بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه
بخش ریاضی

پایان‌نامه تحصیلی برای دریافت درجه دکتری
رشته ریاضی محض

قاب‌های جبری و تبدیل فوریه‌ی کوته زمان جهتی

مؤلف:
حسین حسینی گیو

اساتید راهنما:
دکتر مهدی رجبعلی پور
دکتر عطاالله عسکری همت

شهریور ماه ۱۳۹۱

این پایان‌نامه به عنوان یکی از شرایط احراز درجه‌ی دکتری به

بخش ریاضی

دانشکده ریاضی و رایانه
دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: حسین حسینی گیو	امضاء:
استاد راهنمای اول: دکتر مهدی رجبعلی پور	امضاء:
استاد راهنمای دوم: دکتر عطاالله عسکری همت	امضاء:
داور اول : دکتر عباس سالمی	امضاء:
داور دوم: دکتر اکبر نظری	امضاء:
داور سوم: دکتر محمدعلی دهقان	امضاء:
نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر امید پورحیدری	امضاء:

تقدیم به

همسر مهربانم سرکار خانم

الهام ترابی

تشکر و قدردانی

هر نتیجه‌ی مطلوبی که در زندگی یک فرد حاصل می‌شود ثمره‌ی مساعدت‌ها، فداکاری‌ها و حمایت‌های افراد زیادی است که با آن شخص در تعامل بوده‌اند. به این دلیل، اگر امروز این رساله‌ی دکتری پیش روی شما قرار گرفته، مطمئناً نمی‌توان مدعی شد که همه‌ی کار توسط نگارنده صورت پذیرفته است. در این‌جا مایلم با کمال احترام از افرادی که بیشترین سهم را در شکل‌گیری این رساله داشته‌اند سپاس‌گزاری کنم.

بدون تردید اولین نفر استاد راهنمای بزرگوارم آقای پروفسور مهدی رجبعلی‌پور هستند. بدون حمایت‌ها و راهنمایی‌های بی‌دریغ ایشان، نگارش این رساله و حصول نتایج علمی مربوط به آن غیر ممکن به نظر می‌رسید. مطالبی که در دوره‌ی دکتری از این استاد فرهیخته آموختم نقش بسیار زیادی در بهبود درک من از ریاضیات داشته است.

آقای دکتر عطاالله عسکری همت، استاد راهنمای دوم بنده، در فراگیری پایه‌های آنالیز هارمونیک و یادگیری روش تحقیق کمک زیادی به من کرده‌اند که بدین‌وسیله از ایشان تشکر می‌کنم. ایشان در انجام امور تحقیقاتی مربوط به این رساله نیز همراهی و راهنمایی‌های ارزنده‌شان را به هیچ وجه از من دریغ نکردند.

از اساتید محترم داور این رساله، آقایان دکتر عباس سالمی، دکتر محمدعلی دهقان و دکتر اکبر نظری بخاطر مطالعه‌ی دقیق پایان‌نامه و نظرات راه‌گشایی که ارائه فرمودند تشکر می‌کنم.

مرحوم پدرم آقای ابوطالب حسینی گیو نخستین مشوق من برای تحصیل ریاضیات

بودند. بر این باورم که بهترین میراثی که از ایشان برایم به‌جای مانده علاقه به ریاضیات است. در این‌جا از تمامی زحماتی که این مرد بزرگ برای من کشیده تشکر می‌کنم و امیدوارم روح پاکش قرین رحمت و آرامش باشد.

از همسر بزرگوارم سرکار خانم الهام ترابی بخاطر صبر، فداکاری و محبت‌های بی دریغش سپاس‌گزاری می‌کنم. اگر حمایت‌های همه جانبه‌ی ایشان در طی این سال‌ها نبود، بدون شک تحصیل من در مقاطع تحصیلات تکمیلی امکان‌پذیر نبود.

