دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی‌ارشد

ریاضی محض (هندسه)

موضوع:

گروه همدیس منیفلدهای فینسلری

تهیه کننده:

هنگامه رئیسی دهکردی

استاد راهنما:

دکتر بهروز بیدآباد

استاد مشاور:

دکتر ناصر بروجردیان

زمستان ۱۳۸۶

بسمه تعالی

شماره:

تاریخ : ۸۷/۴/۱۰

فرم اطلاعات پایان نامه

کارشناسی ارشد و دکترا

معاونت پژوهشی

۱-مشخصات دانشجو

نام و نام خانوادگی: هنگامه رییسی دهکردی دانشجوی آزاد ■ بورسیه ☐ معادل ☐

شماره دانشجویی : ۸۴۱۱۳۰۱۸ دانشکده : ریاضی و علوم کامپیوتر رشته تحصیلی : ریاضی محض (هندسه)

نام و نام خانوادگی استاد راهنما : دکتر بهروز بیدآباد

عنوان به فارسی : گروه همدیس منیفلد های فینسلری

عنوان به انگلیسی : **On the conformal group of Finsler manifolds**

نوع پروژه: کاربردی ☐ بنیادی ☐ توسعه ای ☐ نظری ■

تاریخ شروع : ۸۵/۷/۱ **تاریخ خاتمه : ۸۶/۱۱/۱۳** **تعداد واحد : ۶**

سازمان تأمین کننده اعتبار :

واژه های کلید به فارسی :

تبدیلات همدیس – متریک فینسلر – متریک بروالد – تبدیلات آفین - گروه لی.

واژه های کلیدی به انگلیسی :

Finsler metric – Riemannian metric – conformal transformation – Lie group – affine transformation

نظرها و پیشنهادها به منظور بهبود فعالیت های پژوهشی دانشگاه :

تقدیم‌نامه

تقدیم به همسر مهربانم که همواره در کوره راههای زندگی فانوس راهم بود

قدردانی

سپاس به درگاه بی‌کران ایزد که چراغ علم را فروغ راهم ساخت و دانش قلیل مرا از علم نامحدود خویش نیرو بخشید تا بتوانم وظیفه خویش را به پایان برسانم.
از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای عزیزم جناب آقای دکتر بهروز بیدآباد که نه تنها استاد من در کسب علم و دانش، بلکه استادی ارزشمند برای من در زندگی نیز بودند. از خداوند می‌خواهم فرصتی به من بدهد تا شاید بتوانم گوشه‌ای از زحمات ایشان را جبران نمایم.
همچنین از زحمات استاد مشاورم جناب آقای دکتر ناصر بروجردیان و جناب آقای دکتر رضوی و سرکار خانم آسنجرانی، که در طول این پایان‌نامه زحمات زیادی برایشان متحمل نمودم و جناب آقای دکتر رضایی که زحمت داوری این پایان‌نامه را کشیدند، سپاس فراوان دارم.
در پایان از همسر عزیزم که با سعه‌صدر و تحمل مشکلات، محیطی را فراهم آورد تا بتوانم این بار را به منزل برسانم سپاسگذارم.

چکیده

در این پایان‌نامه به مطالعه گروه تبدیلات همدیس یک منیفلد فینسلری می‌پردازیم. در حقیقت این پایان‌نامه روی مقاله [۴۱]، ارائه شده بوسیلهٔ آقای زغیب[۱]، که در آن قضیه‌ای از حالت ریمانی به حالت فینسلری تعمیم داده شده است، بنا شده است.

بعد از آوردن مقدمات لازم، اثبات قضیه مذکور، بررسی شده است که آن با استفاده از تکنیک‌هایی از هندسه، توپولوژی و آنالیز در چند گام انجام شده است. در پایان در مورد مفهوم جدیدی از همواری صحبت شده است و صورت جدید قضیه مذکور با توجه به آن بیان شده است.

یک دلیل انتخاب این مقاله این بود که در آن تکنیک‌هایی جدید برای اثبات آورده شده بود که با درک این تکنیک‌ها می‌توان قضایای دیگری را از ریمانی به فینسلری تعمیم داد.

کلمات کلیدی: متریک فینسلر – متریک بروالد – تبدیلات همدیس – گروه لی – تبدیلات آفین

