



۱۳۰۷

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد مهندسی برق - کنترل

طراحی جبران سازه‌های پس فاز - پیش فاز مقاوم مرتبه کسری برای سیستم‌های نامعین

توسط:

عطا اله گوگانی خیابانی

استاد راهنما:

پروفسور علی خاکی صدیق

زمستان ۹۱

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

تقدیم بابوسہ بردستان پدر بزرگوار و مادر مہربانم

دو فرشتہ ای کہ سختی ہا را بہ جان خریدند تا من بہ جایگا ہی کہ اکنون در آن ایستادہ ام برسم ...

## تأییدیه هیأت داوران

اعضای هیأت داوران، نسخه‌ی نهایی پایان‌نامه‌ی آقای: عطا اله گوگانی خیابانی

را با عنوان:

طراحی جبران‌سازهای پس‌فاز-پیش‌فاز مقاوم مرتبه کسری برای سیستم‌های نامعین

از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و پذیرش آن را برای تکمیل درجه‌ی کارشناسی ارشد تأیید می‌کنند.

امضاء:

استاد راهنما: پروفسور علی خاکی صدیق

امضاء:

استاد ممتحن داخلی: دکتر علیرضا فاتحی

امضاء:

استاد ممتحن خارجی: دکتر وحید جوهری مجد

امضاء:

نماینده‌ی تحصیلات تکمیلی: دکتر علیرضا فاتحی

## اظهار نامه دانشجو

اینجانب عطا اله گوگانی خیابانی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته مهندسی برق گرایش کنترل دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارائه شده در پایان نامه با عنوان:

### طراحی جبران سازه‌های پس‌فاز-پیش‌فاز مقاوم مرتبه کسری برای سیستم‌های نامعین

با راهنمایی استاد محترم جناب آقای پروفسور علی خاکی صدیق، توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش شده در این پایان نامه مورد تأیید می‌باشد، و در مورد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده است. بعلاوه گواهی می‌نمایم که مطالب مندرج در پایان نامه تا کنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگری در هیچ جا ارائه نشده است و در تدوین متن پایان نامه چارچوب (فرمت) مصوب دانشگاه را بطور کامل رعایت کرده‌ام.

امضاء دانشجو:

تاریخ:

## حق طبع و نشر و مالکیت نتایج

۱- حق چاپ و تکثیر این پایان نامه متعلق به نویسنده آن می باشد. هرگونه کپی برداری بصورت کل پایان نامه یا بخشی از آن تنها با موافقت نویسنده یا کتابخانه دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی مجاز می باشد.

ضمناً متن این صفحه نیز باید در نسخه تکثیر شده وجود داشته باشد.

۲- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی می باشد و بدون اجازه کتبی دانشگاه به شخص ثالث قابل واگذاری نیست.

همچنین استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مراجع مجاز نمی باشد.

\* توجه:

این فرم می بایست پس از تکمیل، در نسخ تکثیر شده قرار داده شود.

## چکیده

توجه به کنترل‌کننده‌های مرتبه کسری، به دلیل پاسخ بهتر این کنترل‌کننده‌ها نسبت به کنترل‌کننده‌های مرتبه صحیح، روز به روز در حال افزایش است. در این پایان‌نامه روشی برای طراحی کنترل‌کننده‌های پیش‌فاز-پس‌فاز مقاوم مرتبه کسری برای تضمین پایداری مقاوم در سیستم‌هایی با نامعینی غیرساختاری ارائه می‌شود. در این روش ابتدا با استفاده از جایابی قطب و حل معادله‌ی دیوفانتین، کنترل‌کننده‌ی مرتبه کسری طراحی می‌شود که سیستم نامی را پایدار کند، سپس یک مسئله‌ی بهینه‌سازی مقید حل می‌شود، که تابع هزینه شامل ضرایب صورت و مخرج کنترل‌کننده مرتبه کسری و قیدها همان شروط پایداری مقاوم هستند، در نهایت پارامترهای کنترل‌کننده مرتبه کسری مقاوم بدست می‌آید. این روش بر روی چند سیستم پیاده‌سازی شده و نتایج شبیه‌سازی آورده شده‌اند.

