فهرست مندرجات

چکیده

می‌توان گفت ایزومتری‌ها تبدیلاتی هستند که فاصله بین عناصر را حفظ می‌کنند. این‌گونه تبدیلات در مطالعه هندسه‌ای که مبتنی بر حرکات صلب مانند انتقال‌ها و دوران‌ها است از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این پایان نامه به مطالعه چنین تبدیلاتی می‌پردازیم و خصوصیات این نگاشت‌ها و پایایی آن‌ها را در فضاهای باناخ، هیلبرت و C^*–مدول‌های هیلبرت بررسی می‌کنیم، سپس نگاهی به شبه ایزومتری‌های حقیقی مقدارکه تقریبی از ایزومتری‌ها هستند داشته و در انتها نگاشت‌های خطی تقریباً حافظ تعامد (که حافظ فاصله نیز هستند) و پایایی آن‌ها روی C^*–مدول‌ها را بررسی می‌کنیم.

فصل ۱

نگاشت‌هایی که حافظ فاصله‌اند

در این بخش نشان می‌دهیم که هر نگاشت حافظ فاصله از یک فضای نرم‌دار حقیقی به یک فضای برداری نرم‌دار حقیقی خطی است. سپس شرایطی را بیان خواهیم کرد که نگاشت فوق، پیوسته یکنواخت شود. فرض کنید R^+ مجموعه اعداد حقیقی غیرمنفی وX و Y فضاهای برداری نرم‌دار حقیقی با بعد بزرگتر از یک باشند. نرم در هر فضا با علامت $||.||$ نشان داده می‌شود. مطالب این بخش از منابع [۱ و ۲۴] برداشت شده است

تعریف ۱.۱ یک نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ فاصله را حفظ می‌کند اگر و تنها اگر یک تابع $P : R^+ \longrightarrow R^+$ موجود باشد به طوری‌که برای هر x و y در X:

$$||f(x) - f(y)|| = P(||x - y||).$$

تابع P، تابع مقیاس یا اندازه برای f نامیده می‌شود.

یک نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ را که حافظ فاصله است می‌توان به صورت زیر نیز تعریف کرد: به ازای هر x و y و z و w در X، اگر $||x - y|| = ||z - w||$ آن‌گاه $||f(x) - f(y)|| = ||f(z) - f(w)||$.

تعریف ۲.۱ نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ ایزومتری است اگر برای هر x و y در X

$$||f(x) - f(y)|| = ||x - y||.$$

قضیه ۱.۱ فرض کنید (M,d) یک فضای متریک کراندار باشد. اگر عنصری مانند $m \in M$، یک ایزومتری پوشای $g: M \longrightarrow M$ و یک ثابت $k > ۱$ موجود باشد به طوری‌که برای هر x در M $d(g(x),x) \geq kd(m,x)$ آن‌گاه هر ایزومتری پوشای $h: M \longrightarrow M$، m را ثابت نگه می‌دارد.

اثبات. چون ایزومتری‌های فضاهای متریک، یک‌به‌یک اند، $g^{-۱}$ و $h^{-۱}$ موجودند و h و g و $g^{-۱}$ و $h^{-۱}$، و ترکیبات متناهی دلخواه آن‌ها ایزومتری‌هایی دوسویی روی M هستند.

یک دنباله از ایزومتری‌های $g_n: M \longrightarrow M$ و یک دنباله m_n از عناصر M را به استقرا تعریف می‌کنیم. فرض کنید:

$$\begin{aligned} g_۱ &= g, & m_۱ &= m, \\ g_۲ &= hgh^{-۱}, & m_۲ &= hm, \\ g_{n+۱} &= g_{n-۱}g_n(g_{n-۱})^{-۱}, & m_{n+۱} &= g_{n-۱}m_n, \quad n \geq ۲. \end{aligned}$$

در این صورت هر g_n، دوسویی است زیرا ایزومتری معکوس‌پذیر از M است. با استفاده از استقرا داریم:

$$d(g_n(x),x) \geq kd(m_n,x) \quad x \in M,\ n \geq ۱$$

چون بنا بر فرض برای هر x در M داریم $d(g(x),x) \geq kd(m,x)$ رابطه برای $n = ۱$ برقرار است. اگر $d(g_n x,x) \geq kd(m_n,x)$ آن‌گاه:

$$d(g_{n+۱}(x),x) = d(g_{n-۱}g_n(g_{n-۱})^{-۱}(x),x) \geq kd(g_{n-۱}m_n,x) = kd(m_{n+۱},x).$$

