تقدیم به

پدر و مادر عزیزم
همانهائی که سراپای وجودشان مهر و محبت و امید است.

بجاست بر دستان پرمهرشان بوسه زده و بهترین سپاس‌ها را به آنها که همواره پشتیبان من در تمامی مراحل زندگی‌ام بوده‌اند، تقدیم دارم.

تقدیر و تشکر

حمد و سپاس بی‌قیاس خداوند سبحان را که به بندگان خود منت نهاد و او را به زیور عقل و خرد آراست تا به وسیله آن عبودیت کمال و ذات بی‌همتای خداوند را پیشه کند تا تعالی و کمال یابد.

بعد از حمد و سپاس خالق یکتا سپاسگزار زحمات فراوان و خالصانه‌ی پدر و مادر بزرگوارم می‌باشم. و خالصانه‌ترین سپاس و تشکر تقدیم به استاد عزیز و عالیقدر جناب آقای دکتر بابلیان که در مکتب ایشان از علم و اخلاق بسیار آموخته‌ام و صمیمانه‌ترین سپاس تقدیم به استاد گرانمایه‌ام جناب آقای دکتر جوادی.
و همچنین از جناب آقای هاشمی به‌خاطر کمک‌های بی‌دریغشان کمال تشکر را دارم.

و از خدای متعال سلامتی این عزیزان و توفیق روزافزونشان را خواستارم.

چکیده

در این پایان‌نامه از حوزه مقادیر الحاقی $W(A, A^{۲}, \ldots, A^k)$ به منظور مطالعه‌ی غلاف عددی چندجمله‌ای از مرتبه‌ی k برای ماتریس مختلط $A_{n\times n}$ که با $V^k(A)$ نمایش می‌دهیم، استفاده می‌شود. توصیفی تحلیلی از $V^{۲}(A)$ برای ماتریس نرمال A ارایه شده و نتیجه‌ی آن برای تعیین آن دسته از ماتریس‌های نرمال که در رابطه‌ی $V^{۲}(A) = \sigma(A)$ صدق می‌کنند، به‌کار برده می‌شود. هم‌چنین ثابت می‌شود ماتریس یکانی A در رابطه‌ی $V^{۲}(A) = \sigma(A)$ صدق می‌کند اگر و تنها اگر مقادیر ویژه‌اش متعلق به یک نیم‌دایره باشند.

وقتی $A = diag(۱, \omega, \ldots, \omega^{n-۱})$، که $\omega = e^{\frac{۲\pi i}{n}}$ ، $V^k(A)$ را برای

$$k \in \{۲\} \cup \{j \in \mathbb{N} : j \geq \frac{n}{۲}\},$$

تعیین کرده و در نهایت، برای آن دسته از ماتریس‌های $A_{n\times n}$ که $A^{۲}$ هرمیتی است، نشان می‌دهیم $V^{۴}(A) = \sigma(A)$ و توصیفی از $V^{۲}(A)$ برای آن ارایه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: غلاف عددی چندجمله‌ای، حوزه‌ی مقادیر الحاقی، ماتریس نرمال، مرتبه‌ی عددی، مستطیل هذلولی.

رده‌بندی موضوعی ریاضی ۲۰۱۰: 15A60، 15A18.

مقدمه

برای ماتریس مختلط دلخواه $n \times n$ مانند A، طیف آن ($\sigma(A)$)[۱] مجموعه‌ای با نقاط گسسته است که حاوی اطلاعاتی در مورد ماتریس A و رفتار آن است. یک مجموعه‌ی مفید دیگر حوزه‌ی مقادیر عددی ($W(A)$)[۲] است که برخلاف طیف می‌تواند مجموعه‌ای پیوستار[۳] باشد. به منظور تعیین $\|f(A)\|$ برای توابع گوناگون f، یک روش خوب این است که ماتریس A را با مجموعه‌ای در صفحه‌ی مختلط ارتباط دهیم و $\|f(A)\|$ را به عنوان اندازه‌ی f بر این مجموعه در نظر بگیریم، بزرگترین مجموعه‌ی Ω با این ویژگی که به ازای هر چندجمله‌ای از درجه‌ی حداکثر k و هر $z \in \Omega$ داشته باشیم