**کلیدواژه:** کنترل‌کننده‌ی پیش‌فاز-پس‌فاز مقاوم مرتبه کسری، پایداری مقاوم، نامعینی

غیرساختاری، معادله‌ی دیوفانتین

## فهرست مطالب

فصل ۱	مقدمه	۱
۱-۱	پیشگفتار	۱
۲-۱	تاریخچه	۲
۳-۱	مروری بر سیستم‌های کنترلی مرتبه کسری	۳
۴-۱	هدف از این پروژه	۴
۵-۱	ساختار پایان نامه	۵
فصل ۲	حسابان کسری	۶
۱-۲	مقدمه	۶
۲-۲	توابع خاص در حسابان کسری	۶
۱-۲-۲	تابع گاما	۶
۲-۲-۲	تابع می‌تاگ-لفلر	۸
۳-۲	مشتق و انتگرال کسری	۹
۱-۳-۲	مشتق کسری گرونوالد- لتنیکوف	۹
۲-۳-۲	مشتق کسری ریمان-لیوویل	۱۲
۳-۳-۲	مشتق کسری کپوتو	۱۳
۴-۲	خواص مشتقات کسری	۱۵
۵-۲	مشتق کسری تعدادی از توابع مهم	۱۶
۶-۲	کاربردی از معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری	۱۷
۷-۲	جمع‌بندی	۱۸
فصل ۳	سیستم‌های مرتبه کسری	۱۹
۱-۳	مقدمه	۱۹
۲-۳	تبدیل لاپلاس مشتقات کسری	۱۹
۱-۲-۳	تبدیل لاپلاس مشتق کسری ریمان- لیوویل و گرونوالد- لتنیکوف	۲۰



۲۱	تبدیل لاپلاس مشتق کسری کپوتو	۲-۲-۳
۲۲	نمایش سیستم‌های مرتبه کسری	۳-۳
۲۳	تحقق کانونیکال کنترل پذیر	۱-۳-۳
۲۴	تحقق کانونیکال رؤیت پذیر	۲-۳-۳
۲۴	تحقق کانونیکال قطری	۳-۳-۳
۲۵	پایداری سیستم‌های مرتبه کسری	۴-۳
۲۸	پاسخ زمانی سیستم‌های مرتبه کسری	۵-۳
۳۰	پاسخ فرکانسی سیستم‌های مرتبه کسری	۶-۳
۳۳	جمع بندی	۷-۳
۳۴	کنترل کننده‌های $PI^\lambda D^\mu$ و پیش فاز-پس فاز مرتبه کسری	فصل ۴
۳۴	مقدمه	۱-۴
۳۴	کنترل کننده $PI^\lambda D^\mu$	۲-۴
۴۰	کنترل کننده ی پیش فاز- پس فاز مرتبه کسری	۳-۴
۴۵	تقریب کنترل کننده‌های مرتبه کسری	۴-۴
۴۶	تقریب کارلسون	۱-۴-۴
۴۷	تقریب ماتسودا	۲-۴-۴
۴۹	تقریب کرون	۳-۴-۴
۵۰	برازش پاسخ فرکانسی	۴-۴-۴
۵۲	تقریب فضای حالت	۵-۴-۴
۵۴	جمع بندی	۵-۴
۵۵	طراحی کنترل کننده ی پیش فاز- پس فاز مرتبه کسری مقاوم	فصل ۵
۵۵	مقدمه	۱-۵
۵۵	معادله ی دیوفانتین	۲-۵
۵۷	معرفی کنترل کننده ی مرتبه کسری پیشنهادی	۳-۵
۶۱	نامعینی و پایداری مقاوم	۴-۵
۶۸	روش طراحی کنترل کننده ی مرتبه کسری	۵-۵

۷۱	شبیه‌سازی	۶-۵
۹۵	جمع‌بندی	۷-۵
۹۶	نتایج و پیشنهادات	۶ فصل
۹۶	نتایج	۱-۶
۹۶	پیشنهادات	۲-۶
۹۸		مراجع