---

[۱] Zeghib

فهرست مندرجات

مقدمه

هندسه فینسلری شاخه جدیدی از هندسه می‌باشد که کاربرد فراوانی در علوم مختلف از جمله فیزیک، هوافضا، پزشکی و ... دارد.
اولین بار نشانه‌های هندسه فینسلر در سخنرانی معروف ریمان [۲] در سال ۱۸۵۴ پدیدار گشت اما **ریمان** توجه خود را به نرم هایی که از یک ضرب داخلی ناشی می‌شوند، محدود نمود و مطالعه بقیه نرم‌ها را بی ثمر دانست و همین امر باعث گردید مطالعه این نرم‌ها و ظهور هندسه فینسلری تا سال ۱۹۱۸ به تعویق بیفتد.
در سال ۱۹۱۳ پل‌ورن فینسلر[۳] وارد دانشگاه گوتینگن [۴] شد و هندسه فینسلری با تز وی در سال ۱۹۱۸ و تحت راهنمایی‌های پروفسور **کاراتئودری** متولد شد ولی خود **فینسلر** به این متریک توجهی نشان نداد و به سمت نظریه مجموعه‌هاکشیده شد. او در ابتدا نام «هندسه‌ای با متریک تعمیم یافته» را برای هندسه خود برگزید و سپس در سال ۱۹۲۷، سینگ [۵] و تیلور[۶] آن را «هندسه فینسلری» نامیده و به کار گرفتند.
متریک‌های فینسلر را می‌توان توابع فاصله هموار روی یک منیفلد دانست. توابع فاصله‌ای که متقارن نیستند، در قالب هندسه ریمانی قابل مطالعه نیستند و باید در قالب هندسه فینسلری مورد مطالعه قرار بگیرند. از طرفی دیگر، یک منیفلد فینسلری را می‌توان یک منیفلد که خانواده‌ای هموار از نرم‌ها را در فضای مماس خودش می‌پذیرد، در نظر گرفت به طوری که طول یک منحنی هموار روی آن منیفلد را بتوان با یک انتگرال محاسبه نمود. فینسلر کسی بود که مسأله حساب تغییرات طول قوس را در یک منیفلد فینسلری مطالعه و بررسی نمود. پس از مدت کوتاهی از کارهای فینسلر، بروالد[۷] مفهوم انحنای ریمان را به فضاهای فینسلری توسیع داد و چندین کمیت غیر ریمانی را معرفی نمود. بنابراین از این نظر **بروالد** یکی از بنیان‌گذاران هندسه فینسلری محسوب می‌شود.
در دهه شصت میلادی لیچنرویز[۸] حدس خود را به صورت زیر بیان نمود. قبل از بیان آن متذکر می‌شویم که در اینجا M یک منیفلد فشرده با یک ساختار همدیس (و متریک ریمانی روی آن

---

[۲] *Riemann*
[۳] Paul Von Finsler
[۴] *Gottingen*
[۵] *Synge*
[۶] *Taylor*
[۷] *Berwald*
[۸] *Lichnerowicz*

هموار)، $conf(M)$ گروه همدیس و $conf_\circ(M)$ مؤلفهٔ خنثی آن می‌باشد.
حدس لیچنرویز: فرض کنید $conf(M)$ گروه همدیس منیفلد ریمانی M با بعد بزرگتر از یک باشد. اگر M به طور همدیس هم ارز با E^n یا S^n نباشد در این صورت $conf(M)$ غیر اساسی است. به بیان دیگر $conf(M)$ را می‌توان با تغییر همدیس متریک به گروه ایزومتری‌های روی M کاهش داد.
در سال‌ها ی ۷۳ — ۱۹۷۲ الکسیرسکی [۹] یک اثبات کلی بیان کرد که ابتدا در [۳] برای $conf_\circ(M)$ و سپس در [۴] برای $conf(M)$ اثبات را کامل نمود و کلیه تلاش‌ها برای اثبات حدس **لیچنرویز** را پایان بخشید.
استدلال **الکسیرسکی** بر روی اثبات مطلب زیر استوار بود:
فرض کنید C یک گروه بسته از خودریختی‌های یک G — ساختار از نوع متناهی روی منیفلد M باشد اگر همه زیرگروهای ایزوتروپی C فشرده باشند آنگاه C روی M به طور سره عمل می‌کند.
اثبات فوق برای مدت ۲۰ سال پایدار بود تا اینکه در سال ۱۹۹۲ زیمر [۱۰] و گوتشر[۱۱] شکاف مهمی در اثبات وی کشف کردند.
زایمر با یک مثال نقض نشان داد که مطلب فوق حتی برای منیفلد فشرده M نیز نادرست است و **گوتشر** یک مطلب نابدیهی را در اثبات **الکسیریسکی** نشان داد (به مرجع [۲۰] مراجعه نمایید) بنابراین قضیه‌ای که به طور کامل در [۴] و [۳] اثبات شده بود در حقیقت قسمت اصلی اثباتش ناقص بود.
حالت فشرده این حدس در سال ۷۱—۱۹۶۹ توسط **فراند** اثبات شد (در [۲۸] بیان و در [۲۶] اثبات کامل شد) و در سال ۱۹۹۲ فراند حدس را در دو قضیه ۱ و ۲ اثبات نمود.
قضیه ۱. اگر M به طور همدیس هم‌ارز با E^n یا S^n نباشد آنگاه $conf(M)$ روی M به طور سره عمل می‌کند (بنابراین فشرده است اگر M فشرده باشد)
قضیه ۲. اگر $conf(M)$ روی M به طور سره عمل کند غیراساسی است
اُباتا نیز در [۳۳] اثباتی را که فقط شامل $conf_\circ(M)$ می‌شد بیان نمود که در [۲۴] تکمیل گردید. سرانجام در حالت ریمانی قضیه زیر را که به قضیه **اباتا— للنگ — فراند** معروف است، داریم
قضیه ۳. [۲۳] فرض کنید که M یک منیفلد ریمانی فشرده با یک ساختار همدیس باشد. داریم
i) اگر $conf_\circ(M)$ فشرده نباشد آنگاه M به طورهمدیس هم‌ارز با کره S^n است [۳۳]
ii) وقتی $conf(M)$ به جای $conf_\circ(M)$ جایگزین شود نتیجه مشابهی برقرار است [۲۸]
هدف ما در این پایان نامه اثبات قضیه زیر است:
قضیه ۴. اگر گروه همدیس یک منیفلد فینسلر هموار فشرده، فشرده نباشد آنگاه آن منیفلد