$$\|p(A)\| \geq max_{z\in\Omega} \mid p(z) \mid$$

غلاف عددی چندجمله‌ای از درجه‌ی k نامیده می‌شود. این مجموعه برای اولین بار توسط نوانلینا در [11] معرفی گردید که اطلاعات بیشتری از طیف در مورد رفتار یک چندجمله‌ای روی یک ماتریس در اختیار می‌گذاشت. یکی از اهمیت‌های این تعریف استفاده‌ی آن در حل دستگاه معادلات خطی به شکل $AX = b$ با استفاده از روش تکراری مینیمم مانده‌ی تعمیم یافته، (جی. ام. رز)،[۴] به صورت تعریف شده در [14, 6.5] است، زیرا یک کران بالا برای نرم مانده در مرحله‌ی k ام اجرای الگوریتم مربوط به این روش به‌صورت $min_{p\in p_k(\cdot)}\|p(A)\|$ است، که در آن منظور از $p_k(\cdot)$ مجموعه‌ی تمامی چندجمله‌ای‌های از درجه‌ی حداکثر k است. با استفاده از بحث‌هایی که در [2, 4, 7] صورت گرفته است در می‌یابیم که با استفاده از غلاف عددی چندجمله‌ای می‌توان مناسب‌ترین ناحیه را که مینیمم روی آن اتفاق می‌افتد، پیدا کرد.

یک مثال کاربردی در [6] که با استفاده از روش جی. ام. رز حل شده بود، با استفاده از این مجموعه با تعداد مراحل کمتری حل می‌شود. در [9] از این مجموعه برای ارایه‌ی کران بالا و کران پایینی برای نرم توابعی از هر ماتریس دلخواه A استفاده شده است. در [5] نتایجی در مورد غلاف عددی چندجمله‌ای ماتریس‌های بلوکی ژوردن[۵] بیان می‌شود که این نتایج برای تعیین غلاف عددی بسیاری از ماتریس‌ها در حالت کلی مفید است. غلاف عددی چندجمله‌ای ارتباط نزدیکی با حوزه‌ی مقادیر عددی یک ماتریس دارد. در [1] به این موضوع پرداخته شده و سه الگوریتم برای تعیین غلاف عددی چندجمله‌ای از مرتبه‌ی اول ارایه شده است.

[۱] Spectrum
[۲] Numerical Range
[۳] Continuum
[۴] GMRES
[۵] Jordan Block

در این پایان نامه توصیفی تحلیلی از غلاف عددی چندجمله‌ای ارایه می‌شود.

این پایان‌نامه به‌صورت زیر تدوین شده‌است:

در فصل اول به بیان برخی از تعاریف و قضایای مقدماتی جبرخطی می‌پردازیم.

در فصل دوم غلاف عددی چندجمله‌ای را تعریف نموده و به بیان برخی از ویژگی‌های آن و بررسی ارتباط آن با حوزه‌ی مقادیر الحاقی [۶] می‌پردازیم.

در فصل سوم غلاف عددی چندجمله‌ای ماتریس‌های نرمال [۷] که طیف آن‌ها روی دو خط متعامد قرار دارند، بررسی می‌شود.

در فصل چهارم نیز غلاف عددی چندجمله‌ای ماتریس‌های نرمال که طیف آن‌ها روی دو خط غیر متعامد قرار دارند، بررسی می‌شود.

در نهایت در فصل پنجم غلاف عددی چندجمله‌ای را برای ماتریس‌های پایه دوری [۸] و ماتریس‌هایی که مربع آن‌ها هرمیتی است، بررسی می‌کنیم.

دراین پایان‌نامه از مقالات زیر استفاده شده است:

1. Chandler Davis, Chi-Kwong Li, Abbas Salemi, Polynpmial numerical hulls of matrices, Linear Algebra and its Applications, 428 (2008) 137-153.

2. Chandler Davis, Abbas Salemi, On polynomial numerical hulls of normal matrices, Linear Algebra and its Applications, 383 (2004) 151-161.

[۶] Joint Numerical Range [۷] Normal Matrices [۸] Basic Circulant

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فصل ۱

مقدماتی از جبرخطی

۱.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

فرض کنیم $M_n(\mathbb{C})$ بیانگر مجموعه‌ی تمامی ماتریس‌های مختلط $n \times n$ باشد، در اینجا تعاریف و قضایای مقدماتی از جبرخطی ارایه می‌کنیم. در این فصل از مراجع [8, 10, 14] و [۱۵] استفاده شده است.