## فهرست شکل‌ها

- شکل ۱-۲: کاربرد مسئله‌ی مقدار اولیه‌ی بیگلی و تروویک ..... ۱۷
- شکل ۱-۳: ناحیه‌ی پایداری در سیستم مرتبه کسری ..... ۲۷
- شکل ۲-۳: پاسخ ضربه‌ی یک سیستم مرتبه کسری با استفاده از توابع میتاگ-لفلر ..... ۳۰
- شکل ۳-۳: پاسخ پله‌ی یک سیستم مرتبه کسری با استفاده از توابع میتاگ-لفلر ..... ۳۰
- شکل ۴-۳: دیاگرام بودی  $S^\alpha$  ..... ۳۱
- شکل ۵-۳: دیاگرام بودی  $1/S^{0.5} + 1$  ..... ۳۲
- شکل ۶-۳: دیاگرام نایکوئیست  $1/S^{0.5} + 1$  ..... ۳۲
- شکل ۱-۴: پاسخ فرکانسی کنترل‌کننده‌ی  $PID$  کلاسیک با پارامترهای  $K_p = K_i = K_d = 1$  ..... ۳۵
- شکل ۲-۴: پاسخ فرکانسی  $PID$  کسری با پارامترهای  $K_p = K_i = K_d = 1, \lambda = 0.5, \mu = 0.4$  ..... ۳۶
- شکل ۳-۴: پاسخ پله واحد سیستم حلقه باز در الگوریتم زیگلر-نیکولز ..... ۳۷
- شکل ۴-۴: پاسخ پله سیستم حلقه بسته با استفاده از دو کنترل‌کننده‌ی  $PID$  و  $PI^\lambda D^\mu$  ..... ۴۰
- شکل ۵-۴: دیاگرام بودی جبران‌ساز پیش‌فاز مرتبه کسری ..... ۴۱
- شکل ۶-۴: ناحیه‌ی جبران‌ساز پیش‌فاز ..... ۴۳
- شکل ۷-۴: پاسخ پله‌ی سیستم حلقه بسته با کنترل‌کننده‌ی پیش‌فاز مرتبه کسری و صحیح ..... ۴۴
- شکل ۸-۴: سیگنال کنترلی سیستم حلقه بسته با کنترل‌کننده‌ی پیش‌فاز مرتبه کسری و صحیح ..... ۴۵
- شکل ۹-۴: مقایسه‌ی دیاگرام بودی  $S^{0.5}$  در حالت نظری و تقریب کارلسون ..... ۴۷
- شکل ۱۰-۴: مقایسه‌ی دیاگرام بودی  $S^{0.5}$  در حالت نظری و تقریب ماتسودا ..... ۴۹
- شکل ۱۱-۴: مقایسه‌ی دیاگرام بودی  $S^{0.5}$  در حالت نظری و تقریب کرون ..... ۵۰
- شکل ۱۲-۴: مقایسه‌ی دیاگرام بودی  $S^{0.5}$  در حالت نظری و تقریب برازش پاسخ فرکانسی ..... ۵۱
- شکل ۱۳-۴: دیاگرام بودی تقریب  $\left(\frac{2s+1}{0.2s+1}\right)^{0.5}$  با استفاده از برازش پاسخ فرکانسی ..... ۵۲
- شکل ۱۴-۴: دیاگرام بودی تقریب  $\left(\frac{2s+1}{0.2s+1}\right)^{0.5}$  با استفاده از فضای حالت ..... ۵۴
- شکل ۱-۵: مقایسه‌ی دیاگرام بودی کنترل‌کننده‌ی پیش‌فاز و پس‌فاز مرتبه کسری برای حالت  $\alpha_1 = \alpha_2$  ..... ۵۸
- شکل ۲-۵: دیاگرام بودی کنترل‌کننده‌ی پیشنهادی برای  $\alpha_1 < \alpha_2$  ..... ۶۰