در خاتمه از دوست بسیار عزیزم جناب آقای سید احمد موسوی تشکر می‌کنم که کمک‌ها و راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان سبب بهبود کیفیت تایپ این متن گردید.

حسین حسینی گیو

مقدمه

مطالب اصلی این پایان‌نامه به دو بخش عمده تقسیم می‌شوند که هر یک مفاهیم و نتایجی جدید به بخشی از آنالیز هارمونیک اضافه می‌کند. بطور مختصر، یک بخش توسیعی از مفهوم قاب تعمیم یافته برای فضاهای هیلبرت را ارائه می‌کند که موضوع فصل ۲ می‌باشد، و دیگری گونه‌ای از تبدیل فوریه‌ی کوته زمان را معرفی می‌کند که از خاصیت حساسیت نسبت به جهت برخوردار بوده و در فصل ۳ مورد مطالعه قرار می‌گیرد. فصل ۱ نیز به مقدمات و پیش‌نیازهای لازم برای مطالعه‌ی فصول بعدی و همچنین ایجاد انگیزه برای مسائل اصلی مورد بحث اختصاص دارد. اکنون شایسته است تا به اختصار به توصیف سیر تاریخی تحقیقاتی که منجر به نتایج این پایان‌نامه گردیدند بپردازیم.

مفهوم قاب برای یک فضای هیلبرت در سال ۱۹۵۲ توسط دوفین و شِیفر [۱] [۲۱] و برای مطالعه‌ی مسائل مربوط به سری‌های فوریه‌ی ناهمساز مطرح شد. این مفهوم تا سال ۱۹۸۶ چندان مورد توجه ریاضیدانان نبود، تا این که در این سال مقاله‌ی تاثیرگذار [۱۷] توسط دوبِشی، گراسمان و مِیر [۲] به چاپ رسید. در این کار تحقیقاتی، مولفین تنها با اثر عملگرهای انتقال و مدولاسیون بر یک عضو $L^2(\mathbb{R})$، یک قاب برای این فضا ساختند. اثبات وجود این نوع قاب، که امروزه به قاب گابور [۳] معروف است، سبب شد

[۱] Duffin and Schaeffer

[۲] Daubechies, Grossmann and Meyer

[۳] Gabor

تا مفهوم قاب مورد اقبال و توجه ریاضیدانان قرار گیرد بطوریکه امروزه نظریه‌ی قاب‌ها یکی از شاخه‌های فعال و حجیم ریاضیات نوین را تشکیل می‌دهد. این نظریه در جهات مختلفی رشد کرده که از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به نظریه‌ی قاب برای فضاهای باناخ [۱۰، ۱۱، ۳۶، ۶۵] ، قاب‌های موجکی [۱۵، ۴۱] و قاب‌های تعمیم یافته [۴۷، ۴۸] اشاره کرد.

این آخرین مفهوم، یعنی قاب تعمیم یافته، که نخستین بار توسط کِیزِر [1] [۴۸] مطرح شد، توسیعی از مفهوم قاب برای فضاهای هیلبرت است که تبدیلات موجکی پیوسته و فوریه‌ی کوته زمان را به عنوان حالت خاص در بر می‌گیرد [۲۴، ۳۹، ۴۰، ۴۷]. با این حال، به سادگی می‌توان دید که تبدیل‌های فوریه [2] و زک [3] به عنوان حالت خاصی از این نوع قاب‌ها مطرح نیستند. همین امر انگیزه‌ای شد تا توسیعی از قاب‌های تعمیم یافته موسوم به قاب جبری ارائه کنیم که دو تبدیل اخیر را نیز به عنوان حالات خاص خود بپذیرد. قاب‌های جبری و مفاهیم و موضوعات مرتبط با آن‌ها همچون قاب‌های تحلیلی، عملگرهای تحلیل، ترکیب و قاب و فرمول بازسازی در فصل ۲ مطالعه می‌شوند. در این فصل همچنین چند قضیه‌ی نظریه اندازه‌ای مطرح می‌شوند که مهم‌ترین آنها، در مورد گسستگی قاب‌های تحلیلی، قضیه‌ی اثبات شده در [۴] برای قاب‌های تعمیم یافته را توسیع می‌دهد.