تعریف ۱.۱.۱. *فرض کنیم $A \in M_n(\mathbb{C})$، بردار $x \neq 0$ متعلق به $\mathbb{C}^n$ یک ویژه‌بردار ماتریس A است هرگاه Ax یک مضرب اسکالر x باشد. به عبارت دیگر برای بعضی مقادیر $\lambda \in \mathbb{C}$، داشته باشیم $Ax = \lambda x$. اسکالر λ را ویژه‌مقدار[۱] A و x را ویژه‌بردار[۲] A متناظر با ویژه‌مقدار λ می‌نامند.*

تعریف ۲.۱.۱. *مجموعه‌ی تمامی ویژه‌مقدارهای ماتریس A طیف ماتریس A نامیده شده و با $\sigma(A)$، نمایش داده می‌شود.*

تعریف ۳.۱.۱. *بزرگترین ویژه‌مقدار A از لحاظ قدرمطلق، شعاع طیفی[۳] ماتریس A نامیده می‌شود.*

می‌توان معادله‌ی $Ax = \lambda x$ و $x \neq 0$ را به صورت $Ax = \lambda I x$ نوشت که در آن I ماتریس همانی است. بنابراین خواهیم داشت $(\lambda I - A)x = 0$، و لذا شرط لازم و کافی برای اینکه λ یک ویژه‌مقدار A باشد این است که $det(\lambda I - A) = 0$.

بسط دترمینان فوق یک چندجمله‌ای درجه‌ی n برحسب λ است که در آن ضریب λ^n برابر ۱ است. این چندجمله‌ای را چندجمله‌ای مشخصه‌ی[۴] ماتریس A نامیده و با $P_A(\lambda)$ نمایش می‌دهند. بنابراین چندجمله‌ای

[۱] Eigenvalue
[۲] Eigenvector
[۳] Spectral Radius
[۴] Characteristic Polynomial

مشخصه‌ی ماتریس A به شکل

$$P_A(\lambda) = \lambda^n + P_1\lambda^{n-1} + \cdots + P_n = (\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n),$$

است که $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ویژه‌مقدارهای ماتریس A هستند.

تعریف ۴.۱.۱. [۱۵، ص ۲۵۰] *فرض کنیم $A \in M_n(\mathbb{C})$، چندجمله‌ای مینیمال*[5] *A را به عنوان یکتا مولد تکین ایده‌آل همه‌ی چندجمله‌ای‌هایی که A را پوچ می‌سازند، تعریف می‌کنیم.*

تذکر ۵.۱.۱. [۱۵، ص ۲۵۲] *چندجمله‌ای‌های مشخصه و مینیمال ماتریس A، ریشه‌های یکسان ولی احتمالا با چندگانگی‌های متفاوت دارند. همچنین چندجمله‌ای مینیمال A چندجمله‌ای مشخصه‌ی A را عاد می‌کند.*

تعریف ۶.۱.۱. *فرض کنیم $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$، ترانهاده‌ی*[6] *ماتریس A به صورت زیر تعریف می‌شود*

$$A^t := (a_{ji}), 1 \leq i, j \leq n.$$

تعریف ۷.۱.۱. *فرض کنیم $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$، مزدوج*[7] *ماتریس A به صورت زیر تعریف می‌شود*

$$\overline{A} := (\overline{a_{ij}}), 1 \leq i, j \leq n.$$

تعریف ۸.۱.۱. *فرض کنیم $A \in M_n(\mathbb{C})$، ترانهاده‌ی مزدوج*[8] *A را با A^* نمایش داده و به صورت ذیل تعریف می‌کنیم $A^* = \overline{A}^t = \overline{A^t}$.*

فرض کنیم $A \in M_n(\mathbb{C})$، در اینجا انواع خاصی از ماتریس‌ها معرفی می‌گردد.

- ماتریس‌های متقارن[9]: $A^t = A$

- ماتریس‌های پادمتقارن[10]: $A^t = -A$

- ماتریس‌های هرمیتی[11]: $A^* = A$

[5] Minimal Polynomial
[6] Transpose
[7] Conjugate
[8] Conjugate Transpose
[9] Symmetric
[10] Skew Symmetric
[11] Hermitian

- ماتریس‌های پادهرمیتی[۱۲]: $A^* = -A$

- ماتریس‌های نرمال: $AA^* = A^*A$

- ماتریس‌های یکانی[۱۳]: $U \in M_n(\mathbb{C})$ به‌طوری‌که $U^*U = I$، یعنی معکوس یک ماتریس یکانی ترانهاده‌ی مزدوج آن است.

- ماتریس‌های قطری[۱۴]: $(i \neq j)$ $A = diag(a_{۱۱}, \ldots, a_{nn}),\ a_{ij} = ۰,\ (i \neq j)$.

- ماتریس‌های بالا مثلثی[۱۵]: $a_{ij} = ۰,\ (i > j)$.

