بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه مراغه

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه:

برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد در رشته‌ی ریاضی، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان:

فضاهای نرمدار اقلیدسی $\mathcal{L}$- فازی و فشردگی

استاد راهنما:

دکتر بیاض دارابی

استاد مشاور:

دکتر اصغر رحیمی

پژوهشگر:

خدیجه حسینی

شهریور ۱۳۹۲

تقدیم به:

ما حصل آموخته هایم را تقدیم می کنم به آنان که مهر آسمانی شان آرام بخش آلام زمینی ام است.

به استوارترین تکیه گاهم، دستان پر مهر پدرم

به سبزترین نگاه زندگیم، چشمان سبز مادرم

که هر چه آموختم در مکتب عشق شما آموختم و هر چه بکوشم قطره ای از دریای بی کران مهربانیتان را سپاس نتوانم بگویم.

امروز هستی ام به امید شماست و فردا کلید باغ بهشتم رضای شما، آوردی گران سنگ تر از این ارزان نداشتم تا به خاک پایتان نثار کنم، باشد که حاصل تلاشم نسیم گونه غبار خستگیتان را بزداید.

بوسه بر دستان پر مهرتان.....

بارالها...

درود بی پایانت را بر وجود گرامی محمّد (ص) نازل فرما که بر گنجینه ی وحی تو امانت دار است، از همه ی خلقت ارجمندتر است و یکتا گل برگزیده ی بوستان بندگان توست و راهنمای نکویی ها و گشاینده ی در برکات و فضایل است. در اجرای امر تو جامه ی سختی به تن پوشید، در راهت تن به مرارتها داد، در دعوت به سوی تو با خویشان و نزدیکان درآویخت، برای رضای تو با قوم خود جنگید، در زنده کردن دینت رشته محبت از خویشان برید؛ از نزدیکان به سبب انکارشان دوری جست و به مردمان به سبب اجابت دین تو نزدیک گردید، برای تو با دورترین افراد دوستی کرد برای تو با نزدیکترین افراد، دشمنی نمود. در رساندن پیامت زخم رنج ها را به تن خرید، در دعوت به دین تو دشواری ها را به آغوش کشید تا آنجا که به دیار غربت هجرت کرد و از وطن، اهل، خانه و زادگاه و مأوای آرامشش دور شد تا دین تو را عزّت بخشد. به یاری تو لباس رزم با کفّار به تن نمود، در دل خانه شان با آنان درآویخت و طوفان خشم اش وزید تا درخشندگی فرمان تو پیدا شود و نامت برتری یابد، گرچه مشرکان را بد آید.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هاست...

سپاس گزاری...

حمد و سپاس خداوند را، که مرا توفیق عنایت فرمود تا در راه کسب علم و دانش گام بردارم.
به پاس احترام به حرمت دانش بر خود لازم می‌دانم که از زحمات و راهنمایی‌های استاد گرانقدر و ارجمندم جناب آقای **دکتر بیاض دارابی** که نظارت این تحقیق را برعهده داشته و در تمام مراحل از یاری و مساعدت ایشان برخوردار بوده‌ام تشکر و قدر دانی نمایم.
همچنین از استاد بزرگوارم جناب آقای **دکتر اصغر رحیمی** که استاد مشاور اینجانب بوده و از نظرات و راهنمایی‌های ایشان در طول این دوره بهره‌مند گردیده‌ام تشکر وقدردانی می‌نمایم و آرزوی موفقیت و سربلندی ایشان را از خدای متعال خواهانم.
همچنین از جناب آقای **دکتر محمدرضا عظیمی** که از محضر پر فیض تدریسشان بهره‌ها برده‌ام نهایت تشکر را دارم که زحمت داوری این پایان‌نامه را تقبل فرمودند.
در پایان از زحمات بی‌پایان پدر و مادر گرانقدرم که عمری در مکتب‌شان شاگردی کردم بی‌نهایت سپاس گزارم.