[۹] *Alekseereskii*
[۱۰] *Zimmer*
[۱۱] *Gutschora*

کره S^n است. ما اثبات را در چند مرحله انجام می‌دهیم.
خوانندگان علاقه‌مند را به مرجع [۲۷] برای مشاهده یک گزارش از تاریخچه اثبات حالت ریمانی قضیه ارجاع می‌دهیم که امروزه به عنوان یک مثال از صلبیت هندسه – دینامیکی در نظر گرفته می‌شود برای مشاهده به روز شده این مطلب، مرجع [۱۶] را برای اثبات دینامیکی محض توصیه می‌کنیم.
قضیه مورد نظر در چند مرحله ثابت می‌گردد.
مهمترین قسمت اثبات دو گزاره زیر می‌باشد:

گزاره ۱. اگر گروه همدیس یک منیفلد فینسلر هموار فشرده پیش فشرده نباشد آنگاه آن کره S^n است.

گزاره ۲. اگر گروه همدیس یک منیفلد فینسلر فشرده، به عنوان زیرگروهی از همئومورفیسم‌ها پیش‌فشرده باشد، آنگاه فشرده نیز هست.

یک نتیجه مستقیم گزاره فوق را می‌توان به این صورت مطرح نمود که، هر گاه گروه همدیس یک منیفلد فینسلر هموار فشرده، به عنوان زیرگروهی از همئومورفیسم‌های آن منیفلد، پیش‌فشرده (بستارش فشرده باشد) باشد، آنگاه آن گروه همدیس فشرده خواهد بود.
در سراسر این پایان‌نامه، تمام قضایا و توابع از کلاس C^∞ در نظر گرفته می‌شوند (لزوم این فرض به لحاظ سادگی عملکرد می‌باشد و این مطلب خللی در روند اثبات‌ها وارد نمی‌نماید).

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مورد نیاز

در این فصل پس از یادآوری مقدماتی به بیان مطالبی از جمله تبدیلات همدیس، تبدیلات موبیوس، متریک فینسلری، فضای آفین و غیره می‌پردازیم که مفاهیمی پایه در رابطه با کار ما می‌باشند.
لازم بذکر است که همواره از نمادهای E و $\langle x,y\rangle$ به ترتیب جهت نمایش فضای برداری اقلیدسی و ضرب داخلی دو عضو از آن مانند x,y استفاده می‌کنیم و همچنین $|x| = \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$.

۱.۱ یادآوری

۱.۱.۱ معرفی چند نگاشت خاص

تعریف ۱.۱.۱ نگاشت $T : M_1 \longrightarrow M_2$ یک تبدیل [1] نامیده می‌شود هرگاه T دوسوئی بوده و T و T^{-1} دیفرانسیل پذیر باشند.

مثال ۱.۱.۱ نگاشت $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه $T(x,y) = (x+y, x-2y)$ را در نظر بگیرید، اولاً واضح است که دوسویی است و در ثانی از آنجا که T و T^{-1} خطی هستند پس دیفرانسیل پذیرند و لذا T یک تبدیل است.

تعریف ۲.۱.۱ تبدیل $P : E \longrightarrow E$ را متعامد گویند هرگاه $\forall x \in E \quad |x| = |P(x)|$ و $P(E) = E$.

---
[1] transformation

گروه $O(n)$ را که از همه تبدیلات متعامد[۲] تشکیل شده است گروه متعامد و اعضای $O^+(n) = \{A \in O(n) \ \mid \ detA = ۱\}$ را دوران [۳] گویند

توجه کنید که، در حالتی که E از بعد متناهی باشد شرط $P(E) = E$ به خودی خود از شرط دیگر نتیجه می‌شود.