- ماتریس‌های پایین مثلثی[۱۶]: $a_{ij} = ۰,\ (i < j)$.

قضیه ۹.۱.۱. *ویژه‌مقدارهای ماتریس‌های A و A^t یکسان هستند، ولی امکان دارد ویژه‌بردارهای آن‌ها متفاوت باشند.*

اثبات. با توجه به تساوی دترمینان یک ماتریس با دترمینان ترانهاده‌ی آن، داریم

$$det(\lambda I - A) = det(\lambda I - A)^t = det(\lambda I - A^t),$$

لذا ماتریس‌های A و A^t دارای چندجمله‌ای مشخصه‌ی یکسان هستند و در نتیجه ویژه‌مقدارهای آن‌ها یکسان است. از آن‌جایی‌که ویژه‌بردارهای A جواب دستگاه $(\lambda I - A)x = ۰$ و ویژه‌بردارهای A^t جواب دستگاه $(\lambda I - A^t)x = ۰$ هستند، در حالت کلی ارتباطی بین جواب‌های دو دستگاه فوق وجود ندارد. □

قضیه ۱۰.۱.۱. [14, p.4] *اگر λ یک ویژه‌مقدار A باشد، آنگاه $\overline{\lambda}$ یک ویژه‌مقدار A^* خواهد بود.*

قضیه ۱۱.۱.۱. *اگر P یک ماتریس وارون‌پذیر باشد، آنگاه ویژه‌مقدارهای ماتریس‌های A و $P^{-۱}AP$ یکسان خواهند بود.*

اثبات. چون

$$det(A - \lambda I) = det(P^{-۱})det(A - \lambda I)det(P)$$

[۱۲] Skew Hermitian
[۱۳] Unitary
[۱۴] Diagonal
[۱۵] Upper Triangular
[۱۶] Lower Triangular

$$= det(P^{-1}(A - \lambda I)P) = det(P^{-1}AP - \lambda I),$$

لذا ماتریس‌های $P^{-1}AP$ و A دارای چندجمله‌ای مشخصه‌ی یکسان بوده و در نتیجه دارای ویژه‌مقدارهای یکسان هستند. □

تعریف ۱۲.۱.۱. *فرض کنیم x و y دو بردار دلخواه در $\mathbb{C}^n$ باشند، ضرب داخلی*[۱۷] *بردارهای $x = (x_1, \ldots, x_n)$ و $y = (y_1, \ldots, y_n)$ به صورت زیر تعریف می‌شود*

$$(x, y) := \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i},$$

که می‌توان به فرم ماتریسی زیر نمایش داد $(x, y) := y^* x$.

فرض کنیم u و v و w بردارهای دلخواهی در $\mathbb{C}^n$ و α عدد مختلط دلخواهی باشد، آنگاه

۱. $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$،

۲. $(\alpha v, w) = \overline{\alpha}(v, w)$،

۳. $(v, w) = \overline{(w, v)}$،

۴. $(u, u) \geq 0$ و $(u, u) = 0$ *اگر و تنها اگر* $u = 0$.

قضیه ۱۳.۱.۱. *ویژه‌مقدارهای یک ماتریس هرمیتی حقیقی‌اند.*

اثبات. فرض کنیم $A \in M_n(\mathbb{C})$ ماتریسی هرمیتی بوده و λ یک ویژه‌مقدار A و u ویژه‌بردار متناظرش باشد، آنگاه $Au = \lambda u$، به عبارت دیگر $\lambda = u^* A u = (Au, u)$، بنابراین

$$\overline{\lambda} = \overline{(Au, u)} = (u, Au) = u^* A^* u = u^* A u = \lambda,$$

و این همان نتیجه‌ی مطلوب است. □

قضیه ۱۴.۱.۱. [14, p.20] *ماتریس $A \in M_n(\mathbb{C})$ نرمال است اگر و تنها اگر به طور یکتا با یک ماتریس قطری متشابه باشد.*

[۱۷] Inner Product

لم ۱.۱.۱۵. [14, p.21] *ماتریس* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *نرمال است اگر و تنها اگر هر ویژه‌مقدار آن ویژه‌مقدار* A^* *نیز باشد.*

در حالت کلی ماتریس‌های هرمیتی حالت خاصی از ماتریس‌های نرمال هستند. هر ماتریس نرمال را می‌توان به صورت $A = Q^*DQ$ نوشت، که در آن Q ماتریسی یکانی و D ماتریسی قطری است، لذا ویژه‌مقدارهای A همان ویژه‌مقدارهای D هستند. حال اگر این مقادیر حقیقی باشند، داریم $A = A^*$، یعنی ماتریسی نرمال که ویژه‌مقدارهای آن حقیقی باشند، هرمیتی است.

