم.

۲.۲- حل معادله ی موج به روش نیمه کلاسیکی:

از معادلات ماکسول شروع می‌کنیم:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla}.\vec{D} = \rho$$
$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$$
$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \qquad \vec{B} = \mu_0\vec{H} \qquad \vec{J} = \sigma\vec{E} \tag{۱.۲}$$

با استفاده از معادلات ماکسول (۱.۲) می‌توان معادله موج را بصورت زیر نوشت:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{E}) - \nabla^2\vec{E} = -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{H} = -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t})$$

$$-\nabla^2\vec{E} = -\mu_0\frac{\partial\vec{J}}{\partial t} - \mu_0\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \nabla^2\vec{E} = \mu_0\frac{\partial\vec{J}}{\partial t} + \mu_0\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2} \qquad \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \qquad \vec{J} = \sigma\vec{E}$$

$$\Rightarrow -\nabla^2\vec{E} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -\mu_0\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2} \qquad (۲.۲)$$

در این رابطه σ نماینده ی تمام اتلاف‌هایی است که در سیستم وجود دارد و $\vec{P}$ بردار پلاریزاسیون[1] ماده و $\vec{E}$ میدان الکتریکی داخل حفره است در روش نیمه کلاسیکی بردار پلاریزاسیون مربوط به ماده را باید بصورت کوانتومی به دست آورد و همان طور که می دانیم پل ارتباطی بین کوانتوم و کلاسیک مقدار چشمداشتی است که چیزی شبیه به میانگین کلاسیکی است. باید $\vec{P}$ کوانتومی را بدست آورده و مقدار چشمداشتی آن را محاسبه کنیم.

میدان الکتریکی $\vec{E}$ در ماده ممان دو قطبی های میکروسکوپی P_i را تولید می‌کند که این اتفاق مطابق با قوانین مکانیک کوانتومی بیان می‌شود. گشتاور مربوط به دوقطبی‌ها جمع شده و یک پلاریزاسیون ماکروسکوپی $\vec{P}(r,t)$ را ایجاد می‌کنند. این قطبش به عنوان یک چشمه عمل می‌کندکه در معادلات ماکسول ظاهر می‌شود.

در واقع در این جا میدان ایجاد شده و ممان های دو قطبی در ماده مطابق با قوانین مکانیک کوانتومی بیان می‌شود. برای بدست آوردن جمع‌های آماری مربوط به پلاریزاسیون ماکروسکوپی ماده با استفاده

[1] Polarization

از عملگر دانسیته یک ممان دوقطبی منحصربه فرد تعریف می‌شود. در توصیف پدیده های واپاشی که در جملات مولفه های احتمال مستقیما قابل بیان نیستند تقریب نیمه کلاسیکی مناسب است (و بسیاری از مسائل تئوری لیزر را حل می‌کند. هرچند سوال هایی مانند پهنای باند لیزر، بی جواب ماندن خلا و آمار فوتون مستلزم توصیف‌هایی بوسیله‌ی عبارات مکانیک کوانتومی است.)

۳.۲- بررسی اتم دو ترازی:

در این‌جا با توجه به بخش قبل با تقریب نیمه کلاسیک، تابش الکترومغناطیس را تک مد و ماده را یک سیستم دو ترازی در نظر می‌گیریم.

۱.۳.۲- رابطه ی مربوط به فاز:

در نمایش برهمکنش نور با ماده، نور به صورت کلاسیکی و ماده به صورت ساختار کوانتومی در نظر گرفته می‌شود. بحث را تا استخراج معادله ی موج متناسب با توصیف میدان در داخل یک حفره ی فعال همسانگرد با استفاده از معادلات ماکسول (۱.۲) شروع می‌کنیم.

فضای همسانگرد یعنی هیچ جهت مرجحی در فضا وجود ندارد و همه ی جهت ها معادلند پس سیستم فیزیکی که تحلیل می‌شود و یا قانون فیزیکی که تشریح می‌شود نباید به سمت گیری خاصی که برای محورهای مختصات برگزیده شده است بستگی داشته باشد. لذا جملات غیرخطی معادلات (۱.۲) حذف می‌شوند.