- شکل ۳-۵: مقایسه‌ی دیاگرام بودی کنترل‌کننده‌ی پیشنهادی برای مقادیر مختلف  $\alpha_2$  ..... ۶۰
- شکل ۴-۵: سیستم نامعین در قضیه‌ی بهره کوچک ..... ۶۲
- شکل ۵-۵: سیستم حلقه بسته با نامعینی ضربی ..... ۶۲
- شکل ۶-۵: سیستم حلقه بسته با نامعینی ضربی در قضیه‌ی بهره کوچک ..... ۶۳
- شکل ۷-۵: حلقه‌ی فیدبک در قضیه‌ی بهره کوچک ..... ۶۶
- شکل ۸-۵: ساختار سیستم کنترلی ..... ۶۸
- شکل ۹-۵: ناحیه‌ی انتخاب قطب‌های حلقه بسته برای وجود پایداری ..... ۶۹
- شکل ۱۰-۵: اندازه دیاگرام بودی نشانگر نامعینی سیستم در فرکانس‌های بالا (مثال ۱) ..... ۷۱
- شکل ۱۱-۵: پاسخ سیستم حلقه بسته نامی با استفاده از کنترل‌کننده‌ی پایدارساز (مثال ۱) ..... ۷۲
- شکل ۱۲-۵: اندازه‌ی دیاگرام بودی W.T با استفاده از کنترل‌کننده‌ی پایدارساز سیستم نامی (مثال ۱) ..... ۷۳
- شکل ۱۳-۵: پاسخ سیستم حلقه بسته با استفاده از کنترل‌کننده‌ی پایدارساز سیستم نامی در حضور نامعینی (مثال ۱) ..... ۷۳
- شکل ۱۴-۵: اندازه‌ی دیاگرام بودی W.T (مثال ۱) ..... ۷۴
- شکل ۱۵-۵: پاسخ سیستم نامعین حلقه بسته با استفاده از کنترل‌کننده‌ی مرتبه کسری مقاوم (مثال ۱) ..... ۷۵
- شکل ۱۶-۵: سیگنال کنترلی کنترل‌کننده‌ی مرتبه کسری مقاوم (مثال ۱) ..... ۷۵
- شکل ۱۷-۵: اندازه‌ی دیاگرام بودی W.T با استفاده از کنترل‌کننده مرتبه صحیح مقاوم (مثال ۱) ..... ۷۶
- شکل ۱۸-۵: پاسخ سیستم نامعین حلقه بسته با استفاده از کنترل‌کننده‌ی صحیح مقاوم (مثال ۱) ..... ۷۷
- شکل ۱۹-۵: سیگنال کنترلی کنترل‌کننده‌ی صحیح مقاوم (مثال ۱) ..... ۷۷
- شکل ۲۰-۵: اندازه دیاگرام بودی نشانگر نامعینی سیستم در فرکانس‌های بالا (مثال ۲) ..... ۷۸
- شکل ۲۱-۵: پاسخ سیستم حلقه بسته نامی با استفاده از کنترل‌کننده‌ی پایدارساز (مثال ۲) ..... ۷۹
- شکل ۲۲-۵: اندازه‌ی دیاگرام بودی W.T با استفاده از کنترل‌کننده‌ی پایدارساز سیستم نامی (مثال ۲) ..... ۸۰
- شکل ۲۳-۵: پاسخ سیستم حلقه بسته با استفاده از کنترل‌کننده‌ی پایدارساز سیستم نامی در حضور نامعینی (مثال ۲) ..... ۸۰
- شکل ۲۴-۵: سیگنال کنترلی با استفاده از کنترل‌کننده‌ی پایدارساز سیستم نامی در حضور نامعینی (مثال ۲) ..... ۸۱
- شکل ۲۵-۵: اندازه‌ی دیاگرام بودی W.T (مثال ۲) ..... ۸۲
- شکل ۲۶-۵: پاسخ سیستم نامعین حلقه بسته با استفاده از کنترل‌کننده‌ی مرتبه کسری مقاوم (مثال ۲) ..... ۸۲

- ۸۲.....
- شکل ۵-۲۷: سیگنال کنترلی کنترل‌کننده‌ی مرتبه کسری مقاوم (مثال ۲)..... ۸۳
- شکل ۵-۲۸: پاسخ سیستم نامعین حلقه بسته با استفاده از کنترل‌کننده‌ی مرتبه کسری مقاوم با پیش‌فیلتر (مثال ۲)..... ۸۴
- شکل ۵-۲۹: سیگنال کنترلی کنترل‌کننده‌ی مرتبه کسری مقاوم با پیش‌فیلتر (مثال ۲)..... ۸۴
- شکل ۵-۳۰: اندازه‌ی دیاگرام بودی W.T با استفاده از کنترل‌کننده مرتبه صحیح مقاوم (مثال ۲)..... ۸۵
- شکل ۵-۳۱: پاسخ سیستم نامعین حلقه بسته با استفاده از کنترل‌کننده‌ی صحیح مقاوم (مثال ۲)..... ۸۶
- شکل ۵-۳۲: سیگنال کنترلی کنترل‌کننده‌ی صحیح مقاوم (مثال ۲)..... ۸۶
- شکل ۵-۳۳: پاسخ سیستم نامعین حلقه بسته با استفاده از کنترل‌کننده‌ی صحیح مقاوم با پیش‌فیلتر (مثال ۲)..... ۸۷
- شکل ۵-۳۴: سیگنال کنترلی کنترل‌کننده‌ی مرتبه کسری مقاوم با پیش‌فیلتر (مثال ۲)..... ۸۷
- شکل ۵-۳۵: اندازه دیاگرام بودی نشانگر نامعینی سیستم در فرکانس‌های بالا (مثال ۳)..... ۸۸
- شکل ۵-۳۶: پاسخ سیستم حلقه بسته نامی با استفاده از کنترل‌کننده‌ی پایدارساز (مثال ۳)..... ۸۹
- شکل ۵-۳۷: اندازه‌ی دیاگرام بودی W.T با استفاده از کنترل‌کننده‌ی پایدارساز سیستم نامی (مثال ۳)..... ۹۰
- شکل ۵-۳۸: پاسخ سیستم حلقه بسته با استفاده از کنترل‌کننده‌ی پایدارساز سیستم نامی در حضور نامعینی (مثال ۳)..... ۹۰
- شکل ۵-۳۹: سیگنال کنترلی با استفاده از کنترل‌کننده‌ی پایدارساز سیستم نامی در حضور نامعینی (مثال ۳)..... ۹۱
- شکل ۵-۴۰: اندازه‌ی دیاگرام بودی W.T (مثال ۳)..... ۹۲
- شکل ۵-۴۱: پاسخ سیستم نامعین حلقه بسته با استفاده از کنترل‌کننده‌ی مرتبه کسری مقاوم (مثال ۳)..... ۹۳
- شکل ۵-۴۲: سیگنال کنترلی کنترل‌کننده‌ی مرتبه کسری مقاوم (مثال ۳)..... ۹۳
- شکل ۵-۴۳: پاسخ سیستم نامعین حلقه بسته با استفاده از کنترل‌کننده‌ی مرتبه کسری مقاوم با پیش‌فیلتر (مثال ۳)..... ۹۴
- شکل ۵-۴۴: سیگنال کنترلی کنترل‌کننده‌ی مرتبه کسری مقاوم با پیش‌فیلتر (مثال ۳)..... ۹۴
- شکل ۵-۴۵: پاسخ سیستم نامعین حلقه بسته با استفاده از کنترل‌کننده‌ی صحیح مقاوم (مثال ۳)..... ۹۵