بحث مهم دیگر در این پایان‌نامه معرفی یک تبدیل انتگرالی موسوم به تبدیل فوریه‌ی کوته زمان جهتی است. به بیان نادقیق، یک تبدیل انتگرالی نگاشتی خطی است که تابع مناسبی را توسط یک رابطه‌ی انتگرالی به تابعی دیگر می‌نگارد. به لحاظ تاریخی، تبدیلات انتگرالی نخستین بار در کار لاپلاس [4] در نظریه‌ی احتمالات، در حدود سال

[1] Kaiser

[2] Fourier

[3] Zak

[4] Laplace

۱۷۸۰ میلادی، و رساله‌ی فوریه در مورد انتقال حرارت ظاهر شدند. تبدیلات انتگرالی امروزه کاربردهای فراوانی در فیزیک و مهندسی یافته‌اند که عمده‌ی آن‌ها مرتبط با حل مسائل مقدار مرزی و معادلات انتگرالی هستند [۲۰، ۱۸، ۵۴، ۲۳].

از جمله تبدیلات انتگرالی بسیار مهم، تبدیل فوریه است که از دیرباز کاربردهای فراوانی در تحلیل و پردازش سیگنال‌ها داشته است. از نقطه نظر فیزیک، این تبدیل محتوای فرکانسی یک سیگنال را که به صورت تابعی در حوزه‌ی زمان تعریف شده است مشخص می‌کند. لذا هر سیگنال در آنالیز فوریه دارای دو نمایش است، یکی نمایش در حوزه‌ی زمان که همان تابع مشخص کننده‌ی سیگنال است، و دیگری نمایش در حوزه‌ی فرکانس که تبدیل فوریه‌ی تابع مذکور است. به مرور زمان مشخص گردید که آنالیز زمان و آنالیز فرکانس که از مطالعه‌ی سیگنال در دو حوزه‌ی زمان و فرکانس حاصل می‌شوند باید جای خود را به یک آنالیز زمان-فرکانس بدهند. نخستین تلاش در این زمینه توسط گابور [۲۸] و با تعریف تبدیل فوریه‌ی کوته زمان صورت گرفت. این تبدیل به نوعی یک آنالیز فوریه‌ی موضعی شده در حوزه‌ی زمان بدست می‌هد و در قلب شاخه‌ای از ریاضیات موسوم به آنالیز زمان-فرکانس قرار دارد (برای یافتن توضیحات بیشتر در مورد این مبحث به [۳۸، ۱۴] مراجعه کنید).

تبدیل انتگرالی دیگری که در زمینه‌ی پردازش سیگنال‌ها دارای اهمیت است تبدیل موجکی پیوسته نام دارد. در سال ۱۹۸۲، مرلت [۱] متخصص فرانسوی ژئوفیزیک، ایده‌ی تبدیل موجکی را کشف کرد که ابزار ریاضی جدیدی برای تحلیل امواج زمین لرزه به شمار می‌آمد. مهم‌ترین پیشرفت در ارتباط با نظریه‌ی موجک‌ها، حداقل تا جایی که به بحث فعلی ما مربوط می‌شود، در سال ۱۹۹۸ با ارائه‌ی گونه‌ای از تبدیل موجکی رخ داد که از خاصیت حساسیت نسبت به جهت برخوردار بود. این کار توسط کَندِ [۲] [۶، ۷، ۸]

[۱] J. Morlet

[۲] Candés

انجام شد. تبدیل معرفی شده توسط کَندِ انگیزه‌ی ما در معرفی گونه‌ای جهتی از تبدیل فوریه‌ی کوته زمان موسوم به تبدیل فوریه‌ی کوته زمان جهتی گردید که در فصل ۳ تعریف و بررسی می‌شود. این ایده بدان دلیل به نظر رسید که تبدیل‌های موجکی پیوسته و فوریه‌ی کوته زمان را می‌توان در قالب نظریه‌ی نمایش‌های انتگرال‌پذیر مربعی بطور همزمان مورد مطالعه قرار داد [۳۹، ۴۰، ۲۷]، و لذا وقتی گونه‌ای جهتی از یکی مطرح می‌شود، احتمال یافتن چنین گونه‌ای از دیگری بسیار زیاد به نظر می‌رسد.