اگر در رابطه فوق به جای x، $m_{n+۱}$ قرار دهیم با استفاده مجدد از استقرا داریم:

$$\begin{aligned} d(g_n m_{n+۱},m_{n+۱}) &\geq kd(m_n,m_{n+۱}) = kd(m_{n+۱},m_n) \\ d(m_{n+۲},m_{n+۱}) &\geq kd(m_{n+۱},m_n) = kd(g_{n-۱}m_n,m_n) \\ &\geq k^۲ d(m_{n-۱},m_n) = k^۲ d(m_n,m_{n-۱}) \\ &\vdots \\ &\geq k^n d(m_۲,m_۱), \quad \forall n \geq ۱. \end{aligned}$$

در حقیقت، M یک فضای متریک کراندار است پس عدد صحیحی مانند N موجود است به طوری‌که برای هر n ؛ $d(m_{n+2}, m_{n+1}) \leq N$. بنابراین برای هر n، $d(m_2, m_1) \leq \frac{N}{k^n}$ و چون $k > 1$ پس $d(m_2, m_1) = 0$ در نتیجه $hm = m_2 = m_1 = m$ یعنی، h، m را ثابت نگه می‌دارد. $\square$

قضیه ۲.۱ فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ با $f(0) = 0$ یک نگاشت پوشای پیوسته و حافظ فاصله باشد. در این صورت:

الف) f خطی است.

ب) $f = \lambda T$ که λ یک عدد حقیقی غیرصفر و T یک ایزومتری از X به Y است.

اثبات. x دلخواه در X را ثابت در نظر می‌گیریم. فرض کنید

$$M = \{y : y \in Y, ||y|| = ||2f(x) - y|| \leq 2||f(x)||\}$$

و نیز $f(x) = m$. تابع $g : M \longrightarrow M$ را با ضابطه $g(y) = 2f(x) - y$ تعریف می‌کنیم. در این صورت M، m و g خصوصیات زیر را دارند:

(۱.۲.۱) M یک فضای متریک کراندار با متر $||d(y_1, y_2)|| = ||y_1 - y_2||$ می‌باشد.

(۲.۲.۱) $f(x) = m$ در M قرار دارد. زیرا $f(x) \in Y$ و $||f(x)|| = ||2f(x) - f(x)|| \leq 2||f(x)||$

(۳.۲.۱) g یک ایزومتری از M به روی M است. زیرا اگر $y_1, y_2 \in M$ آن‌گاه

$$||y_1 - y_2|| = ||y_1 - 2f(x) + 2f(x) - y_2|| = ||g(y_1) - g(y_2)||.$$

چون g معکوس خودش است لذا $g(M) = M$.

(۴.۲.۱) برای هر y در M با $k = 2$ داریم: $d(g(y), y) \geq kd(m, y)$، زیرا

$$d(g(y), y) = ||g(y) - y|| = ||2f(x) - y - y|| = 2||f(x) - y|| = 2d(m, y).$$

از قضیه ۱.۱ و گزاره‌های (۱.۲.۱) تا (۴.۲.۱) نتیجه می‌گیریم که هر ایزومتری پوشای M، m را ثابت نگه می‌دارد. حال یک ایزومتری مناسب تعریف می‌کنیم. x_0 را در $f^{-1}(2f(x))$ ثابت در نظر گرفته و تابع $h : M \to M$ را با ضابطه $h(y) = f(x_0 - f^{-1}(y))$ تعریف می‌کنیم. در این صورت h

دارای خصوصیات زیر است:

(۵.۲.۱) h خوش تعریف است:

اگر $f(x_1)=f(x_2)=y$ آن‌گاه

$$||f(x_0-x_1)-f(x_0-x_2)||=P(||(x_0-x_1)-(x_0-x_2)||)=P(||x_1-x_2||)=||f(x_2)-f(x_1)||=0,$$

که P تابع اندازه برای f است.