خدیجه حسینی
شهریور۱۳۹۲

نام خانوادگی: حسینی نام: خدیجه

عنوان پایان‌نامه: فضاهای نرمدار اقلیدسی $\mathcal{L}$–فازی و فشردگی

استاد راهنما: دکتر بیاض دارابی استاد مشاور: دکتر اصغر رحیمی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد
رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز ریاضی

دانشگاه: مراغه دانشکده: علوم پایه
تاریخ فارغ‌التحصیلی: شهریور ۱۳۹۲ تعداد صفحه: ۸۱

کلیدواژه‌ها: فشردگی، فضاهای نرمدار اقلیدسی، فضاهای نرمدار اقلیدسی $\mathcal{L}$–فازی

چکیده:
در این پایان‌نامه، فضاهای نرمدار اقلیدسی $\mathcal{L}$–فازی تعریف شده و فشردگی در این فضاها مورد بحث قرار گرفته است. چون فضاهای نرمدار فازی شهودی شرایط اضافی داشتند یک نظریه‌ی اصلاح شده و تعمیم یافته از فضاهای نرمدار فازی شهودی، یعنی فضاهای نرمدار $\mathcal{L}$–فازی ارایه گردیده است. همچنین فضاهای نرمدار $\mathcal{L}$–فازی و برخی نتایج مهم توپولوژی $\mathcal{L}$–فازی القاء شده از فضای نرمدار اقلیدسی $\mathcal{L}$–فازی مورد بررسی قرار گرفته است. این نتایج می‌تواند در مطالعات مربوط به بی‌نظمی سیستم‌های دینامیکی گسسته، در فضاهای نرمدار اقلیدسی $\mathcal{L}$–فازی استفاده گردد.

فهرست مطالب

مقدمه

نظریه‌ی مجموعه‌های فازی در سال ۱۹۶۵ بوسیله پروفسور لطفی‌زاده[۳۷] معرفی شده است. بعد از کار اولیه پروفسور لطفی‌زاده، علاقه‌مندان زیادی برای بدست آوردن تحلیل‌های فازی روی نظریه‌ی کلاسیک از جمله توپولوژی فازی متمرکز شده‌اند. مفهوم توپولوژی فازی کاربردهای زیادی در فیزیک کوانتوم دارد. یکی از مسائل مهم در توپولوژی فازی، به دست آوردن یک مفهوم مناسب از یک فضای متری و فضای نرمدار فازی ساخته شده است. در این پایان‌نامه، فضاهای نرمدار اقلیدسی $\mathcal{L}$–فازی تعریف و فشردگی در این فضاها مورد بحث قرار می‌گیرد.

این پایان‌نامه در سه فصل تنظیم شده است:

فصل اول شامل دو بخش است. در بخش اول با نظریه‌ی مجموعه‌های معمولی که زیربنای ریاضیات مدرن است آشنا می‌شویم. در بخش دوم نظریه‌ی مجموعه‌های فازی که تعمیمی از نظریه‌ی مجموعه‌های معمولی می‌باشد را بیان می‌کنیم. در این دو بخش تعاریف و قضایایی را که در فصول بعدی به آنها نیاز است آورده شده است.

فصل دوم شامل سه بخش است. در بخش اول و دوم به کمک t–نرم‌ها وt–همنرم‌های پیوسته به ترتیب فضاهای متریک فازی شهودی و فضاهای نرمدار فازی شهودی را تعریف می‌کنیم و قضایایی که

در بخش‌های بعدی به آنها نیاز است را بیان و اثبات می‌کنیم.

در بخش سوم فضاهای متریک $\mathcal{L}$−فازی و فضاهای نرمدار $\mathcal{L}$−فازی که به ترتیب توسیعی از فضاهای بخش اول و دوم می‌باشند را تعریف می‌کنیم و در این بخش قضایایی که در فصل بعدی نیاز داریم را اثبات می‌کنیم.

فصل سوم شامل یک بخش است. در این بخش فضاهای نرمدار اقلیدسی $\mathcal{L}$−فازی را تعریف می‌کنیم و فشردگی در این فضاها بررسی می‌کنیم.