در فصل ۳ و برای تبدیل جهتی مذکور یک رابطه‌ی تعامد، فرمول‌های بازسازی ضعیف، نقطه‌ای و تقریبی را اثبات کرده و ارتباط آن را با تبدیل رادون بدست می‌آوریم. همچنین، نشان می‌دهیم که با اعمال شرایط قوی‌تری بر توابع مورد مطالعه، تبدیل فوریه‌ی کوته زمان جهتی به یک تبدیل فوریه‌ی کوته زمان یک بعدی تبدیل می‌شود. بعلاوه، مشابه نامساوی هاوسدورف-یانگ را برای تبدیل جهتی به اثبات می‌رسانیم.

لازم به ذکر است که در سال ۲۰۰۸، گرافاکاس و سن‌سینگ [1] [۳۵] نیز یک آنالیز زمان-فرکانس جهتی پایه‌ریزی کردند که البته رویکرد آن‌ها با روش ما تفاوت دارد.

در فصل ۱، علاوه بر ارائه‌ی پیش‌نیازهای مورد استفاده، مفاهیمی چون قاب، قاب تعمیم یافته، تبدیل فوریه‌ی کوته زمان، تبدیل موجکی پیوسته و تحقیقات انجام شده توسط کَندِ، گرافاکاس و سن‌سینگ را بطور اجمالی مرور می‌کنیم.

[1] Grafakos and Sansing

چکیده

موضوعات اصلی مطرح شده در این پایان‌نامه به دو قسمت تقسیم می‌شوند که هریک مفاهیم و نتایجی جدید به شاخه‌ای از آنالیز هارمونیک می‌افزایند. یک قسمت از کار به معرفی توسیعی از قاب‌های تعمیم یافته موسوم به قاب جبری اختصاص دارد. این گونه‌ی جدید از قاب‌ها تبدیل فوریه بر گروه‌های موضعاً فشرده‌ی آبلی و تبدیل زک تعریف شده بر $\mathbb{R}^n$ را نیز به عنوان حالاتی خاص دربر می‌گیرد، بدین مفهوم که هر کدام از تبدیلات مذکور را می‌توان به عنوان عملگر تحلیل یک قاب جبری در نظر گرفت. این در حالیست که تبدیلات فوق عملگر تحلیل هیچ قاب تعمیم یافته‌ای نیستند. برای قاب‌های جبری عملگرهای تحلیل، ترکیب و قاب به همراه مفهوم دوگان متعارف معرفی شده‌اند و یک فرمول بازسازی نیز به اثبات رسیده است. همچنین، قضایایی در مورد ساختار نظریه اندازه‌ای قاب‌های جبری اثبات شده که مهم‌ترین آن‌ها قضیه‌ای در مورد گسستگی قاب‌های تعمیم یافته را توسیع می‌دهد.

قسمت دیگر معرفی گونه‌ای از تبدیل فوریه‌ی کوته زمان است که امکان مطالعه‌ی محتوای فرکانس یک سیگنال در جهت مورد نظر را به ما می‌دهد. این بدان دلیل است که با این تبدیل می‌توانیم در جهت‌های دلخواه از توابع مورد مطالعه تبدیل فوریه بگیریم. از اینرو، تبدیل مذکور را تبدیل فوریه‌ی کوته زمان جهتی نامیده‌ایم. برای این تبدیل یک رابطه‌ی تعامد، فرمول‌های بازسازی ضعیف، نقطه‌ای و تقریبی اثبات شده و ارتباط آن با تبدیل رادون بدست آمده است. همچنین، نشان داده‌ایم که با اعمال شرایط قوی‌تری بر توابع مورد مطالعه، تبدیل فوریه‌ی کوته زمان جهتی به یک تبدیل فوریه‌ی کوته زمان یک بعدی تبدیل می‌شود. بعلاوه، مشابه نامساوی هاوسدورف-یانگ برای تبدیل جهتی به اثبات رسیده است.