(۶.۲.۱) h ایزومتری است:

اگر $f(x_1)=y_1, f(x_2)=y_2$ آن‌گاه

$$||h(y_1)-h(y_2)||=||f(x_0-x_1)-f(x_0-x_2)||=P(||x_2-x_1||)=||f(x_2)-f(x_1)||=||y_2-y_1||.$$

(۷.۲.۱) h یک ایزومتری از M به توی M است:

بافرض $f(x_1)=y_1\in M$ داریم:

$$\begin{aligned}||2f(x)-h(y_1)|| &= ||2f(x)-f(x_0-x_1)||=||f(x_0)-f(x_0-x_1)||=P(||x_1-0||)\\ &= ||f(x_1)-f(0)||=||y_1-0||=||y_1||=||2f(x)-y_1||\\ &= ||f(x_0)-f(x_1)||=P(||x_0-x_1||)=P(||(x_0-x_1)-0||)\\ &= ||f(x_0-x_1)-f(0)||=||h(y_1)-0||=||h(y_1)||.\end{aligned}$$

بنابراین $h(M)\subseteq M$.

(۸.۲.۱) h یک ایزومتری پوشاست.

چون h معکوس خودش است $h(M)=M$.

بنا به قضیه ۱.۱ h، m را ثابت نگه می‌دارد

$$f(x)=m=hm=f(x_0-f^{-1}(m))=f(x_0-f^{-1}(f(x)))=f(x_0-x).$$

لذا

$$\begin{aligned}0 &= ||f(x)-f(x_0-x)||=P(||x-(x_0-x)||)=P(||2x-x_0||)=||f(2x)-f(x_0)||\\ &= ||f(2x)-2f(x)||.\end{aligned}$$

(۹.۲.۱) بنابراین برای هر x در X داریم $f(2x)=2f(x)$.

حالا برای y ثابت و هر x در X، تابع $f_y: X \longrightarrow Y$ با ضابطه $f_y(x)=f(x+y)-f(y)$ تعریف می‌کنیم: f_y پیوستگی و پوشایی را از f به ارث می‌برد و $f_y(0)=0$ علاوه بر این f_y حافظ فاصله است زیرا:

$$||f_y(x_1)-f_y(x_2)|| = ||f(x_1+y)-f(x_2+y)|| = P(||(x_1+y)-(x_2+y)|| = P(||x_1-x_2||).$$

(درواقع f_y همان تابع اندازه f را دارد.) لذا نتیجه می‌گیریم که (۹.۲.۱) برای f_y همانند f به کار می‌رود. فرض کنید x، y عناصر دلخواه در X باشند. در این صورت:

$$f((x-y)+y)-f(y) = f_y(x-y) = 2f_y(\frac{x-y}{2}) = 2[f(\frac{x-y}{2}+y)-f(y)].$$

با توجه به جمله اول و آخر تساوی داریم:

$$f(x)-f(y) = 2(f(\frac{x+y}{2})-f(y)) \Rightarrow f(x)+f(y) = 2f(\frac{x+y}{2}) = f(x+y).$$

در نتیجه f جمعی است و چون f پیوسته است، پس خطی است. بدین ترتیب قسمت (الف) (۲.۱) ثابت می‌شود.

فرض کنید u یک بردار یکه در X باشد. برای $\alpha \in R^+$ داریم:

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= P(||\alpha u - 0||) = ||f(\alpha u)-f(0)|| = ||\alpha f(u)|| = \alpha||f(u)-f(0)|| \\ &= \alpha P(||u-0||) = \alpha P(1). \end{aligned}$$

فرض کنید $\lambda = P(1)$، $\lambda \neq 0$ زیرا اگر $\lambda = 0$ آن گاه $P \equiv 0$ و f پوشا نخواهد بود. فرض کنید $T=\frac{f}{\lambda}$. $T: X \longrightarrow Y$ پوشاست و برای هر x، y در X:

$$\begin{aligned} ||T(x)-T(y)|| &= ||\frac{f(x)}{\lambda}-\frac{f(y)}{\lambda}|| = \frac{1}{\lambda}||f(x)-f(y)|| = \frac{1}{\lambda}P(||x-y||) = \frac{1}{\lambda}||x-y||P(1) \\ &= ||x-y|| \end{aligned}$$