## فهرست جدول‌ها

جدول ۴-۱: تنظیم پارامترهای کنترل کننده‌ی  $PI^\lambda D^\mu$  با روش زیگلر-نیکولز..... ۳۸

جدول ۴-۲: مقایسه‌ی مشخصات پاسخ سیستم حلقه بسته در یک مثال برای کنترل کننده‌ی مرتبه کسری

و صحیح ..... ۴۵

## فصل ۱ مقدمه

### ۱-۱ پیشگفتار

با پیشرفت علم و گسترش کاربردهای علوم مختلف، نیاز به علم کنترل و رسیدن به پاسخی مناسب در فرآیندهای صنعتی احساس شد، بطوریکه در حال حاضر هیچ کدام از فرآیندها در زمینه‌های مختلف، بدون استفاده از کنترل کننده پاسخ قابل قبولی نخواهند داشت. حرکت بازوی یک ربات، پرتاب موشک، حرکت فضاپیماها، انجام پروسه‌های شیمیایی و بسیاری از پروسه‌های دیگر همه با استفاده از علم کنترل امکان پذیر شده‌اند.

برای کنترل سیستم‌های مختلف ابتدا باید یک مدل ریاضی از آن سیستم بدست آید، سپس کنترل کننده‌ای برای این مدل طراحی می‌شود. مدل‌های در نظر گرفته شده در اکثر مواقع دارای خطا هستند. این خطاها می‌توانند ناشی از دینامیک‌های مدل نشده یا نامعینی در پارامترهای خود سیستم و عوامل دیگر باشند. بنابراین ممکن است کنترل کننده‌ی طراحی شده برای یک سیستم نامی<sup>۱</sup> بتواند پاسخی مناسبی داشته باشد ولی در حضور نامعینی‌ها نه تنها پاسخ مناسب نباشد، بلکه سیستم ناپایدار شود. برای حل این مشکل نیاز به روش‌های کنترل پیشرفته مانند کنترل تطبیقی و مقاوم داریم.

روش‌های کنترل مقاوم، برای یک بازه از نامعینی می‌توانند مؤثر باشند. این روش‌ها هم برای دستیابی به پایداری مقاوم و هم عملکرد مقاوم، استفاده می‌شوند. در این روش‌ها یک سیستم نامی در نظر گرفته می‌شود و نامعینی‌ها در سیستم بصورت‌های مختلف مدل می‌شوند و کنترل کننده‌ی طراحی شده علاوه بر سیستم نامی باید بتواند سیستم همراه با نامعینی را به پاسخی مطلوب برساند. در چند دهه‌ی اخیر نظریه‌ی کنترل مقاوم برای سیستم‌های مرتبه صحیح پیشرفت‌های قابل ملاحظه‌ای داشته است و سودمندی این روش به عنوان یکی از روش‌های کنترل پیشرفته به کرات در مقالات و کاربردهای مختلف اثبات شده است.

با ورود نظریه‌ی مشتقات مرتبه‌ی کسری به علم کنترل، بررسی مقاوم بودن سیستم‌های مرتبه‌ی کسری و یا در نظر گرفتن کنترل کننده‌ی مقاوم به شکل کسری، امری طبیعی به نظر می‌رسید. با وجود مطالعات

---

<sup>۱</sup> Nominal System

انجام شده روی این نوع کنترل کننده‌ها، همچنان این موضوع یکی از موضوعات جدید در نظریه‌ی کنترل مرتبه‌ی کسری شناخته می‌شود. تمرکز این پایان نامه نیز روی همین مسئله‌ی کنترل مقاوم مرتبه کسری است.