لم ۱.۱.۱ اگر $P : E \longrightarrow E$ یک تبدیل متعامد باشد آنگاه داریم[۳۹]
$\langle P(x), P(y)\rangle = \langle x, y\rangle \ , \ \forall x, y \in E$

تعریف ۳.۱.۱ نگاشت $\phi : E \longrightarrow E$ یک تشابه[۴] نامیده می‌شود هرگاه دو سویی باشد و برای $\lambda \in \mathbb{R}^+$ و $R \in O(n)$ داشته باشیم
$.\phi(x) = \lambda R(x) + a \quad \forall x \in E$

تعریف ۴.۱.۱ نگاشت $f : E \longrightarrow E$ یک حرکت [۵] نامیده می‌شود اگر دو سویی باشد و
$.|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \forall x, y \in E$

قضیه ۱.۱.۱ حرکت f از E را می‌توان به صورت $f(x) = a + P(x)$ نمایش داد که در آن $a \in E$ و P تبدیل متعامدی از E است [۳۴] ص.۲۹.

۲.۱.۱ التصاق خطی

تعریف ۵.۱.۱ یک التصاق خطی (یاآفین) [۶] روی منیفلد M عبارت است از نگاشت:
$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$
$(X, Y) \ \longrightarrow \ \nabla_X Y$

به طوری که:

$$(۱)\nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y \quad \forall X, Y \in \chi(M), \ f \in C^\infty(M)$$

$$(۲)\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z \quad \forall X, Y, Z \in \chi(M), \ f, g \in C^\infty(M)$$

که در آن عملگر ∇_X را مشتق هموردا[۷] نسبت به X می‌نامند.

---

[۲] Orthogonal Group
[۳] *Rotation*
[۴] similarity
[۵] *motion*
[۶] affine or linear Connection
[۷] Covariant

در یک دستگاه مختصات (x,u) التصاق ∇ با n^3 تابع مشتق پذیر Γ^k_{ij} روی u مشخص می‌شود. این توابع از روابط زیر بدست می آیند:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}=\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x_k}$$

این توابع را نمادهای کریستوفلی نامند. این توبع پس از تغییر مختصات به صورت زیر با یکدیگر ارتباط دارند.
اگر $(\bar{x},\bar{u})$ یک دستگاه مختصات جدید باشد، داریم:

$$\bar{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}=\Gamma^k_{ij}\frac{\partial \mathrm{x^i}}{\partial \bar{\mathrm{x}}^\alpha}\frac{\partial \mathrm{x^j}}{\partial \bar{\mathrm{x}}^\beta}\frac{\bar{\partial}\mathrm{x}^\gamma}{\partial \mathrm{x^k}}+\frac{\partial^2 \mathrm{x^i}}{\partial \bar{\mathrm{x}}^\alpha \partial \bar{\mathrm{x}}^\beta}\frac{\partial \bar{\mathrm{x}}^\gamma}{\partial \mathrm{x^i}}$$

چنانچه توابع Γ^k_{ij} روی دستگاه‌های مختصات وجود داشته باشند و در روابط فوق صدق کنند آنگاه یک التصاق یکتای ∇ روی M وجود دارد که نمادهای کریستوفل آن همین توابع هستند.
پس در واقع چنانچه روی یک دستگاه مختصات داشته باشیم $X=a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y=b^i\frac{\partial}{\partial x^i}$، آنگاه ∇ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla_X Y=\nabla_{a_i\frac{\partial}{\partial x_i}}b_i\frac{\partial}{\partial x_i}=[a_i(\frac{\partial b^k}{\partial x^i}+\Gamma^k_{ij}b^j)]\frac{\partial}{\partial x^k}$$

۳.۱.۱ متریک ریمان و التصاق ریمانی

تانسور g از نوع (۲و۰) که‌در دو شرط زیر صدق می‌کند را متریک ریمان g روی منیفلد M می‌نامند.

الف) متقارن باشد: $\forall X,Y\in\chi(M) \qquad g(X,Y)=g(Y,X)$

ب) مثبت معین باشد: $g(X,X)\geq 0 \ ,g(X,X)=0\Leftrightarrow X=0$

حال اگر به جای شرط (ب) شرط زیر را داشته باشیم:

$\forall Y\in\chi(M)$ ، $g(X,Y)=0 \implies X=0$

g را متریک شبه ریمان [8] گویند.

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنید g متریک ریمان (یا شبه ریمان) روی منیفلد M باشد. التصاق خطی ∇ را سازگار [9] با متریک g نامیم هرگاه شرط زیر برقرار باشد:

$$X.g(Y,Z)=g(\nabla_X Y,Z)+g(Y,\nabla_X Z) \quad , \qquad \forall X,Y,Z\in\chi(M)$$

تعریف ۷.۱.۱ تانسور تاب τ، از یک التصاق خطی ∇، یک میدان تانسوری از نوع (۲و۱) است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$\tau:\chi(M)\times\chi(M)\longrightarrow\chi(M)$

یک التصاق خطی را متقارن گوئیم هرگاه تانسور تاب آن صفر باشد یعنی:

[8] pseudo Riemannian
[9] Compatible

$$\forall X,Y \in \chi(M) \quad , \quad \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$$

قضیه ۲.۱.۱ (لوی – چویتا) برای هر منیفلد ریمانی M، یک التصاق خطی یکتای ∇ روی M وجود دارد که در شرایط زیر صدق می‌کند:
۱)∇ متقارن است.
۲)∇ با متریک ∇ سازگاراست.
به التصاق خطی فوق التصاق ریمانی یا التصاق لوی چویتا[۱۰] می‌گویند.