و این قسمت (ب) قضیه ۲.۱ را اثبات می‌کند. □

تعریف ۳.۱ فرض کنیم x، y دو نقطه از فضای X باشند منظور از یک مسیر در X از x به y نگاشتی مانند $f:[a,b]\longrightarrow X$ از بازه‌ای بسته در خط حقیقی بتوی X است به طوری که $f(a)=x$ و $f(b)=y$. فضای X را وقتی همبند مسیری می‌خوانیم که هر زوج از نقاط X را بتوان به وسیله مسیری در آن به هم پیوند داد.

لم ۱.۱ فرض کنید $\varepsilon>0$ داده شده و X یک فضای برداری نرم‌دار حقیقی با بعد $\dim X\geq 2$ باشد، در این صورت برای هر x در X با $||x||\leq 2\varepsilon$، x_1 و x_2 در X موجودند به طوری که $x=x_1+x_2$ و $||x_1||=||x_2||=\varepsilon$.

اثبات. اگر $x=0$، u را در X طوری انتخاب می‌کنیم که $||u||=1$ با فرض $x_1=\varepsilon u=-x_2$ نتیجه به دست می‌آید. اگر $x\neq 0$ قرار می‌دهیم $S_\varepsilon=\{y:y\in X,||y||=\varepsilon\}$. اگر v و w بردارهای مستقل خطی در S_ε باشند آن‌گاه

$$\alpha_{v,w}(t)=\frac{\varepsilon[(\cos t)v+(\sin t)w]}{||(\cos t)v+(\sin t)w||}.$$

یک مسیر در S_ε از v تا w است. اگر v و w بردارهای وابسته در S_ε باشند آن‌گاه $v=\pm w$. با توجه به این‌که $\dim X\geq 2$، z را در S_ε طوری انتخاب می‌کنیم که z مستقل از v (و بنابراین از w) باشد. لذا

$$\beta_{v,w}(t)=\begin{cases}\alpha_{v,z}(t) & t\leq\frac{\pi}{2}\\ \\ \alpha_{z,w}(t-\frac{\pi}{2}) & t\geq\frac{\pi}{2}\end{cases}\qquad (1-1)$$

یک مسیر در S_ε از v تا w است. نتیجه می‌گیریم که S_ε، همبند مسیری است. اکنون برای هر $y\in S_\varepsilon$ تعریف می‌کنیم $\mu:S_\varepsilon\longrightarrow R^+$ که $\mu(y)=||x-y||$، μ یک تابع پیوسته روی S_ε است. چون $\pm\varepsilon(\frac{x}{||x||})$ در S_ε است داریم:

$$\begin{aligned}\mu(\varepsilon(\frac{x}{||x||})) &= ||x-\varepsilon(\frac{x}{||x||})||=|\,||x||-\varepsilon|\leq\varepsilon<||x||+\varepsilon=||x-(-\varepsilon)\frac{x}{||x||}||\\ &= \mu\left((-\varepsilon)\frac{x}{||x||}\right).\end{aligned}$$

با توجه به همبند مسیری بودن S_ε، یک عنصر $x_۱$ در S_ε وجود دارد به طوری که $\mu(x_۱) = \varepsilon$. فرض کنید که $x_۲ = x - x_۱$ آن‌گاه $x = x_۱ + x_۲$ و $\varepsilon = ||x_۱||$. چون $x_۱ \in S_\varepsilon$ داریم

$$||x_۲|| = ||x - x_۱|| = \mu(x_۱) = \varepsilon. \qquad \square$$

لم ۲.۱ فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ حافظ فاصله باشد و $\dim X \geq ۲$. اگر برای هر $\varepsilon > ۰$، $x, y \in X$ موجود باشند به طوری که $x \neq y$ و $||f(x) - f(y)|| < \varepsilon$ آن‌گاه f به طور یکنواخت پیوسته خواهد بود.