## ۱-۲ تاریخچه

مفهوم مشتق و انتگرال با مرتبه‌ی غیر صحیح، به هیچ وجه موضوع جدیدی نیست. تاریخچه‌ی حسابان کسری به اواخر قرن هفدهم میلادی و همزمان با آغاز حسابان کلاسیک بازمی‌گردد. در سال ۱۶۹۵ هوییتال<sup>۱</sup> در نامه‌ای به لایبنیتز<sup>۲</sup>، مفهوم مشتق مرتبه‌ی نیم را جویا می‌شود و وی در پاسخ به این نامه چنین می‌نویسد: این تناقض آشکاری است که روزی نتایج مفیدی از آن بدست می‌آید [۱]. بعد از آن ریاضیدانان دیگری از جمله لیوویل<sup>۳</sup>، ریمان<sup>۴</sup>، اویلر<sup>۵</sup>، لاگرانژ<sup>۶</sup> و گرونوالد<sup>۷</sup> در این زمینه مطالعاتی انجام دادند. لیوویل توابع را بصورت سری توانی بسط داد و مشتق مرتبه‌ی  $q$  روی این سری‌ها را تعریف کرد که البته در آن رابطه  $q$  عددی صحیح بود. ریمان تعریف متفاوتی بیان کرد که در آن از انتگرال معین استفاده می‌شد و قابل اعمال روی سری‌های توانی با توان‌های غیر صحیح نیز بود. سرانجام گرونوالد و کراگ<sup>۸</sup> برای اولین بار نتایج لیوویل و ریمان را اثبات کردند. گرونوالد با استفاده از تعریف مشتق مرتبه صحیح، توانست رابطه‌ای برای مشتق مرتبه‌ی کسری به شکل انتگرال معین بدست آورد و کراگ نشان داد که انتگرال معین ریمان باید یک حد پایین محدود داشته باشد در حالیکه حد پایین انتگرال لیوویل باید  $-\infty$  باشد [۲].

در طی سه قرن، نظریه‌ی مشتقات مرتبه‌ی کسری به عنوان شاخه‌ای از ریاضیات بصورت نظری گسترش یافت. ولی در چند دهه‌ی اخیر، نویسندگان مختلفی به این موضوع اشاره کرده‌اند که مشتق و انتگرال غیر صحیح برای توصیف ویژگی‌های برخی مواد مانند پلیمرها بسیار مناسب می‌باشند. مشتقات مرتبه کسری، ابزاری مناسب برای بیان حافظه در مواد و پروسه‌های مختلف هستند و مزیت اصلی مشتق مرتبه کسری نسبت به مرتبه صحیح نیز همین خاصیت است [۳]. در واقع برای نشان دادن سیستم‌های واقعی، استفاده از مرتبه‌ی کسری خیلی بهتر از مرتبه‌ی صحیح است [۴]. رفتار بسیاری از سیستم‌های فیزیکی را می‌توان با معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری بیان کرد، از جمله مواد ویسکوالاستیک [۵-۶]، پروسه‌های الکتروشیمیایی [۷]، خطوط انتقال بلند [۸]، قطبیت

<sup>1</sup> L'Hospital

<sup>2</sup> Leibniz

<sup>3</sup> Liouville

<sup>4</sup> Riemann

<sup>5</sup> Euler

<sup>6</sup> Lagrange

<sup>7</sup> Grunwald

<sup>8</sup> Krug



دی‌الکتربیک‌ها [۹] و نويز رنگی [۱۰].

یک مثال عملی از سیستم مرتبه کسری، انتشار حرارت در یک جامد نیمه نامتناهی<sup>۱</sup> است. در این سیستم، فلوی حرارت  $q(t)$  بصورت طبیعی، برابر با مشتق مرتبه نیم از دما  $T(t)$  است یعنی:  $d^{0.5}T(t)/dt^{0.5} = q(t)$ . [۱۱]. بنابراین مشخص است که معادلات دیفرانسیل مرتبه صحیح نمی‌توانند عملکرد واقعی این سیستم را بیان کنند. یکی از کاربردهای دیگر مشتقات مرتبه کسری نظریه فرکتال‌ها<sup>۲</sup> است. گسترش نظریه‌ی فرکتال‌ها بینش جدیدی از مشتقات مرتبه کسری بخصوص در مدل‌سازی پروسه‌های دینامیکی خودمتمشابه به ریاضیدانان داده است [۱۲]. کاربردی دیگر از مشتقات مرتبه کسری، استفاده از این مشتقات در سیستم‌های کنترلی است و این کاربرد مدنظر این پایان نامه است.