شایان ذکر است کارهای این پایان نامه بر اساس مقاله

G. Deschrijver, D. O'Regan, R. Saadati, SM. Vaezpour, $\mathcal{L}$-fuzzy Euclidean normed spaces and compactness, Chaos, Solitons and Fractals. 42 (2009) 40–45.

نوشته شده است.

فصل ۱
مفاهیم اولیه

در این فصل به تعاریف و قضایای اساسی که در فصول بعدی به آنها نیاز خواهیم داشت، می‌پردازیم.

۱.۱ نظریه‌ی مجموعه‌های معمولی و مبانی توپولوژی پایه

تعریف ۱.۱.۱. گردایه‌ای معین از اشیاء را مجموعه [۱] می‌نامیم. اشیاء این گردایه اعضاء یا عناصر مجموعه نامیده می‌شوند.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید S یک مجموعه‌ی غیرتهی باشد. رابطه‌ی [۲] $\leqslant$ بر مجموعه‌ی S را ترتیب جزیی گویند اگر برای هر $a,b,c \in S$ این رابطه در سه شرط زیر صدق کند:

(۱) انعکاسی باشد. یعنی

$$a \leqslant a,$$

(۲) پاد متقارن باشد. یعنی

$$a \leqslant b \quad , \quad b \leqslant a \Longrightarrow a = b,$$

[۱] Set
[۲] Relation

(۳) ترایایی یا تعدی باشد. یعنی

$$a \leqslant b \ , \ b \leqslant c \Longrightarrow a \leqslant c.$$

مجموعه‌ی S را که برای آن رابطه‌ی ترتیب جزیی تعریف شده است، مجموعه‌ی مرتب جزیی گویند.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید L مجموعه مرتب جزیی باشد. هرگاه برای هر دو عضو $a, b \in L$ کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین مجموعه‌ی $\{a, b\}$ در L موجود باشد آنگاه L را شبکه [۱] می‌گویند.

تعریف ۴.۱.۱. یک شبکه‌ی کامل مجموعه مرتب جزیی مانند $(L, \leqslant_L)$ می‌باشد به طوری‌که هر زیرمجموعه‌ی غیرتهی از L مانند A دارای سوپریمم $(\bigvee A)$ و اینفیمم $(\bigwedge A)$ باشد.

لم ۵.۱.۱. *فرض کنید مجموعه‌ی L^* به صورت،*

$$L^* = \Big\{(x_۱, x_۲) \mid (x_۱, x_۲) \in [۰, ۱]^۲, x_۱ + x_۲ \leqslant ۱\Big\},$$

در نظر گرفته شده است و برای هر $(x_۱, x_۲), (y_۱, y_۲) \in L^*$ رابطه‌ی $\leqslant_{L^*}$ به صورت زیر،

$$(x_۱, x_۲) \leqslant_{L^*} (y_۱, y_۲) \Longleftrightarrow x_۱ \leqslant y_۱, x_۲ \geqslant y_۲ \qquad (۱.۱)$$

تعریف شده باشد، آنگاه $(L^*, \leqslant_{L^*})$ شبکه‌ی کامل است.

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم رابطه‌ی $\leqslant_{L^*}$ ترتیب جزیی است به عبارت دیگر نشان می‌دهیم برای هر $(x_۱, x_۲), (y_۱, y_۲), (z_۱, z_۲) \in L^*$ رابطه‌ی $\leqslant_{L^*}$ در شرایط تعریف ۲۰۱۰۱ صدق می‌کند:

شرط (۱) برقرار است. زیرا اگر برای هر $(x_۱, x_۲) \in L^*$ فرض کنیم:

$$x_۱ \leqslant x_۱ \ , \ x_۲ \geqslant x_۲. \qquad (۲.۱)$$

[۱] Lattice

آنگاه با استفاده از (۱.۱) داریم:

$$(x_1, x_2) \leqslant_{L^*} (x_1, x_2).$$

شرط (۲) نیز برقرار است. زیرا اگر برای هر $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in L^*$ فرض کنیم:

$$(x_1, x_2) \leqslant_{L^*} (y_1, y_2) \tag{۳.۱}$$

و

$$(y_1, y_2) \leqslant_{L^*} (x_1, x_2). \tag{۴.۱}$$

آنگاه با استفاده از (۱.۱) به ترتیب نتیجه می‌شود که:

$$x_1 \leqslant y_1 \ , \ x_2 \geqslant y_2, \tag{۵.۱}$$

و

$$y_1 \leqslant x_1 \ , \ y_2 \geqslant x_2. \tag{۶.۱}$$

بنابراین از دو عبارت (۵.۱) و (۶.۱) خواهیم داشت:

$$x_1 = y_1 \ , \ x_2 = y_2.$$

نتیجه می‌گیریم که $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$.

شرط سوم برقرار است. زیرا اگر برای هر $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in L^*$ داشته باشیم:

$$(x_1, x_2) \leqslant_{L^*} (y_1, y_2), \tag{۷.۱}$$

و

$$(y_۱, y_۲) \leqslant_{L^*} (z_۱, z_۲). \qquad (۸.۱)$$

از این رو با استفاده از عبارت (۱.۱) به ترتیب به دست می‌آوریم:

$$x_۱ \leqslant y_۱ \ , \ x_۲ \geqslant y_۲, \qquad (۹.۱)$$

و

$$y_۱ \leqslant z_۱ \ , \ y_۲ \geqslant z_۲. \qquad (۱۰.۱)$$

پس از (۹.۱) و (۱۰.۱) خواهیم داشت که:

$$x_۱ \leqslant z_۱ \ , \ x_۲ \geqslant z_۲.$$

بنابراین $(x_۱, x_۲) \leqslant_{L^*} (y_۱, y_۲)$.

در نتیجه رابطه‌ی $\leqslant_{L^*}$ ترتیب جزیی است و L^* مجموعه مرتب جزیی است.

حال ثابت می‌کنیم هر زیرمجموعه‌ی غیرتهی از L^* دارای سوپریمم و اینفیمم است. فرض می‌کنیم A زیرمجموعه‌ی غیرتهی از L^* باشد. به ازای هر $(x_۱, x_۲) \in A$ مجموعه‌های $A_۱$ و $A_۲$ را به صورت،

$$A_۱ = \Big\{ x_۱ \in [۰, ۱] \ : \ \exists x_۲ \in [۰, ۱] \ , \ (x_۱, x_۲) \in A \Big\},$$

$$A_۲ = \Big\{ x_۲ \in [۰, ۱] \ : \ \exists x_۱ \in [۰, ۱] \ , \ (x_۱, x_۲) \in A \Big\}.$$

در نظر می‌گیریم و همچنین تعریف می‌کنیم:

$$(a_۱, a_۲) = \big(\sup \{ x_۱ \mid x_۱ \in A_۱ \}, \inf \{ x_۲ \mid x_۲ \in A_۲ \} \big). \qquad (۱۱.۱)$$

چون زیرمجموعه‌ی $\{x_1 \mid x_1 \in A_1\}$ از بازه‌ی $[0,1]$ غیرتهی و از بالا کراندار است واضح است که $\sup\{x_1 \mid x_1 \in A_1\}$ در بازه‌ی $[0,1]$ وجود دارد. همچنین چون مجموعه‌ی $\{x_2 \mid x_2 \in A_2\}$ در بازه‌ی $[0,1]$ غیرتهی و از پایین کراندار است لذا $\inf\{x_2 \mid x_2 \in A_2\}$ در بازه‌ی $[0,1]$ وجود دارد. طبق تعریف مجموعه‌ی L^* به ازای هر $(x_1,x_2) \in L^*$ داریم:

$$x_1 + x_2 \leqslant 1 \Longrightarrow x_1 \leqslant 1 - x_2. \tag{12.1}$$

با سوپریمم‌گیری از طرفین نامساوی (۱۲.۱) خواهیم داشت:

$$\sup_{(x_1,x_2)\in A} x_1 \leqslant \sup_{(x_1,x_2)\in A} (1 - x_2) \Longrightarrow \sup_{(x_1,x_2)\in A} x_1 \leqslant 1 - \inf_{(x_1,x_2)\in A} x_2.$$