تعریف ۱.۱.۱۶. *ماتریس متقارن و حقیقی* A *را معین مثبت*[۱۸] *گوییم، هرگاه برای هر بردار غیرصفر* x *در* $\mathbb{R}^n$ *داشته باشیم* $x^tAx > ۰$.

ماتریس متقارن و حقیقی A *را نیمه معین مثبت*[۱۹] *گوییم، هرگاه برای هر بردار* x *در* $\mathbb{R}^n$ *داشته باشیم* $x^tAx \geq ۰$.

ماتریس مختلط و هرمیتی A *را معین مثبت گوییم، هرگاه برای هر بردار غیرصفر* x *در* $\mathbb{C}^n$ *داشته باشیم* $x^*Ax > ۰, \quad (x^* = \overline{x}^t)$.

ماتریس مختلط و هرمیتی A *را نیمه معین مثبت گوییم، هرگاه برای هر بردار* x *در* $\mathbb{C}^n$ *داشته باشیم* $x^*Ax \geq ۰$.

لم ۱.۱.۱۷. *اگر ماتریس حقیقی و متقارن* A *معین مثبت باشد، آنگاه ویژه‌مقدارهای آن مثبت اند.*

اثبات. فرض کنیم λ یک ویژه‌مقدار دلخواه ماتریس A، و $x \neq ۰$ ویژه‌بردار متناظر آن باشد، لذا $Ax = \lambda x$. در نتیجه $x^tAx = \lambda x^tx$. با توجه به این‌که x^tx و x^tAx مثبت هستند، می‌بایست $\lambda > ۰$ و این همان نتیجه‌ی مطلوب است. □

نتیجه ۱.۱.۱۸. *اگر ماتریس حقیقی و متقارن* A *نیمه معین مثبت باشد، آنگاه ویژه‌مقدارهای آن نامنفی اند.*

اکنون قضیه‌ای معروف که در تعیین محل ویژه‌مقدارهای یک ماتریس مفید است، بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱.۱.۱۹. **(*قضیه‌ی گرشگورین*[۲۰])** *فرض کنیم* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *و*

$$R_i(A) = \sum_{\substack{j=۱ \\ j\neq i}}^{n} | a_{ij} |, \quad i = ۱, \ldots, n,$$

[۱۸] Positive Definite [۱۹] Positive Semidefinite [۲۰] Gerschgorin

بیانگر مجموع قدرمطلق مقادیر غیر قطری سطر i ام ماتریس A باشد، آنگاه تمامی ویژه‌مقدارهای A متعلق به اجتماع قرص‌های

$$\bigcup_{i=۱}^{n}\{z \in \mathbb{C} : | z - a_{ii} | \leq R_i(A)\},$$

خواهد بود.

اثبات. فرض کنیم λ یک ویژه‌مقدار A و v ویژه‌بردار متناظرش باشد. فرض کنیم v_p مولفه‌ای از v با بزرگترین مقدار از لحاظ قدرمطلق باشد، به عبارت دیگر داشته باشیم $| v_p | = max_{i\neq p} | v_i |$. چون $Av = \lambda v$، بنابراین خواهیم داشت

$$(Av)_p = \lambda v_p = \sum_{j=۱}^{n} a_{pj} v_j,$$

یا به‌طور معادل

$$v_p(\lambda - a_{pp}) = \sum_{\substack{j=۱\\ j\neq p}}^{n} a_{pj} v_j,$$

با قدرمطلق گرفتن از طرفین مساوی و استفاده از نامساوی مثلثی، خواهیم داشت

$$| v_p || \lambda - a_{pp} |=| \sum_{\substack{j=۱\\ j\neq p}}^{n} a_{pj} v_j | \leq \sum_{\substack{j=۱\\ j\neq p}}^{n} | a_{pj} || v_j | \leq | v_p | R_p(A),$$

چون $| v_p |> ۰$ ، نتیجه می‌گیریم $| \lambda - a_{pp} | \leq R_p(A)$، و این یعنی ویژه‌مقدار λ متعلق به قرص گرشگورین برای سطر متناظر با بزرگترین درایه‌ی ویژه‌بردار متناظرش است. به همین ترتیب تمامی ویژه‌مقدارهای ماتریس A متعلق به اجتماع قرص‌های گرشگورین خواهند بود. □