کلمات کلیدی: قاب تعمیم یافته، قاب جبری، تبدیل فوریه‌ی کوته زمان جهتی.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

۱.۱ پیش‌نیازها

دراین بخش به ارائه‌ی مفاهیم و نتایجی که در فصل‌های آتی مورد استفاده قرار خواهند گرفت می‌پردازیم. برای شروع در زیربخش ۱.۱.۱ تبدیل فوریه را برای گروه‌های موضعاً فشرده‌ی آبلی تعریف می‌کنیم. اهمیت تبدیل فوریه در این پایان‌نامه از دو جهت قابل بررسی است. نخست این که تبدیل مذکور الگوی ما برای تعریف قاب‌های جبری در فصل ۲ است. دیگر این‌که در فصل ۳ گونه‌ای از تبدیل فوریه‌ی کوتاه زمان معرفی خواهد شد که بدون تبدیل فوریه و نتایج مرتبط با آن به بسط و گسترشی که شایسته‌ی آن است نخواهد رسید. در زیربخش ۲.۱.۱ تبدیل زک بر $\mathbb{R}^n$ را معرفی می‌کنیم. این تبدیل نیز مثالی از یک تبدیل انتگرالی است که در چارچوب قاب‌های تعمیم یافته نمی‌گنجد ولی به عنوان حالت خاصی از قاب‌های جبری قابل مطالعه است. محتوای زیربخش ۳.۱.۱ تبدیل رادون است که تبدیلی حساس نسبت به جهت می‌باشد. در فصل ۳ از این تبدیل برای رسیدن به درک بهتری از تبدیل جهتی استفاده خواهیم کرد. در زیربخش ۴.۱.۱ قضایای تجزیه‌ی قطبی برای عملگرهای کراندار و عملگرهای بی‌کران و بسته ارائه

می‌شوند، و در زیربخش آخر، چند نامساوی را که در فصل ۳ به کار می‌روند یادآوری می‌کنیم.

۱.۱.۱ تبدیل فوریه

آنالیز هارمونیک غیرجابجایی شاخه‌ای از ریاضیات محض است که تمرکز عمده‌ی آن بر گروه‌های توپولوژیک و آنالیز روی آن‌هاست. کتاب‌های فلند [۱] [۲۴] و هویت و راس [۲] [۴۴، ۴۵] منابع ارزشمندی برای این مبحث به شمار می‌آیند که می‌توان برای کسب اطلاعات بیشتر به آن‌ها مراجعه کرد. همچنین، کتاب‌های [۳۳، ۳۴] مرجع بسیار کاملی در ارتباط با تبدیلات فوریه‌ی کلاسیک به شمار می‌آیند. هدف ما در این زیربخش صرفاً مرور مفاهیم مقدماتی مرتبط با تبدیل فوریه بر گروه‌های موضعاً فشرده‌ی آبلی است.

فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده‌ی آبلی باشد. می‌دانیم که G مجهز به اندازه‌ی انتقال-پایای μ است که تا حد ضرب در یک ثابت مثبت یکتا می‌باشد. یک سرشت برای G همریختی پیوسته‌ای از G به توی گروه $\mathbb{T}$ (متشکل از تمام اعداد مختلط با مدول ۱ تحت عمل ضرب) است و مجموعه‌ی تمام سرشت‌های G با $\widehat{G}$ نمایش داده می‌شود. مجموعه‌ی $\widehat{G}$ را می‌توان با تعریف ضرب نقطه‌ای عناصر آن به عنوان عمل گروه به یک گروه تعویض‌پذیر تبدیل نمود که با مجهز شدن به توپولوژی همگرایی فشرده تبدیل به یک گروه بطور موضعی فشرده‌ی تعویض‌پذیر می‌شود. یادآوری می‌کنیم که در این توپولوژی، یک پایه‌ی همسایگی در تابع $\eta_\circ$ توسط مجموعه‌های