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{B}$$
$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{E}) - \nabla^2\vec{E} = -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{H} = -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}) \qquad (۳.۲)$$
$$-\nabla^2\vec{E} = -\mu_0\frac{\partial\vec{J}}{\partial t} - \mu_0\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2} \Rightarrow \nabla^2\vec{E} = \mu_0\frac{\partial\vec{J}}{\partial t} + \mu_0\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2}$$

بنابراین معادله‌ی موج حاکم بر میدان الکتریکی(معادله‌ی هلمهولتز) عبارت است از:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \qquad (۴.۲)$$

تغییرات شدت میدان عرضی در مقایسه با طول موج نور نسبت به محور لیزر به آهستگی تغییر می‌کند. بنابراین از مشتقات x, y صرف نظر می‌شود.

$$\nabla^2 E = \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \qquad (۵.۲)$$

نهایتا معادله‌ی موج به صورت معادله (۵.۲) نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \mu_0 \sigma \frac{\partial E}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \qquad (۶.۲)$$

وابستگی‌های زمانی معادله ی موج می تواند از وابستگی‌های مکانی با بسط میدان الکتریکی در مدهای نرمال از حفره جدا شوند. با وجود این فقط بعضی مدهای داخل حفره قابل اندازه گیری است که این مدها دارای فرکانس خاص و معینی هستند. این فرکانس‌ها به این شکل تعریف می‌شوند:

$$\Omega_n = \frac{n\pi C}{L} = K_n C \qquad (۷.۲)$$

در این جا Ω_n فرکانس تشدید حفره خالی، L طول حفره ، C سرعت نور و n عدد صحیح از مرتبه 10^6 و K_n عدد موج است. برای مدهای نرمال تابع موج به این صورت است:

$$u_n(z) = \sin k_n z \qquad (۸.۲)$$

$$u_n(z) = e^{ik_n z} \qquad (۹.۲)$$

از آن جا که مدهای طولی تشکیل یک مجموعه توابع کامل عمود برهم را می‌دهند، هر میدان دلخواهی را می توان برحسب آن‌ها بسط داد. اگر فرض کنیم $\sigma, P = 0$ باشند از معادله‌ی (۶.۲) به معادله (۱۰.۲) می‌رسیم:

$$-\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \qquad (۱۰.۲)$$

اگر جواب وابستگی زمانی معادله (۱۰.۲) بصورت هارمونیک فرض کنیم می توان جواب معادله (۱۰.۲) را به صورت رابطه (۱۱.۲) نوشت:

$$E = u(z) e^{-i\Omega t} \qquad (۱۱.۲)$$

اگر جواب پیشنهادی (۱۱.۲) یک حفره‌ی تهی را در معادله ی هلمهولتز (۱۰.۲) جانشین کنیم، معادله (۱۰.۲) به معادله (۱۲.۲) تبدیل می‌شود.

$$\frac{\partial^2 u(z)}{\partial z^2} + \mu_0 \varepsilon_0 \Omega^2 u(z) = 0 \qquad (۱۲.۲)$$

چون عملگر $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ یک عملگر هرمیتی است و با عملگر هرمیتی می توان یک معادله ی ویژه مقداری مانند(۱۳.۲) ساخت، از این به بعد سعی می کنیم میدان ها را برحسب ویژه توابع حفره ی خالی بسط دهیم:

$$\frac{\partial^2 u(z)}{\partial z^2} + k_n^2 u(z) = 0 \qquad (۱۳.۲)$$

ویژه توابع حفره ی تهی عبارتست از :

$$E(z,t) = \sum_n A_n(t) u_n(z) + c.c \qquad (۱۴.۲)$$

$A_n(t)$ها ضرایب بسط تابعی از فرکانس نوسانات حفره یعنی $\nu_n(t)$ها و همچنین شامل تغییرات آرام دامنه($E_n(t)$ها) و تغییرات شدید فاز($\varphi_n(t)$ها) می‌باشد.

$$A_n(t) = E_n(t) e^{-i(\nu_n t + \varphi_n(t))} \qquad (۱۵.۲)$$

$v_n + \varphi_n(t)$ فرکانس لحظه‌ای میدان مد مورد نظر در داخل حفره است این فرکانس لزوما با فرکانس نوسان حفره‌ی خالی Ω_n ناشی از پاشندگی ماده مساوی نیست. در واقع فرکانس Ω_n مربوط به حفره‌ی خالی بستگی به ماده ی پراکننده(ضریب شکست) و طول حفره دارد ولی فرکانس نوسان یک مد مربوط به بردار موج انتشار یافته در آن است. یک میدان الکتریکی به صورت (۱۶.۲) تعریف می‌شود:

$$E(z,t) = \frac{1}{2}\sum_n E_n(t)\exp[-i(v_n t + \varphi_n)]u_n(z) + C.C \qquad (۱۶.۲)$$