به بیان دیگر،

$$\sup\{x_1 \mid x_1 \in A\} \leqslant 1 - \inf\{x_2 \mid x_2 \in A\}. \tag{13.1}$$

در نتیجه (۱۳.۱) بنا به تساوی (۱۱.۱) با،

$$a_1 \leqslant 1 - a_2 \Longrightarrow a_1 + a_2 \leqslant 1.$$

برابر است. لذا از تعریف مجموعه‌ی L^* نتیجه می‌شود که $(a_1,a_2) \in L^*$.

در ادامه ثابت می‌کنیم (a_1,a_2) سوپریمم مجموعه‌ی A می‌باشد. ابتدا نشان می‌دهیم (a_1,a_2) کران بالا برای مجموعه‌ی A است. به ازای هر $x_1 \in A_1$ و $x_2 \in A$ به ترتیب واضح است که:

$$x_1 \leqslant \sup\{x_1 \mid x_1 \in A\},$$

و

$$x_{۲} \geqslant \inf\{x_{۲} \mid x_{۲} \in A\}.$$

لذا نتیجه می‌شود:

$$(x_{۱}, x_{۲}) \leqslant_{L^*} (a_{۱}, a_{۲}).$$

پس $(a_{۱}, a_{۲})$ کران بالا برای مجموعه‌ی A است. حال ثابت می‌کنیم هرگاه $(a'_{۱}, a'_{۲}) <_{L^*} (a_{۱}, a_{۲})$، آنگاه $(a'_{۱}, a'_{۲})$ کران بالا برای A نباشد.

(برهان خلف) فرض می‌کنیم $(a'_{۱}, a'_{۲})$ کران بالا برای مجموعه‌ی A باشد، پس به ازای هر $(x_{۱}, x_{۲}) \in A$ داریم:

$$x_{۱} \leqslant a'_{۱} \leqslant \sup\{x_{۱} \mid x_{۱} \in A_{۱}\},$$

و

$$x_{۲} \geqslant a'_{۲} \geqslant \inf\{x_{۲} \mid x_{۲} \in A_{۲}\}.$$

و این با کران بالا بودن $(a'_{۱}, a'_{۲})$ برای مجموعه A در تناقض است. در نتیجه $(a_{۱}, a_{۲})$ کوچکترین کران بالا برای مجموعه‌ی A است به عبارت دیگر،

$$\sup A = (a_{۱}, a_{۲}).$$

برای بدست آوردن اینفیمم مجموعه‌ی A تعریف می‌کنیم:

$$(b_{۱}, b_{۲}) = \big(\inf\{x_{۱} \mid x_{۱} \in A_{۱}\}, \sup\{x_{۲} \mid x_{۲} \in A_{۲}\}\big). \qquad (۱۴.۱)$$

چون زیرمجموعه‌ی $\{x_۱ \mid x_۱ \in A_۱\}$ از بازه‌ی $[۰, ۱]$ غیرتهی و از پایین کراندار است واضح است که $\inf\{x_۱ \mid x_۱ \in A_۱\}$ در بازه‌ی $[۰, ۱]$ وجود دارد. همچنین چون مجموعه‌ی $\{x_۲ \mid x_۲ \in A_۲\}$ در بازه‌ی $[۰, ۱]$ غیرتهی و از بالا کراندار است، لذا $\sup\{x_۲ \mid x_۲ \in A_۲\}$ در بازه‌ی $[۰, ۱]$ وجود دارد. به ازای هر $(x_۱, x_۲) \in L^*$ داریم:

$$x_۱ + x_۲ \leqslant ۱ \Longrightarrow x_۱ \leqslant ۱ - x_۲ \tag{۱۵.۱}$$

با اینفیمم‌گیری از طرفین رابطه‌ی (۱۵.۱) داریم:

$$\inf_{(x_۱,x_۲)\in A} x_۱ \leqslant \inf_{(x_۱,x_۲)\in A}(۱ - x_۲) \Longrightarrow \inf_{(x_۱,x_۲)\in A} x_۱ \leqslant ۱ - \sup_{(x_۱,x_۲)\in A} x_۲.$$