از آنجایی‌که ویژه‌مقدارهای A و A^t یکی هستند، بنابراین نتیجه‌ی زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ۲۰.۱.۱. [8, p.20] *فرض کنیم* $A \in M_n(\mathbb{C})$، *و فرض کنیم*

$$C_j(A) = \sum_{\substack{i=۱\\ i\neq j}}^{n} | a_{ij} |, \quad j = ۱, \ldots, n.$$

بیانگر مجموع قدرمطلق مقادیر غیر قطری ستون j ام ماتریس A باشد، آنگاه تمامی ویژه‌مقدارهای A متعلق به اجتماع قرص‌های

$$\bigcup_{j=۱}^{n}\{z \in \mathbb{C} : | z - a_{jj} | \leq C_j(A)\},$$

خواهند بود.

۲.۱ حوزه‌ی مقادیر عددی یک ماتریس

تعریف ۱.۲.۱. *فرض کنیم $A \in M_n(\mathbb{C})$، حوزه‌ی مقادیر عددی A به صورت زیر تعریف می‌شود*

$$W(A) := \{x^*Ax : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = ۱\}$$

$W(A)$ تابعی از $M_n(\mathbb{C})$ به زیرمجموعه‌ای از اعداد مختلط است. با توجه به تعریف ملاحظه می‌شود

$$W(I) = ۱, W(\alpha I) = \alpha, \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

$W(A)$ مجموعه‌ای محدب است، این مطلب به صورت قضیه‌ای به نام قضیه‌ی توپلیتز- هاسدورف[۲۱] بوده و در [10, 1.3] اثبات شده است.

$W(A)$ می‌تواند به عنوان تصویر سطح کره‌ی واحد در $\mathbb{C}^n$ تحت تابع پیوسته‌ی $x \longrightarrow x^*Ax$ در نظر گرفته شود . کره‌ی واحد مجموعه‌ای فشرده و همبند است، بنابراین از آنجایی که تصویر پیوسته‌ی یک مجموعه‌ی فشرده، فشرده است، $W(A)$ مجموعه‌ای فشرده (و بنابراین کراندار) در $\mathbb{C}$ خواهد بود. بنا به دلیل مشابه $W(A)$ مجموعه‌ای همبند خواهد بود [10, p.6].

به عبارت دیگر می‌توانیم $W(A)$ را به صورت مجموعه‌ی زیر تعریف کنیم

$$W(A) = \{\frac{x^*Ax}{x^*x} : x \in \mathbb{C}^n, x \neq ۰\}.$$

زیرا با تعریف بردار l به شکل $l = \frac{x}{(x^*x)^{\frac{۱}{۲}}}$، خواهیم داشت $l^* = \frac{x^*}{(x^*x)^{\frac{۱}{۲}}}$ و $l^*Al = \frac{x^*Ax}{x^*x}$ و $l^*l = ۱$.

قضیه ۲.۲.۱. *به ازای هر $A \in M_n(\mathbb{C})$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$، داریم $W(\alpha A) = \alpha W(A)$.*

اثبات.

$$W(\alpha A) = \{x^*(\alpha A)x : x^*x = ۱\} = \{\alpha x^*Ax : x^*x = ۱\}$$
$$= \alpha\{x^*Ax : x^*x = ۱\} = \alpha W(A).$$
□

[۲۱] Toeplitz-Hausdorff

قضیه ۳.۲.۱. *به ازای هر* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *و هر* $\alpha \in \mathbb{C}^n$ *داریم* $W(A+\alpha I) = W(A) + \alpha$.

اثبات.

$$\begin{aligned} W(A+\alpha I) &= \{x^*(A+\alpha I)x : x^*x = 1\} = \{x^*Ax + \alpha x^*Ix : x^*x = 1\} \\ &= \{x^*Ax : x^*x = 1\} + \alpha\{x^*Ix : x^*x = 1\} \\ &= W(A) + \alpha W(I) = W(A) + \alpha. \end{aligned}$$

□

نتیجه ۴.۲.۱. *با توجه به دو قضیه‌ی بالا می‌توان نتیجه گرفت که حوزه‌ی مقادیر عددی یک ماتریس تحت انتقال و دوران پایاست.*

قضیه ۵.۲.۱. *تمامی ویژه‌مقدارهای ماتریس دلخواه* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *متعلق به حوزه‌ی مقادیر* $W(A)$ *هستند، به عبارت دیگر* $\sigma(A) \subseteq W(A)$.