و پلاریزاسیون القا شده در داخل ماده نیز بصورت(۱۷.۲) تعریف می‌شود:

$$P(z,t) = \frac{1}{2}\sum_n \varphi_n(t)\exp[-i(v_n t + \varphi_n)]u_n(z) + C.C \qquad (۱۷.۲)$$

$\varphi_n(t)$(دامنه ی پلاریزاسیون) مختلط است و برای مد n به آهستگی تغییر می‌کند. قسمت حقیقی $\varphi_n(t)$ هم فاز با میدان الکتریکی است و از پاشندگی ماده بوجود می‌آید و قسمت موهومی آن معادل با میدان الکتریکی است که بهره یا اتلاف محیط را نشان می‌دهد. با قرار دادن روابط $P(z,t), E(z,t)$در معادله‌ی موج و با در نظر گرفتن شکل $u_n(x)$ و ضرب کردن آن در $\exp[iv_n t + \varphi_n(t)]$خواهیم داشت:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_n [\dot{E}_n(t)e^{-i(v_n t+\varphi_n(t))}u_n(z) + E_n(t)[-i(v_n t + \dot{\varphi}_n(t))]e^{-i(v_n t+\varphi_n(t))}u_n(z)] + C.C$$

(۱۸.۲)

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\sum_n [\ddot{E}_n(t)e^{-i(v_n t+\varphi_n(t))}u_n(z) + 2(-i)(v_n + \dot{\varphi}_n)\dot{E}_n(t)e^{-i(v_n t+\varphi_n(t))}u_n(z) + \qquad (۱۹.۲)$$

$$E_n(-i\ddot{\varphi}_n)e^{-i(v_n t+\varphi_n(t))}u_n(z) + E_n(t)(-iv_n t + \varphi_n(t))e^{-i(v_n t+\varphi_n(t))}u_n(z) + C.C$$

و مطابق رابطه‌ی(۱۹.۲) و (۲۰.۲) $\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$ بصورت (۲۰.۲) محاسبه می‌شود:

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\sum_n [\ddot{P}_n(t)e^{-i(\nu_n t+\varphi_n(t))}u_n(z) - 2(-i(\nu_n+\dot{\varphi}_n))\dot{P}_n(t)e^{-i(\nu_n t+\varphi_n(t))}u_n(z) + \quad (۲۰.۲)$$
$$P_n(-i\ddot{\varphi}_n)e^{-i(\nu_n t+\varphi_n(t))}u_n(z) + P_n(t)(-i\nu_n t+\varphi_n(t))e^{-i(\nu_n t+\varphi_n(t))}u_n(z)] + C.C$$

با جایگزینی این روابط در معادله ی (۴.۲) داریم:

$$-\nabla^2(\frac{1}{2}\sum_n E_n(t)e^{-i(\nu_n t+\varphi_n)}u_n(z) + C.C)$$
$$+\mu_0\varepsilon_0[\frac{1}{2}\sum_n(\ddot{E}_n e^{-i(\nu_n t+\varphi_n)}u_n(z) + (-2i)(\nu_n+\dot{\varphi}_n)\dot{E}_n e^{-i(\nu_n t+\varphi_n)}u_n(z)$$
$$-iE_n\ddot{\varphi}_n e^{-i(\nu_n t+\varphi_n)}u_n(z) - E_n(\nu_n+\dot{\varphi}_n)^2 e^{-i(\nu_n t+\varphi_n)}u_n(z)] \quad (۲۱.۲)$$
$$+\mu_0\sigma[\frac{1}{2}\sum_n \dot{E}_n(t)e^{-i(\nu_n t+\varphi_n)}u_n(z)$$
$$-iE_n(t)(\nu_n t+\dot{\varphi}_n)e^{-i(\nu_n t+\varphi_n)}u_n(z) + C.C) = -\mu_0[\frac{1}{2}\sum_n \ddot{P}_n e^{-i(\nu_n t+\varphi_n)}u_n(z) + \ldots$$