### ۱-۳ مروری بر سیستم‌های کنترلی مرتبه کسری

سیستم‌های کنترلی مرتبه کسری سیستم‌هایی هستند که معادلات دیفرانسیل آنها شامل مشتقات مرتبه کسری است. در حالت کلی چهار حالت برای سیستم‌های کنترلی را می‌توان در نظر گرفت: (۱) سیستم مرتبه صحیح، کنترل‌کننده مرتبه صحیح. (۲) سیستم مرتبه صحیح، کنترل‌کننده مرتبه کسری. (۳) سیستم مرتبه کسری، کنترل‌کننده مرتبه صحیح. (۴) سیستم مرتبه کسری، کنترل‌کننده مرتبه کسری [۱۳]. بنابراین در حالتی که کنترل‌کننده یا سیستم حلقه‌باز مرتبه کسری باشند، سیستم کنترلی حلقه‌بسته نیز مرتبه کسری خواهد شد. در حال حاضر چند نوع کنترل‌کننده مرتبه کسری مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، از جمله:

- کنترل‌کننده  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  که تعمیمی از کنترل‌کننده  $PID$  برای حالت کسری است [۱۴]، در حال حاضر مطالعات فراوانی روی این کنترل‌کننده و نحوه‌ی تنظیم پارامترهای آن انجام گرفته است که در [۱۸-۱۵] به تعدادی از آنها اشاره شده است.
- کنترل‌کننده کرون<sup>۳</sup> که در واقع کنترل‌کننده مقاوم مرتبه کسری است و شامل سه نوع کنترل‌کننده است [۱۹-۲۰].
- کنترل‌کننده پیش‌فاز- پس‌فاز مرتبه کسری که تعمیمی از کنترل‌کننده مرتبه صحیح متناظر است، البته در این زمینه مطالعات کمی صورت گرفته است [۲۱-۲۲].
- کنترل‌کننده مرتبه کسری بهینه [۲۳].

<sup>1</sup> Semi-infinite solid

<sup>2</sup> Fractals

<sup>3</sup> CRONE

• کنترل کننده مرتبه کسری تطبیقی [۲۴-۲۵].

این کنترل کننده ها در سیستم های مختلفی استفاده شده اند و پاسخ های مناسب و حتی بهتری نسبت به کنترل کننده های مرتبه صحیح داشته اند. از کاربردهای این کنترل کننده ها می توان به نمونه هایی از جمله: کنترل بازوی ربات [۲۶]، کنترل موقعیت موتور  $DC$  [۲۷]، کنترل کانال های آبیاری [۲۸]، کنترل سیستم های انتقال حرارت [۲۹] و بسیاری از سیستم های دیگر اشاره کرد.

## ۱-۴ هدف از این پروژه

مسئله ی مقاوم بودن، یکی از مسائل اساسی در نظریه ی کنترل است، همانطور که گفته شد این مسئله در حالت مرتبه صحیح، پیشرفت های چشمگیری داشته است ولی برای حالت مرتبه کسری، موضوع نسبتاً جدیدی است. البته مطالعاتی روی این نوع از کنترل کننده ها انجام شده است که مهمترین آنها کنترل کرون است [۳۰] که ایده ی اصلی آن ایجاد حد فاز ثابت در حوالی فرکانس شکست است تا سیستم بتواند اوورشوت<sup>۱</sup> و زمان نشست<sup>۲</sup> ثابتی داشته باشد. برای نامعینی پارامتری در سیستم نیز مطالعات زیادی صورت گرفته که در آنها از قضایایی مانند شرط برون داشت صفر<sup>۳</sup>، مجموعه مقادیر<sup>۴</sup> و خاریتانوف تعمیم یافته<sup>۵</sup> استفاده شده است [۳۱-۳۴]. ولی کنترل مقاوم مرتبه کسری برای سیستم هایی با نامعینی غیرساختاری خیلی کم مورد مطالعه قرار گرفته است مثلاً نمونه ای از آن در [۳۵] آمده است. هدف از این پایان نامه طراحی کنترل کننده ی پیش فاز- پس فاز مرتبه کسری مقاوم برای سیستم هایی با نامعینی غیرساختاری است. ساختار کنترل کننده به شکلی است که می توان آن را حاصل ضرب مجموعه ای از کنترل کننده های پیش فاز یا پس فاز در نظر گرفت. نوآوری این تحقیق در این است که با استفاده از روشی جدید و حل یک مسئله بهینه سازی، کنترل کننده ای طراحی می شود که پایداری مقاوم را تضمین می کند و همچنین کنترل کننده ی استفاده شده ساختاری جدید داشته و می تواند شکلی کلی داشته باشد.