اثبات. فرض کنیم $\lambda \in \sigma(A)$، بنابراین بردار غیر صفر $x \in \mathbb{C}^n$ موجود است، (بدون کاستن از کلیت می‌توانیم بردار واحد در نظر بگیریم)، به‌طوری‌که

$$\lambda = \lambda x^*x = x^*(\lambda x) = x^*Ax \in W(A).$$

□

قضیه ۶.۲.۱. *به ازای هر* $A, B \in M_n(\mathbb{C})$، *داریم* $W(A+B) \subset W(A) + W(B)$

اثبات.

$$\begin{aligned} W(A+B) &= \{x^*(A+B)x : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\} \\ &= \{x^*Ax + x^*Bx : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\} \\ &\subset \{x^*Ax : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\} + \{y^*By : y \in \mathbb{C}^n, y^*y = 1\} \\ &= W(A) + W(B). \end{aligned}$$

□

قضیه ۷.۲.۱. *به ازای هر* $A, U \in M_n(\mathbb{C})$، *که* U *ماتریس یکانی است، داریم* $W(U^*AU) = W(A)$.

اثبات. فرض کنیم $y \in W(U^*AU)$، بنابراین xای در $\mathbb{C}^n$ وجود دارد، به‌طوری‌که

$$y = x^*U^*AUx, x^*x = ۱.$$

با در نظر گرفتن $z = Ux$ داریم $z^*z = x^*U^*Ux = x^*x = ۱$، بنابراین $y = z^*Az \in W(A)$.

اثبات عکس؛ فرض کنیم $y \in W(A)$، بنابراین zی در $\mathbb{C}^n$ وجود دارد به‌طوری‌که $z^*z = ۱$ و $y = z^*Az$. قرار دهید $x = U^*z$. داریم $x^*x = z^*UU^*z = z^*z = ۱$. بنابراین

$$y = z^*Az = x^*U^*AUx \in W(U^*AU).$$

□

قضیه ۱.۲.۸. *اگر $A \in M_n(\mathbb{C})$ ماتریس نرمال باشد، آنگاه $W(A) = conv\ \sigma(A)$، که در آن منظور از $conv\ (X)$ مجموعه‌ی تمامی ترکیبات محدب اعضای X بوده که غلاف محدب مجموعه‌ی X نامیده می‌شود.*

اثبات. اگر A نرمال باشد، آنگاه ماتریس قطری Λ و ماتریس یکانی U وجود دارند به‌طوری‌که $A = U^*\Lambda U$. طبق قضیه‌ی (۱.۲.۷) داریم $W(A) = W(\Lambda)$، و چون

$$x^*\Lambda x = \sum_{i=۱}^{n} \overline{x_i} x_i \lambda_i = \sum_{i=۱}^{n} |x_i|^۲ \lambda_i,$$

بنابراین $W(A)$ مجموعه‌ی ترکیبات محدب عناصر قطری Λ است. (از آنجایی‌که $x^*x = ۱$، نتیجه می‌شود $\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^۲ = ۱$ و $|x_i|^۲ \geq ۰$)

چون عناصر قطری Λ ویژه‌مقدارهای A هستند، بنابراین $W(A) = conv\ \sigma(A)$. □

نتیجه ۱.۲.۹. [10, p.8] *اگر A یک ماتریس قطری باشد، آنگاه $W(A)$ غلاف محدب مقادیر قطری (ویژه‌مقدارهای) A خواهد بود.*

نتیجه ۱.۲.۱۰. [10, p.15] *اگر A ماتریسی هرمیتی باشد، آنگاه $W(A)$ قطعه خط حقیقی بسته‌ای خواهد بود، که نقاط انتهایی آن بزرگترین و کوچکترین ویژه‌مقدارهای A هستند. همچنین حوزه‌ی مقادیر یک ماتریس نرمال یک چندوجهی[۲۲] است که راس‌های آن ویژه‌مقدارهای A هستند. اگر A ماتریس یکانی باشد، آنگاه $W(A)$ یک چندوجهی است که درون دایره‌ی واحد محاط شده است.*

[۲۲] Polyhedral

قضیه ۱۱.۲.۱. [10, p.8] *به ازای هر* $A \in M_n(\mathbb{C})$*، داریم* $W(A^*) = \overline{W(A)}$.