با استفاده از تقریب تغییرات آرام دامنه می توان از $\ddot{E}_n, \ddot{\varphi}_n, \ddot{P}_n, \dot{E}_n\dot{P}_n, \sigma\dot{E}_n, \sigma\dot{p}_n, \dot{P}_n$ صرف نظر کرد بنابراین:

$$\frac{1}{2}[\sum_n K_n{}^2 E_n(t)e^{-i(\nu_n t+\varphi_n)} + C.C + \mu_0\varepsilon_0\sum_n(-2i)\nu_n\dot{E}_n e^{-i(\nu_n t+\varphi_n)}u_n(z) \quad (۲۲.۲)$$
$$-E_n(\nu_n+\dot{\varphi}_n)^2 e^{-i(\nu_n t+\varphi_n)}u_n(z) + C.C$$
$$-i\mu_0\sigma\sum_n E_n(t)\nu_n e^{-i(\nu_n t+\varphi_n)}u_n(z) + C.C]$$
$$= \frac{1}{2}(\mu_0\sum_n V_n{}^2 P_n e^{-i(\nu_n t+\varphi_n)}u_n(z) + C.C)$$

پس از کمی محاسبه به رابطه‌ی:

$$K_n{}^2 E_n(t) + \mu_0\varepsilon_0[(-2i)\dot{E}_n\nu_n - E_n(\nu_n + \dot{\varphi}_n)^2] - i\,\mu_0\sigma E_n\nu_n = \mu_0\nu_n{}^2 p_n \qquad (۲۳.۲)$$

می‌رسیم. با جدا کردن قسمت های حقیقی و موهومی از هم داریم:

$$K_n{}^2 E_n(t) - \mu_0\varepsilon_0[E_n(\nu_n + \dot{\varphi}_n)^2] = \mu_0\nu_n{}^2 \mathrm{Re}(p_n) \qquad (۲۴.۲)$$

$$-2\mu_0\varepsilon_0\dot{E}_n\nu_n - \mu_0\sigma E_n\nu_n = \mu_0\nu_n{}^2 \mathrm{Im}(p_n)$$
$$\Rightarrow E_n(t)(K_n{}^2 - \mu_0\varepsilon_0(\nu_n{}^2 + \dot{\varphi}_n{}^2 + 2\nu_n\dot{\varphi}_n) = \mu_0\nu_n{}^2 \mathrm{Re}(p_n)$$

$$E_n(\mu_0\varepsilon_0\Omega_n{}^2 - \mu_0\varepsilon_0(\nu_n{}^2 + 2\nu_n\dot{\varphi}_n)) = \mu_0\nu_n{}^2 \mathrm{Re}(P_n) \qquad (۲۵.۲)$$
$$\Rightarrow \varepsilon_0 E_n(\Omega_n{}^2 - \nu_n{}^2 - 2\nu_n\dot{\varphi}_n) = \nu_n{}^2 \mathrm{Re}(P_n)$$
$$\varepsilon_0 E_n[(\Omega_n - \nu_n)(\nu_n + \Omega_n) - 2\nu_n\dot{\varphi}_n] = \nu_n{}^2 \mathrm{Re}(P_n)$$

در معادله‌ی(۲۵.۲) به دلیل این که ν_n, Ω_n به هم خیلی نزدیک هستند جمع ν_n, Ω_n را برابر $2\nu_n\Omega_n$ قرار می‌دهیم.

$$\varepsilon_0 E_n 2\nu_n(\Omega_n - \nu_n + \dot{\varphi}_n) = \nu_n{}^2 \mathrm{Re}(P_n) \qquad (۲۶.۲)$$

$$(\Omega_n - \nu_n - \dot{\varphi}_n) = \frac{\nu_n}{2\varepsilon_0}\mathrm{Re}(P_n)\frac{1}{E_n}$$
$$(\nu_n + \dot{\varphi}_n) = \Omega_n - (\frac{\nu_n}{2\varepsilon_0}\mathrm{Re}(P_n))E_n{}^{-1}$$

به این ترتیب رابطه ی مربوط به فاز را که به $\mathrm{Re}(P_n)$ بستگی دارد را بدست آوردیم. این معادله مولفه هم فاز پلاریزاسیون را منجر به تغییر فرکانس از فرکانس حفره غیرفعال می شود را توصیف می کند.