$$N(\eta_\circ;\varepsilon,K) := \{\eta:\ |\eta(x)-\eta_\circ(x)| < \varepsilon \ for\ x\in K\},$$

[۱] Folland

[۲] Hewit and Ross

فراهم می‌گردد که در آن ε بر اعداد مثبت و K بر زیرمجموعه‌های فشرده‌ی G تغییر می‌کند. گروه $\widehat{G}$ که اغلب دوگان گروه G نامیده می شود از اهمیت ویژه‌ای در انجام آنالیز روی G برخوردار است. نخستین جلوه‌ی این اهمیت در تعریف تبدیل فوریه بر G ظاهر می‌شود.

تعریف ۱.۱.۱. تبدیل فوریه‌ی تابع $f \in L^1(G)$ تابع $\widehat{f}$ است که بر $\widehat{G}$ به‌صورت

$$\widehat{f}(\eta) = \int_G f(t)\, \overline{\eta(t)}\, d\mu(t) \tag{۱.۱}$$

تعریف می شود.

توجه کنید که چون $f \in L^1(G)$ و با استفاده از تعریف $\widehat{G} \subset L^\infty(G)$، انتگرال واقع در سمت راست (۱.۱) بطور مطلق همگراست.

در حالت خاص $G = \mathbb{R}^n$، دوگان $\widehat{G}$ را می‌توان از طریق نگاشت $\eta \in \mathbb{R}^n \mapsto E_\eta$ با G یکی گرفت که در آن $E_\eta : t \in \mathbb{R}^n \mapsto e^{2\pi i\eta.t}$. از اینرو،تبدیل فوریه‌ی تابع f متعلق به $L^1(\mathbb{R}^n)$ به‌صورت

$$\widehat{f}(\eta) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-2\pi i\eta.t} dt,\ \forall \eta \in \mathbb{R}^n \tag{۲.۱}$$

در می‌آید که در آن dt انتگرال‌گیری نسبت به اندازه‌ی لبگ بر $\mathbb{R}^n$ را نشان می‌دهد.

فرایند بازیابی تابع اصلی f از تبدیل فوریه‌ی آن به وارون‌گیری فوریه مشهور است. در آنالیز فوریه، دو قضیه‌ی بازیابی مهم موجودند که پیش از بیان آن‌ها لازم است برخی مفاهیم و نمادها معرفی گردند.

یک اندازه‌ی رادون [۱] بر فضایی موضعاً فشرده و هاسدورف اندازه‌ی بورلی است که بر مجموعه‌های فشرده متناهی است، بر تمام مجموعه‌های برل منظم خارجی است و بر مجموعه‌های باز منظم داخلی است.

---

[۱] Radon

پیچش توابع $f,g\in L^1(G)$ تابع $f*g$ است که برای $x\in G$ با

$$f*g(x)=\int_G f(t)\ g(t^{-1}x)\ d\mu(t)$$

تعریف می‌گردد. به کارگیری قضیه‌ی فوبینی نشان می‌دهد که انتگرال فوق برای تقریباً تمام x ها مطلقاً همگراست و $||f*g||_1\leq ||f||_1\ ||g||_1$. سپس نتیجه می‌شود که با مجهز نمودن $L^1(G)$ به ضرب پیچشی و برگشت $f^*(x):=\overline{f(x^{-1})}$، این فضا به یک $*$-جبر باناخ تبدیل می‌شود.