۴.۱.۱ ژئودزیک

تعریف ۸.۱.۱ [۲۵] اگر M یک منیفلد ریمانی با التصاق ریمانی باشد منحنی $\gamma : I \longrightarrow M$ را در $t_\circ \in I$، ژئودزیک گوئیم هرگاه $\frac{D(\frac{d\gamma}{dt})}{dt}|_{t=t_\circ} = \circ$، که در آن $\frac{D}{dt}$ مشتق کواریان در طول خم γ است. اگر برای هر $t \in I$ داشته باشیم $\frac{D(\frac{d\gamma}{dt})}{dt}(t) = \circ$، γ را منحنی ژئودزیک گوئیم. حال اگر γ یک ژئودزیک باشد می‌توانیم نشان دهیم که $\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \rangle$ ثابت است:

$$\frac{d}{dt}\langle \frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\rangle + \langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt}\rangle = ۲\langle \underbrace{(\frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt})}_{\circ} \quad , \frac{d\gamma}{dt}\rangle = \circ$$
$$\Longrightarrow \langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\rangle = c$$

قضیه ۳.۱.۱ وجود و یکتایی ژئودزیک‌ها[۲۵] اگر M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر همراه با التصاق آفین ∇ باشد. آنگاه یک همسایگی باز از $t_\circ \in I$ و یک منحنی ژئودزیک $\gamma : I \longrightarrow M$ وجود دارد به طوری که $\gamma(t_\circ) = p \ , \ \gamma'(t_\circ) = V$ و همچنین دو منحنی ژئودزیک با دامنه مشترک، روی اشتراکشان با هم برابرند.

۵.۱.۱ گروه لی

تعریف ۹.۱.۱ یک گروه لی عبارت است از یک منیفلد (مشتق پذیر) G که دارای ساختار گروهی است و نگاشت $\theta : G \times G \longrightarrow G$ با ضابطهٔ $\theta(x,y) = xy^{-۱}$ که از هر مرتبه مشتق‌پذیر باشد

قضیه ۴.۱.۱ منیفلد مشتق پذیر G با یک ساختار گروهی، یک گروه لی است اگر و فقط اگر نگاشت‌های $A : G \times G \longrightarrow G$ با ضابطهٔ $A((x,y)) = xy$ و $B : G \longrightarrow G$ با ضابطهٔ $B(x) = x^{-۱}$، از هر مرتبه مشتق پذیر باشند.[۲۱]

---
[۱۰] Levicivita

۶.۱.۱ کلاف تاری

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنید که P و M و F منیفلد باشند. چهارتایی (P, π, M, F) را یک کلاف تاری[۱۱] می‌نامیم، هرگاه نگاشت $\pi : P \longrightarrow M$، پوشا، هموار و سوبمرسیون باشد همچنین به ازای هر $m \in M$ همسایگی باز U از M حول m و دیفئومورفیسم زیر موجود باشد

$$(\pi, \varphi) : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$$

در اینصورت زوج (φ, U) را یک کارت کلاف[۱۲] برای کلاف P و U را دامنه این کارت M را منیفلد پایه، F را تار نمونه و P را فضای کل می‌نامند. به ازای هر $p \in M$، $\pi^{-1}(p)$ یک زیرمنیفلد نشاننده P، دیفئومورف با F است که آن را با P_p نشان می‌دهیم و تار در نقطه p نام دارد.

تعریف ۱۱.۱.۱ کلاف تاری (P, π, M, F) با تار نمونه F را کلاف برداری[۱۳] می‌نامیم هرگاه F و $\pi^{-1}(p) = P_p$ به ازای هر $p \in M$، فضای برداری باشند و حول هر نقطه M کارت کلافی مانند (φ, U) موجود باشد که φ روی P_p به ازای هر $p \in U$، یک ایزومورفیسم فضای برداری باشد. در این حالت، زوج (φ, U) را یک کارت کلاف برداری برای P می‌نامند.

۲.۱ متریک فینسلر

به طور کلی یک متر فینسلر روی منیفلد M، یک خانواده از نرم‌های نه لزوماً وارون‌پذیر روی فضای مماس آن است. از آنجا که این نرم‌ها وارون پذیر در نظر گرفته نمی‌شوند، لذا تابع فاصله‌ای که توسط متر فینسلر القا می‌شود، متقارن نیست ولی در نامساوی مثلثی صدق می‌کند. وقتی این نرم‌ها همان ضرب داخلی روی فضای مماس باشند متر فینسلر، یک متر ریمانی است. لذا مترهای فینسلر تعمیمی از مترهای ریمانی هستند.