۲.۳.۲- رابطه‌ی مربوط به دامنه:

حال می خواهیم روابط مربوط به دامنه را به دست آوریم. از معادله ی (۲۶.۲) رابطه‌ی مربوط به دامنه را به شکل:

$$-2\varepsilon_0 \dot{E}_n - \sigma E_n = \nu_n \,\mathrm{Im}(P_n)$$

$$\dot{E}_n + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} E_n = \frac{-\nu_n}{2\varepsilon_0} \mathrm{Im}(P_n) \qquad (۲۷.۲)$$

بدست می‌آوریم. با توجه به این که فاکتور کیفیت φاین معادله میرایی دامنه nام را می‌دهد و نسبت انرژی ذخیره شده در حفره به توان تلف شده در یک پریود می‌باشد، یعنی:

$$\varphi = \varepsilon_0 \frac{\nu}{\sigma} \qquad (۲۸.۲)$$

داریم:

$$E_n^{\,0} + \frac{1}{2}\frac{\nu}{\varphi_n} E_n = \frac{-\nu}{2\varepsilon_0} \mathrm{Im}(P_n) \qquad (۲۹.۲)$$

$$\nu_n + \dot{\varphi}_n = \Omega_n - \frac{1}{2}\frac{\nu}{\varepsilon_0} E_n^{-1} \mathrm{Re}(P_n) \qquad (۳۰.۲)$$

معادله‌ی (۳۹.۲) و معادله‌ی(۳۰.۲) از معادلات اساسی کار ما می‌باشند. اما مفهوم فیزیکی این دو معادله این است که در غیاب یک ماده ی فعال $P = 0$ معادلات ایجاب می‌کنند که شدت مد E_n^2 به صورت تابعی نمایی از زمان و با ثابت $\frac{\nu}{\varphi_n}$ کاهش پیدا می‌کند و فرکانس های مد نوسان همانند فرکانس حفره ی تهی هستند. در حالت کلی پلاریزاسیون بوسیله ی مولفه های فوریه از قابلیت تراوایی χ تعریف می‌شوند.

$$P_n = \varepsilon_0 \chi_n E_n = \varepsilon_0 (\chi_n' + i\,\chi_n'') E_n \qquad (۳۱.۲)$$

در اینجا χ_n بستگی به هردو دامنه های مد و فرکانس مدها دارد که این وابستگی در نتیجه ی اشباع و اثرات جفت شدگی برای قبل از آن و پدیده های پراکندگی برای بعد از آن بوجود می‌آید. با قرار دادن رابطه‌ی (۳۱.۲) در معادلات (۲۹.۲) و (۳۰.۲) می‌توان دامنه و فرکانس مدآن را تعیین کرد.

$$E_n^0 = \frac{-1}{2}\frac{v}{\varphi_n}E_n - \frac{1}{2}v\,\chi_n'' E_n$$

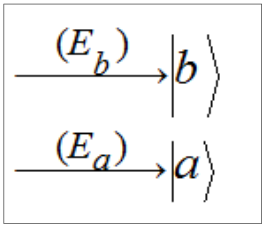
$$v_n + \dot{\varphi}_n = \Omega_n - \frac{1}{2}v\,\chi_n' \qquad (۳۲.۲)$$

$$\chi = \chi' + i\,\chi''$$

٤.۲- ماده برای یک سیستم دو ترازی:

تا به حال توصیفی از میدان حفره برحسب پلاریزاسیون ماکروسکوپی مربوط به محیط داشتیم. حال ارتباط دادن این پلاریزاسیون ماکروسکوپی به صورت تابعی از میدان الکتریکی و خواص اتمی محیط فعال لازم است. برای انجام این کار معادلات (۲۹.۲) و(۳۰.۲) به عنوان معادلات سیستم به کار گرفته شده اند وقادرند رفتار دامنه و فاز میدان را بدهند. برای محاسبه ی کوانتومی P نیاز به ماتریس دانسیته است. فرض می شود که محیط فعال از مجموعه سیستم های اتمی دو ترازی تشکیل شده باشد. بنابراین فضای هیلبرت مورد نیاز دو بعدی و هر حالت اتم در این فضا را $|\psi(t)\rangle$نمایش می دهیم. اگر حالت‌های تراز های پایینی و بالایی را به ترتیب با $|a\rangle$و $|b\rangle$نشان دهیم.

$$|\psi(t)\rangle = C_a|a\rangle + C_b|b\rangle$$



شکل ۱.۲ : ساختار دو ترازی همگن

با توجه به معادله ی شرودینگر:

$$i\hbar\frac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t} = H\,|\psi(t)\rangle \qquad (۳۳.۲)$$