یک تابع مثبت‌گونه بر G تابعیست چون $\phi\in L^\infty(G)$ که تابعک خطی مثبتی بر $*$-جبر باناخ $L^1(G)$ تعریف می‌کند، یعنی، برای هر $f\in L^1(G)$،

$$\int_G f^* * f(t)\ \phi(t)\ d\mu(t)\geq 0.$$

حال فرض کنید $M(\widehat{G})$ فضای تمام اندازه‌های مختلط رادون بر $\widehat{G}$ باشد. در این صورت هر $\lambda\in M(\widehat{G})$ تابع پیوسته و کران‌دار ϕ_λ را بر G به شکل

$$\phi_\lambda(x):=\int_{\widehat{G}}\eta(x)\ d\lambda(\eta)$$

تعریف می‌کند. اکنون فضای $\mathbf{B}(G)=\{\phi_\lambda:\lambda\in M(\widehat{G})\}$ پیمای خطی $\mathcal{P}(G)$، فضای تمام توابع پیوسته‌ی مثبت‌گونه بر G است [۲۴، صفحه‌ی ۹۶].

برای هر $p<\infty$ فضای $\mathbf{B}^p:=\mathbf{B}(G)\cap L^p(G)$ را در نظر بگیرید. چون پیمای خطی $C_c(G)\cap\mathcal{P}(G)$ در $L^2(G)$ نسبت به نرم L^2 چگال است [۲۴، گزاره‌ی ۳.۳۳]، قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد که مجموعه‌ی $\{f\in L^1(G):\widehat{f}\in L^1(\widehat{G})\}$ در $L^2(G)$ چگال است.

قضیه ۲.۱.۱. (اولین قضیه‌ی وارون‌گیری فوریه) اگر $f\in\mathbf{B}^1$، آن‌گاه $\widehat{f}\in L^1(\widehat{G})$.

بعلاوه، اندازه‌ی هار $\widehat{\mu}$ بر $\widehat{G}$ موجود است به قسمی که فرمول بازسازی زیر برای هر چنین تابع f ی برقرار است:

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\eta)\eta(x)d\widehat{\mu}(\eta), \forall x \in G.$$

اندازه‌ی هار $\widehat{\mu}$ از $\widehat{G}$ که در قضیه‌ی بالا معرفی شد اندازه‌ی دوگان μ نامیده می‌شود. می‌توان نشان داد که وقتی $\widehat{G}$ به این اندازه مجهز شده باشد، قضیه‌ی مشهور زیر به اثبات می‌رسد.

قضیه ۳.۱.۱. (قضیه‌ی پلانشرل) تبدیل فوریه تعریف شده بر $L^1(G) \cap L^2(G)$ بطور یکتا به عملگری یکانی از $L^2(G)$ بروی $L^2(\widehat{G})$ توسیع می‌یابد.

دومین قضیه‌ی وارون‌گیری فوریه که در قضیه‌ی بعد بیان می‌شود، نتیجه‌ای از قضیه‌ی دوگانی پنتریاگین [1] است [۲۴، قضیه‌ی ۴.۳۱].

قضیه ۴.۱.۱. (دومین قضیه‌ی وارون‌گیری فوریه) اگر $f \in L^1(G)$ و $\widehat{f} \in L^1(\widehat{G})$، آن‌گاه برای تقریباً تمام $t \in G$ ها،

$$f(t) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\eta)\ \eta(t)\ d\widehat{\mu}(\eta).$$

اگر f پیوسته باشد، رابطه‌ی بالا برای هر x برقرار است.

می‌توان نشان داد که در پرتوی یکی گرفتن $\widehat{\mathbb{R}^n}$ با $\mathbb{R}^n$، اندازه‌ی لبگ دوگان خودش می‌باشد [۲۴، مثال ۱ صفحه‌ی ۹۸]. این نشان می‌دهد که قضیه‌ی وارون‌گیری فوریه ۴.۱.۱ به قضیه‌ی زیر برای توابع تعریف شده بر $\mathbb{R}^n$ کاهش می‌یابد.