به بیان دیگر،

$$\{x_۱ \mid x_۱ \in A_۱\} \leqslant ۱ - \sup\{x_۲ \mid x_۲ \in A_۲\}. \tag{۱۶.۱}$$

درنتیجه (۱۶.۱) بنا به تساوی (۱۴.۱) با،

$$b_۱ \leqslant ۱ - b_۲ \Longrightarrow b_۱ + b_۲ \leqslant ۱$$

برابر است. لذا نتیجه می‌شود $(b_۱, b_۲) \in L^*$. ثابت می‌کنیم $(b_۱, b_۲)$ بزرگترین کران پایین برای مجموعه‌ی A می‌باشد. ابتدا ثابت می‌کنیم $(b_۱, b_۲)$ کران پایین برای مجموعه‌ی A است.

به ازای هر $x_۱ \in A_۱$ واضح است که $x_۱ \geqslant \inf\{x_۱ \mid x_۱ \in A_۱\}$ و همچنین به ازای هر $x_۲ \in A_۲$ بدیهی است $x_۲ \leqslant \sup\{x_۲ \mid x_۲ \in A_۲\}$. بنابراین،

$$(b_۱, b_۲) \leqslant_{L^*} (x_۱, x_۲).$$

پس (b_1, b_2) کران پایین برای مجموعه‌ی A است. حال نشان می‌دهیم اگر $(b_1, b_2) >_{L^*} (b'_1, b'_2)$، آنگاه (b'_1, b'_2) کران پایین دیگری برای مجموعه‌ی A نباشد.

(برهان خلف) فرض می‌کنیم که (b'_1, b'_2) کران پایین برای مجموعه‌ی A باشد پس به ازای هر $(x_1, x_2) \in A$ داریم:

$$x_1 \geqslant b'_1 \geqslant \inf \{x_1 \mid x_1 \in A_1\},$$

و

$$x_2 \leqslant b'_2 \leqslant \sup \{x_2 \mid x_2 \in A_2\}.$$

و این با کران پایین بودن (b'_1, b'_2) برای مجموعه A در تناقض است. پس (b_1, b_2) بزرگترین کران پایین برای مجموعه‌ی A است یعنی،

$$\inf A = (b_1, b_2).$$

لذا مجموعه مرتب جزیی $(L^*, \leqslant_{L^*})$ شبکه‌ی کامل است.

■

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید n، عدد صحیح مثبتی باشد. مجموعه‌ی مرتب n عدد حقیقی مانند $(x_1, ..., x_n)$ را نقطه‌ی $n-$ بعدی یا یک بردار با n مولفه می‌نامیم.

تعریف ۷.۱.۱. مجموعه‌ی همه‌ی نقطه‌های $n-$ بعدی را فضای اقلیدسی [1] $n-$ بعدی می‌نامیم و با نماد $\mathbb{R}^n$ نشان می‌دهیم.

[1] Space Euclidean

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید a نقطه‌ای در $\mathbb{R}^n$ و r عدد مثبت مفروضی باشد. مجموعه همه‌ی نقطه‌هایی مانند x در $\mathbb{R}^n$ که $\| x-a\| < r$ است را گوی $n-$ بعدی باز به مرکز a و شعاع r می‌نامیم. این مجموعه با نماد $B(a,r)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ باشد. اگر به ازای عدد مثبتی مانند r و نقطه‌ی $a \in \mathbb{R}^n$، مجموعه‌ی S کاملا در گوی $n-$ بعدی $B(a,r)$ قرار گیرد، آنگاه S را کراندار [۱] می گویند.