۱.۲.۱ متریک مینکوفسکی

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید V یک فضای برداری با بعد n باشد. در اینصورت نرم مینکوفسکی روی V، یک تابعک مانند F روی V است که بر $V - \{0\}$ هموار است و در شرایط زیر صدق می‌کند

---

[۱۱] fiber bundle
[۱۲] bundle chart
[۱۳] vector bundle

الف) برای هر $u \in V$، $f(u) \geq 0$

ب) برای هر $\lambda > 0$ ، $f(\lambda u) = \lambda f(u)$

ج) اگر برای هر $v_1, ..., v_n \in V$ و $y = y^i v_i$ قرار دهیم $f(y) = f(y^1, y^2, ..., y^n)$ آنگاه ماتریس هسیان [۱۴] تابع f^2 که درایه‌های آن به صورت زیر تعریف می‌شوند، مثبت معین باشد.

$$g_{ij} := \frac{1}{2}[f^2(x,y)]_{y^i y^j}$$

مثال ۱.۲.۱ اگر V یک فضای برداری باشد و برای هر $y \in V$ قرار دهیم $f(y) = \sqrt{\langle y, y \rangle}$، آنگاه f یک نرم مینکوفسکی است که آن را نرم اقلیدسی یا نرم حاصل از یک ضرب داخلی نیز می‌نامند

فرض کنید M یک منیفلد $n-$ بعدی هموار C^∞ باشد. برای هر نقطه $x \in M$ فضای مماس متناظر آن را با T_xM نمایش می‌دهیم. کلاف مماس M اجتماعی از فضاهای مماس می‌باشد که به این صورت بیان می‌شود:

$$TM := \{(x,y) | \ x \in M \ , y \in T_xM\}$$

همچنین مجموعه $TM - \{0\}$ را با TM_0 نمایش می‌دهیم.

بر اساس تعریف تابع تصویری

$$\pi : TM \longrightarrow M$$
$$\pi(x,y) = x$$

تعریف ۲.۲.۱ یک متر فینسلر عبارت است از نگاشت $f : TM_0 \longrightarrow [0, \infty)$ که دارای خواص زیر باشد:

الف) f روی TM_0 هموار باشد.

ب) برای هر $x \in M$ تحدید f به T_xM ، یک نرم مینکوفسکی است

در این صورت زوج (M, f) را یک منیفلد فینسلر گویند[٦].

فرض کنید (M, f) یک ساختار فینسلری و $x, y \in M$ باشند. برای هر منحنی هموار $\delta(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) که x را به y متصل می‌کند طول منحنی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$L(\delta) = \int_0^1 f(\delta(t)), \delta'(t))dt$$

متشابهاً طول هر منحنی قطعه‌ای هموار که x را به y می‌پیوندد را نیز می‌توان به صورت فوق تعریف نمود.

تابع فاصله d از (M, f) به صورت زیر تعریف می‌شود

[۱۴] Hessian

$$d(x,y) = \inf L(\delta) \quad , \quad \delta \in \Gamma(x,y)$$

که $\Gamma(x,y)$ نمایش تمام منحنی‌های قطعه‌ای هموار از x به y می‌باشد. در مرجع [٦] اثبات شده است که $d(x,y) \geq ۰$ (وقتی $x = y$ تساوی برقرار است) و شرط نامساوی مثلثی نیز برقرار ولی شرایط تقارن (یعنی تساوی $d(x,y) = d(y,x)$) برقرار نمی‌باشد بنابراین d در حالت کلی یک فاصله نیست.

۲.۲.۱ ایزومتری

فرض کنید (M,f) یک فضای فینسلر و d تابع فاصله f باشد. اگر چه در حالت کلی (M,d) یک فضای متریک نیست ولی می‌توان یک ایزومتری از (M,f) را مشابه حالت ریمانی به یکی از دو صورت زیر تعریف کرد.

تعریف ۳.۲.۱ یک ایزومتری از (M,f) یک نگاشت یک به یک از M به خودش است که تابع مسافت را حفظ می‌کند.[۹]

تعریف ۴.۲.۱ اگر σ یک دیفئومورفیسم از M به خودش باشد آنگاه آن را یک ایزومتری از (M,f) می‌نامند اگر برای هر $X \in T_pM$ و هر $p \in M$ داشته باشیم: [۹]

$f(d\sigma|_p(X)) = f(X)$

قضیه ۱.۲.۱ دو تعریف فوق هم ارزند[۱۵] [۹]

حال اگر دو منیفلد مجزا داشته باشیم تعریف دوم به صورت زیر بیان می‌شود:

تعریف ۵.۲.۱ فرض کنید $(M_۱,f_۱)$ و $(M_۲,f_۲)$ دو منیفلد فینسلری باشند و $h: M_۱ \longrightarrow M_۲$ یک دیفئومورفیسم باشد. در اینصورت h را ایزومتری گویند هرگاه داشته باشیم

$h^*f_۲ = f_۱$

مثال ۲.۲.۱ هر انتقال و انعکاس روی فضاهای اقلیدسی ایزومتری اند.