اثبات.

$$W(A^*) = \{x^*A^*x : x^*x = ۱\} = \{(x^*Ax)^* : x^*x = ۱\}$$
$$= \{\overline{(x^*Ax)} : x^*x = ۱\} = \overline{W(A)}. \qquad \square$$

برای هر ماتریس $A \in M_n(\mathbb{C})$، $H(A) \equiv \frac{A+A^*}{۲}$، قسمت هرمیتی A و $S(A) \equiv \frac{A-A^*}{۲}$، قسمت پادهرمیتی A نامیده می‌شود. همواره داریم $A = H(A) + S(A)$، که $H(A)$ و $iS(A)$ هرمیتی هستند. همان‌گونه که قسمت حقیقی یک عدد مختلط تصویر آن عدد روی محور حقیقی است، قسمت هرمیتی یک ماتریس، حوزه‌ی مقادیر آن را روی محور حقیقی تصویر می‌کند. این کار برای تعیین حوزه‌ی مقادیر مفید خواهد بود، چرا که تعیین حوزه‌ی مقادیر یک ماتریس هرمیتی راحت‌تر است.

برای مجموعه‌ی $E \subset \mathbb{C}$، $Re\ E := \{Re\ e : e \in E\}$ را تصویر E روی محور حقیقی تعریف می‌کنیم.

قضیه ۱۲.۲.۱. *به ازای هر* $A \in M_n(\mathbb{C})$*، داریم* $W(H(A)) = Re\ W(A)$.

اثبات.

$$x^*H(A)x = \frac{x^*(A+A^*)x}{۲} = \frac{x^*Ax + x^*A^*x}{۲} = \frac{x^*Ax + (x^*Ax)^*}{۲}$$
$$= \frac{x^*Ax + \overline{x^*Ax}}{۲} = Re\ x^*Ax.$$

بنابراین هر نقطه در $W(H(A))$ به صورت $Re\ z$ به ازای یک $z \in W(A)$ خواهد بود و برعکس. $\square$

تعریف ۱۳.۲.۱. *نیم‌صفحه‌ی باز راست* $\mathbb{C}$ *را به صورت*

$$RHP \equiv \{z \in \mathbb{C} : Re\ z > ۰\},$$

و نیم‌صفحه‌ی بسته‌ی راست $\mathbb{C}$ *را به صورت*

$$RHP_۰ \equiv \{z \in \mathbb{C} : Re\ z \geq ۰\},$$

تعریف می‌کنیم.

نتیجه ۱.۲.۱۴. [10, p.10] *فرض کنیم $A \in M_n(\mathbb{C})$، آنگاه $W(A) \subset RHP$ اگر و تنها اگر $A + A^*$ معین مثبت باشد.*

نتیجه ۱.۲.۱۵. [10, p.10] *فرض کنیم $A \in M_n(\mathbb{C})$، آنگاه $W(A) \subset RHP.$ اگر و تنها اگر $A + A^*$ نیمه معین مثبت باشد.*

تعریف ۱.۲.۱۶. *برای دو ماتریس $A \in M_{n_1}$ و $B \in M_{n_2}$، جمع مستقیم[۲۳] A و B به صورت زیر تعریف می‌شود*

$$A \oplus B := \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \in M_{n_1+n_2}.$$

قضیه ۱.۲.۱۷. *به ازای هر $A \in M_{n_1}$ و $B \in M_{n_2}$،*

$$W(A \oplus B) = conv\ (W(A) \cup W(B)).$$

اثبات. توجه می‌کنیم که $A \oplus B \in M_{n_1+n_2}$، بردار $z \in \mathbb{C}^{n_1+n_2}$ را به صورت $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که $x \in \mathbb{C}^{n_1}$ و $y \in \mathbb{C}^{n_2}$ و $z^*z = 1$. آنگاه

$$z^*(A \oplus B)z = x^*Ax + y^*By,$$

اگر $y^*y = 1$، آنگاه $x = 0$ و $z^*(A \oplus B)z = y^*By \in W(B)$، بنابراین $W(A \oplus B) \supset W(B)$.
به‌طور مشابه اگر $x^*x = 1$، آنگاه $y = 0$ و $z^*(A \oplus B)z = x^*Ax \in W(A)$ و $z^*(A \oplus B)z \supset W(A)$.
بنابراین خواهیم داشت $W(A \oplus B) \supset W(A) \cup W(B)$. از آنجایی‌که $W(A \oplus B)$ محدب است، بنابراین

$$W(A \oplus B) \supset conv\ (W(A) \cup W(B)).$$

اثبات عکس؛ فرض کنید $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_1+n_2}$ بردار واحد دلخواهی باشد. اگر $x^*x = 0$، آنگاه $y^*y = 1$ و

$$z^*(A \oplus B)z = y^*By \in W(B) \subset conv\ (W(A) \cup W(B)),$$

[۲۳] Direct Sum