---

<sup>1</sup> Overshoot

<sup>2</sup> Settling time

<sup>3</sup> Zero exclusion condition

<sup>4</sup> Value set

<sup>5</sup> Extended Kharitonov

## ۵-۱ ساختار پایان نامه

ساختار این پایان نامه به این شکل است که در فصل دوم درباره‌ی حساب دیفرانسیل و انتگرال مرتبه کسری بصورت خلاصه توضیحاتی داده می‌شود. در این فصل ابتدا توابعی خاص که در نظریه‌ی حسابان کسری کاربرد دارند معرفی می‌شود، سپس تعاریفی از مشتقات مهم کسری ارائه شده، خواص آنها بیان می‌شود و در نهایت کاربردی از معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری بیان می‌گردد. در فصل سوم تبدیل لاپلاس مشتقات مرتبه کسری به عنوان ابزاری برای نمایش سیستم‌های مرتبه کسری معرفی می‌شود در این فصل نمایش تابع تبدیل و فضای حالت سیستم‌های کسری بیان شده و ارتباط بین این دو نمایش ذکر می‌شود. همچنین قضایای پایداری برای این دو نمایش بیان می‌گردد. در فصل چهارم کنترل کننده‌ی  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  و کنترل کننده‌ی پیش‌فاز - پس‌فاز مرتبه کسری معرفی شده و برای هر کدام یک روش طراحی بیان می‌شود و با شبیه‌سازی‌هایی عملکرد بهتر این دو کنترل کننده نسبت به همتای مرتبه صحیحشان نشان داده می‌شود سپس روش‌هایی برای تقریب کنترل کننده‌های مرتبه کسری با کنترل کننده‌های مرتبه صحیح بیان شده و با هم مقایسه می‌شوند. فصل پنجم این پایان نامه به ارائه‌ی روش طراحی کنترل کننده‌ی مقاوم مرتبه کسری اختصاص می‌یابد. در این فصل ابتدا معادله‌ی دیوفانتین و روش حل آن بیان می‌شود سپس کنترل کننده‌ای پیشنهاد شده و خواص آن ذکر می‌شود و در نهایت روش ارائه شده توضیح داده می‌شود. این روش روی چند سیستم پیاده‌سازی شده و نتایج شبیه‌سازی آورده می‌شوند.

## فصل ۲ حسابان کسری

### ۱-۲ مقدمه

در این فصل بصورت خلاصه درباره‌ی حسابان کسری مطالبی ذکر می‌شود. ابتدا تعاریف چند تابع خاص که در نظریه‌ی حسابان کسری کاربرد دارند بیان می‌شود سپس تعاریف مهمی از مشتق و انتگرال کسری و خواص این تعاریف ذکر می‌شود. در بخش بعد مشتق تعدادی از توابع مهم بیان می‌شود و در نهایت مثالی از کاربرد معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری آورده می‌شود. مطالب این فصل از مراجع [۳-۱] و [۳۶] گردآوری شده‌اند.

### ۲-۲ توابع خاص در حسابان کسری

در این بخش دو تابع گاما<sup>۱</sup> و میتاگ-لفلر<sup>۲</sup> که در حسابان کسری بسیار کاربرد دارند بطور خلاصه مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

#### ۱-۲-۲ تابع گاما

تابع گاما یکی از مهمترین توابع در بررسی مشتق و انتگرال کسری است. این تابع تعمیمی از فاکتوریل است و برخلاف فاکتوریل که فقط برای اعداد صحیح تعریف می‌شود تابع گاما برای اعداد غیرصحیح و حتی مختلط نیز قابل تعریف است. تابع گاما بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (1-2)$$

این تابع برای نیمه‌ی راست صفحه‌ی مختلط  $Re(z) > 0$  همگرا خواهد بود. یکی از خواص اساسی تابع گاما عبارت است از:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (2-2)$$

که اگر  $z$  یک عدد صحیح باشد می‌توان به رابطه‌ی زیر رسید:

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (3-2)$$

یکی از خواص دیگر تابع گاما این است که این تابع دارای قطب‌های ساده در  $z = -n, (n = 0, 1, 2, \dots)$  است.

<sup>1</sup> Gamma function

<sup>2</sup> Mittag-Leffler function