قضیه ۲.۲.۱ هرگاه منیفلد فینسلری (M,f) فشرده باشد آنگاه گروه تبدیلات ایزومتری آن نیز فشرده است.

اثبات: مراجعه شود به [۲]

---
[۱۵] Deng,Hou

۳.۱ عنصر حجم

تعریف ۱.۳.۱ [۳۵] فرض کنیم $X_1,...,X_k$ میدان‌های برداری روی M بوده و $U \subset M$ باز باشد. $k-$ تائی مرتب $(X_1,...,X_k)$ را یک قاب [۱۶] موضعی روی U گوئیم هرگاه برای هر $p \in M$، مجموعهٔ $\{X_1(p),...,X_k(p)\}$ یک پایه برای T_pM باشند.

یادآوری می‌کنیم که یک منیفلد را جهت پذیر گوئیم هرگاه گردایه‌ای از کارت‌های موضعی وجود داشته باشد مانند $\{\psi_\alpha, U_\alpha\}$ به طوری که $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ پوششی برای M و به ازای هر $\alpha,\beta \in A$ نگاشت $\psi_\beta o \psi_\alpha^{-1}$ دارای دترمینان ژاکوبی اکیداً مثبت روی حوزه تعریف خود یعنی $\psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$، باشد. و چنانچه چنین گردایه‌ای، $\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\}$ انتخاب شده باشد منیفلد را جهت‌دار گویند.
فرض کنید M یک منیفلد جهت‌دار با یک ساختار ریمانی و $(x_1,...,x_n)$ یک دستگاه مختصات روی همسایگی U در M باشد قرار می‌دهیم:

$$g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i} \ , \ \frac{\partial}{\partial x_j}) \ \ , \ \tilde{g} = det(g_{ij})$$

در این صورت $\tilde{g} > 0$.
حال $n-$ فرم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\omega = \sqrt{\tilde{g}} dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$$

اگر $\{y_1,...y_n\}$ دستگاه مختصات دیگری روی U باشد به آسانی می‌توان دید که

$$(\tilde{g}(y_1,....,y_n))^{\frac{1}{2}} dy_1 \wedge .... \wedge dy_n = (\tilde{g}(x_1,...,x_n))^{\frac{1}{2}} dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$$

بنابراین یک $n-$ فرم ω روی M تعریف می‌شود که در دستگاه مختصات $(x_1,...,x_n)$ به صورت فوق می‌باشد، این $n-$ فرم را عنصر حجمی یا فرم حجمی مربوط به متر ریمانی g روی منیفلد جهت‌دار M نامند. حال قبل از بیان ادامه مطالب مطلبی را در مورد حجم کره بیان می‌کنیم
فرض کنید S^{n-1} کره $n-1$ بعدی در $\mathbb{R}^n$ باشد. متر القا شده از متر $dx_1^2 + ... + dx_n^2$ روی $\mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید. چنانچه مختصات کروی یا قطبی روی کره را در نظر بگیریم کره S^{n-1} در مختصات قطبی $(\rho, \phi_1, ..., \phi_{n-1})$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$\rho = 1$

$x_1 = cos\phi_1$

$x_2 = sin\phi_1 cos\phi_2$

$x_3 = sin\phi_1 sin\phi_2 cos\phi_3$

---

[۱۶] frame

$\vdots$
$x_{n-1} = sin\phi_1 \ .... \ sin(\phi_{n-2})cos(\phi_{n-1})$
$x_n = sin\phi_1 \ .... \ sin(\phi_{n-2})sin(\phi_{n-1})$

بنابراین

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \ ... \ + dx_n^2 = sin^{2(n-2)}\phi_1 d^2\phi_1 + sin^{2(n-3)}\phi_2 d^2\phi_2 + \ ... \ + sin^2(\phi_{n-2})d^2\phi_{n-2} + d^2\phi_{n-1}$$

$$\Longrightarrow V = \int_{\rho=0}^{1}\int_{\phi_1=0}^{\pi} \cdots \int_{\phi_{n-2}=0}^{\pi}\int_{\phi_{n-1}=0}^{2\pi} d_{S^{n-1}}V$$

که

$$d_{S^{n-1}}V = sin^{n-2}(\phi_1)sin^{n-3}(\phi_2)...sin(\phi_{n-2})d\phi_1 d\phi_2 ... d\phi_{n-1}$$