قضیه ۱۰.۱.۱. *(وایراشتراس [۲]) فرض کنید S زیرمجموعه‌ی کرانداری از $\mathbb{R}^n$ باشد. هرگاه مجموعه‌ی S حاوی تعدادی نامتناهی [۳] نقطه از $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه S دست کم دارای یک نقطه ی حدی [۴] در $\mathbb{R}^n$ است.*

برهان. به مرجع [۳] صفحه‌ی (۸۲) مراجعه شود. ■

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ باشد. مجموعه‌ی S را فشرده [۵] می گویند اگر هر پوشش باز S حاوی یک زیر پوشش متناهی باشد.

قضیه ۱۲.۱.۱. *(پوششی لیندلوف [۶]) فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ و F پوشش بازی از آن باشد. آنگاه گردایه‌ی شمارش‌پذیری از F وجود دارد که A را می‌پوشاند.*

برهان. به مرجع [۳] صفحه‌ی (۸۷) مراجعه شود. ■

قضیه ۱۳.۱.۱. *(اشتراکی کانتور [۷]) فرض کنید $\left\{A_1, A_2, \ldots\right\}$ گردایه‌ای شمارش‌پذیری از زیرمجموعه‌های*

[۱] Bounded
[۲] Weierstrass theorem
[۳] Infinit
[۴] Limit
[۵] Compact
[۶] Lindelof
[۷] Contor

ناتهی $\mathbb{R}^n$ باشد طوری که داشته باشیم:

(۱) *برای* $(k = 1, 2, 3, \dots)$، $A_{k+1} \subseteq A_k$.

(۲) *هر* A_k *بسته و* A_1 *کراندار است.*

آنگاه $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ *بسته و ناتهی است.*

برهان. به مرجع [۳] صفحه‌ی (۸۴) مراجعه شود. ■

تعریف ۱۴.۱.۱. یک توپولوژی در مجموعه‌ی X گردایه‌ای مانند τ از زیر مجموعه‌های X است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

(۱) $\emptyset, X \in \tau$،

(۲) اجتماع هر زیر گردایه‌ی τ متعلق به τ باشد،

(۳) مقطع اعضای هر زیر گردایه‌ی متناهی τ متعلق به τ باشد.

مجموعه‌ی X که برای آن توپولوژی مانند τ مشخص شده است را فضای توپولوژیک [۱] گویند.

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنید X فضای توپولوژیک باشد. اگر به ازای هر دو نقطه متمایز $x_1, x_2 \in X$، همسایگی‌های جدا از هم U_1 و U_2 به ترتیب از x_1 و x_2 وجود داشته باشند، آنگاه X را فضای هاسدورف می‌گویند.

قضیه ۱۶.۱.۱. *فرض کنید X فضایی هاسدورف باشد. اگر A زیرمجموعه‌ی فشرده‌ای از X باشد، آنگاه مجموعه‌ی A بسته است.*

[۱] Topological space

برهان. به مرجع [۲۸] صفحه‌ی (۲۱۴) مراجعه شود. ■

تعریف ۱۷.۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه‌ی غیرتهی باشد. یک متریک [۱] در مجموعه‌ی X تابع $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ است، که در چهار خاصیت زیر صدق می‌کند:

(۱) به ازای هر $x, y \in X$، $d(x,y) > 0$،

(۲) به ازای هر $x, y \in X$، $d(x,y) = 0$ اگر و تنها اگر $x = y$،

(۳) به ازای هر $x, y \in X$، $d(x,y) = d(y,x)$،

(۴) (نامساوی مثلثی) به ازای هر $x, y, z \in X$،

$$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y).$$

هر تابع برخوردار از خواص بالا را تابع فاصله یا متر گویند.

تعریف ۱۸.۱.۱. فضای برداری حقیقی یا مختلط X را یک فضای خطی نرمدار می‌گویند هرگاه برای هر $x \in X$ یک عدد حقیقی نامنفی مانند $\| x \|$، چنان مربوط باشد که:

(۱) به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \| .$$

(۲) اگر $x \in X$ و α اسکالر باشد، آنگاه:

$$\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \| .$$

(۳) $\| x \| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

[۱] Metric