[1] Pontrjagin

قضیه ۵.۱.۱. اگر $f, \widehat{f} \in L^{1}(\mathbb{R}^n)$، آن‌گاه برای تقریباً تمام $t \in \mathbb{R}^n$ ها

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(w)\ e^{2\pi i w.t}\ dw.$$

اگر f پیوسته باشد، رابطه‌ی فوق برای هر t برقرار است.

در نهایت به یادآوری تعریف فضای شوارتز [1] $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ می‌پردازیم [۲۵]. این تعریف در ارتباط با قضیه‌ی ۵.۱.۱ مطرح می‌شود، زیرا $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^{1}(\mathbb{R}^n)$ نتیجه می‌دهد که $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^{1}(\mathbb{R}^n)$. بعلاوه، از این مفهوم در زیربخش ۴.۲.۱ استفاده شده است. فضای $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ از تمام توابع f تعریف شده بر $\mathbb{R}^n$ تشکیل شده است که مشتقات جزئیشان از هر مرتبه‌ای موجود و پیوسته بوده و برای هر عدد صحیح نامنفی N و هر n تایی $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ از اعداد صحیح نامنفی، $||f||_{(N,\alpha)} < \infty$ که در آن

$$||f||_{(N,\alpha)} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N\ |\partial^\alpha f(x)|.$$

در این‌جا

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} ... \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

۲.۱.۱ تبدیل زک بر $\mathbb{R}^n$

تبدیل زک برای نخستین بار توسط گلفاند [2] [۲۹] برای حل سوالی در زمینه‌ی معادلات دیفرانسیل به‌کار گرفته شد. تعریف این تبدیل برای گروه‌های موضعاً فشرده‌ی آبلی و نسبت به زیرگروه‌های بسته‌ی دلخواه منسوب به وِیل [3] [۶۲] است. در طی سال‌های بعد،

[1] Schwartz

[2] Gelfand

[3] Weil

تبدیل زک بارها و بارها مورد استفاده قرار گرفت. از جمله، زک [1] [۶۳، ۶۴] برای کار در زمینه‌ی فیزیک حالت جامد و برزین [2] [۵] برای تحقیق در حیطه‌ی معادلات دیفرانسیل از این تبدیل استفاده کردند. رواج تبدیل زک به عنوان یک تبدیل موفق عمدتاً مدیون مقاله‌ی تاثیرگذار جانسن [3] [۴۶] است.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید $\alpha > 0$ یک پارامتر باشد. تبدیل زک $Z_\alpha f$ تابع f تعریف شده بر $\mathbb{R}^n$ عبارتست از

$$Z_\alpha f(x,w) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(x-\alpha k)\; e^{2\pi i\alpha k.w}. \qquad (۳.۱)$$

اعمال شرایط گوناگون بر f خواص مختلفی را برای تابع $Z_\alpha f$ بدست می‌دهد. این حقیقت در گزاره‌ی ۸.۱.۱ آشکار خواهد شد، لیکن پیش از طرح آن به تعریف فضای وینر [4] می‌پردازیم. ابتدا برای هر $\alpha > 0$ قرار می‌دهیم $Q_\alpha := [0,\alpha]^n$.

تعریف ۷.۱.۱. تابع $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ به فضای وینر $W(\mathbb{R}^n)$ تعلق دارد اگر

$$||g||_W := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} ess \sup_{x\in Q_1} |g(x+n)| < \infty.$$

زیرفضای $W(\mathbb{R}^n)$ متشکل از توابع پیوسته با $W_0(\mathbb{R}^n)$ نمایش داده می‌شود.

گزاره ۸.۱.۱. **([۳۸])** فرض کنید f تابعی تعریف شده بر $\mathbb{R}^n$ باشد.

۱. اگر $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$، آن‌گاه $Z_\alpha f \in L^1(Q_\alpha \times Q_{1/\alpha})$؛

---

[1] Zak

[2] Brezin

[3] Janssen

[4] Wiener