بنابراین داریم

$$V(S^{2n}) = \frac{(n+1)!(4\pi)^n}{(2n+1)!} \quad , \quad V(S^{2n+1}) = \frac{2\pi^{2n+1}}{n!}$$

تعریف ۲.۳.۱ [۱۲] فرض کنید (M,f) یک منیفلد فینسلر باشد. فرم حجم بوسمان [17] (M,f) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

فرض کنید $\{e_1,...,e_n\}$ یک پایه برای T_xM با پایه دوگان $\{\eta_1,...,\eta_n\}$ باشد. برای هر $x \in M$، $D(x) \subset \mathbb{R}^n$ را به صورت زیر که حجم آن را بر حسب دستگاه اقلیدسی استاندارد با $V(x)$ نمایش می‌دهیم را در نظر بگیرید

$$D(x) = \{y_i \in \mathbb{R}^n | f(y_i e^i) \leq 1 \ \ , \ \ i = 1,2,...,n\}$$

و فرض کنید که $C(n)$ حجم دیسک واحد در $\mathbb{R}^n$ باشد. لذا داریم

$$C(n) = \frac{1}{n}vol(S^{n-1})$$

حال با توجه به مطالب فوق فرم حجم بوسمان را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$B_f = \frac{C(n)}{V(x)}\eta_1 \wedge ... \wedge \eta_n$$

وقتی که f ریمانی باشد، یعنی $f(y) = \sqrt{g(y,y)} = \sqrt{g_{ij}(x)y^iy^j}$ که $y = y^ie_i \in T_xM$، فرم حجمی هاسدورف بوسمان تبدیل به فرم حجم ریمانی می‌شود، یعنی

$$B_f = \sqrt{\tilde{g}(x)} \ dx^1 \wedge ... \wedge dx^n = \sqrt{detg_{ij}(x)} \ dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$$

۴.۱ تبدیلات همدیس

نظریه منیفلدهای همدیس فینسلری برای اولین بار در سال ۱۹۲۹ توسط کنبلمن [18] بیان گردید که در این نظریه دو متریک f_1 و f_2 را به طور همدیس هم ارز نامیم، هرگاه طول یک بردار

[17] Busemann volume fram
[18] $Knebelman$

دلخواه در یکی متناسب با طول تصویر آن بردار در دیگری باشد.
نتیجه معروفی که به قضیه کنبلمن معروف است نشان می‌دهد که تابع σ در رابطهٔ $f_۱ = e^{\sigma} f_۲$، تابعی بر حسب x است لذا اگر یک منیفلد فینسلری به طورهمدیس هم‌ارزبا یک منیفلد ریمانی باشد، آنگاه خود نیز ریمانی است.

تعریف ۱.۴.۱ فرض کنیم M یک منیفلد ریمانی و f یک نگاشت هموار روی M باشد به طوری که $f^*g = \rho g$ در اینصورت اگر ρ یک تابع هموار مثبت باشد، f را یک نگاشت همدیس، اگر ρ یک تابع ثابت باشد، f را متجانس [۱۹] و در حالت خاص هرگاه $\rho = ۱$، f را یک ایزومتری روی M می‌نامیم

می‌دانیم که اگر $\rho(x)$ یک تابع هموار مثبت روی منیفلد M باشد و قرار دهیم $\sigma(x) = \log(\rho(x))$ آنگاه $\sigma(x) \in C^\infty(M)$ بنابراین می‌توانیم تعریف ۱.۴.۱ را به صورت زیر بیان کنیم

تعریف ۲.۴.۱ فرض کنید (M, g) یک منیفلد ریمانی باشد دیفئومورفیسم $f : M \longrightarrow M$ را یک تبدیل همدیس گوئیم هرگاه، $\sigma(x) \in C^\infty(M)$ وجود داشته باشد به طوری که $f^*g = e^{\sigma(x)} g$ در اینصورت برای هر $X, Y \in T_pM$ داریم

$$f^*g(X, Y)_p = g_{f(p)}(f_*X, f_*Y) = e^{\sigma(x)} g(X, Y)$$

همچنین در مختصات موضعی تعریف فوق به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$g_{ij}(f(p)) = e^{\sigma(p)} g_{ij}(p)$$

تعریف ۳.۴.۱ فرض کنید (M, f) یک منیفلد فینسلری باشد دیفئومورفیسم $h : M \longrightarrow M$ را یک تبدیل همدیس گوئیم هرگاه، $\sigma(x) \in C^\infty(M)$ وجود داشته باشد به طوری که $h^*f = e^{\sigma(x)} f$.
در اینصورت برای هر $X, Y \in T_pM$ داریم

$$h^*f(X, Y)_p = f_{h(p)}(h_*X, h_*Y) = e^{\sigma(x)} f(X, Y)$$

همچنین در مختصات موضعی تعریف فوق به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\overline{g}_{ij} = e^{\sigma(p)} g_{ij}$$

[۱۹] Homothetic