اثبات. فرض کنید $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد. x و y را در X طوری انتخاب می‌کنیم که $x \neq y$ و $||f(x) - f(y)|| < \frac{\varepsilon}{۳}$. فرض کنید $\delta = ۲||x - y|| > ۰$ اگر v و w در X باشند و $||v - w|| < \delta$ بنا به لم ۱.۱، $x_۱$ و $x_۲$ در X موجودند به طوری که $||x_۱|| = ||x_۲|| = \frac{\delta}{۲}$ و $v - w = x_۱ + x_۲$ آن‌گاه

$$\begin{aligned}
||f(v) - f(w)|| &= P(||v - w||) = P(||x_۱ - (-x_۲)||) = ||f(x_۱) - f(-x_۲)|| \\
&\leq ||f(x_۱) - f(۰)|| + ||f(۰) - f(-x_۲)|| \\
&= P(||x_۱ - ۰||) + P(||۰ - (-x_۲)||) \\
&= ۲P(\frac{\delta}{۲}) = ۲P(||x - y||) \\
&= ۲||f(x) - f(y)|| < ۲\left(\frac{\varepsilon}{۳}\right) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

بنابراین اگر $||v - w|| \leq \delta$ آن‌گاه $||f_{(v)} - f_{(w)}|| < \varepsilon$ و لذا f به طور یکنواخت پیوسته است. $\square$

نتیجه ۱.۱ فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ حافظ فاصله بوده، $\dim X \geq ۲$ و Y جدایی پذیر (دارای پایه چگال شمارا) باشد دراین صورت f به طور یکنواخت پیوسته است.

اثبات. فرض کنید $\varepsilon > ۰$ طوری داده شده باشد که برای هر x، y در X که $x \neq y$، $||f(x) - f(y)|| \geq \varepsilon$ فرض کنید Σ یک زیر مجموعه چگال شما را از Y باشد. برای هر $x \in X$، S_x را طوری در Σ انتخاب می‌کنیم که $||f(x) - s_x|| < \frac{\varepsilon}{۲}$. دراین صورت $x \longrightarrow s_x$ یک نگاشت یک‌به‌یک از X به مجموعه شمارای Σ است. نتیجه این‌که X یا شماراست یا متناهی چون X یک فضای برداری حقیقی است به تناقض می‌رسیم. حال به کار بردن لم ۲.۱ پیوستگی یکنواخت f را نتیجه می‌دهد. $\square$

قضیه ۳.۱ فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ با $f(\circ) = \circ$ یک نگاشت پوشا و حافظ فاصله باشد دراین صورت نتایج قضیه ۲.۱ برای $\dim X \geq ۲$ برقرار است.

اثبات. پیوستگی f تنها فرض اضافی مورد نیاز برای به دست آوردن نتایج قضیه ۲.۱ است چون f پوشاست بنا به لم ۲.۱ پیوسته یکنواخت است. □

۱—۱ خصوصیات نگاشت‌های ایزومتری

مهمترین نکته این بخش رابطه بین ایزومتری‌ها و خطی بودن یعنی قضیه مازور—اولام و گسترش آن است. برای دیدن نکات بیشتری از ایزومتری‌ها روی فضای باناخ به [٦] مراجعه کنید. مطالب این بخش از [۱، ۲، ۷، ۱۵ و ١٦] برداشت شده است.

تعریف ۴.۱ نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ که X و Y فضاهای نرم‌دار حقیقی اند، مستوی است اگر

$$f((۱-t)a+tb) = (۱-t)f(a)+tf(b) \quad (a,b \in X, \circ \leq t \leq ۱). \qquad (۱—۲)$$

به طور معادل، f مستوی است اگر نگاشت $T : X \longrightarrow Y$ با ضابطه $T(x) = f(x) - f(\circ)$ خطی باشد.

نکته ۱.۱ هر ایزومتری لزوماً مستوی نیست. فرض کنید X، خط حقیقی R باشد و Y صفحه مختلط با نرم $||x|| = \max(|x_۱|, |x_۲|)$ و $\varphi : R \longrightarrow R$ تابعی باشد که برای هر t و s در R: $|\varphi(s) - \varphi(t)| \leq |s-t|$ مثلاً $\varphi(t) = |t|$ یا $\varphi(t) = \sin t$. قرار می‌دهیم $f(s) = (s, \varphi(s))$ در این صورت ایزومتری $f : X \longrightarrow Y$ را داریم که معمولاً مستوی نیست.

تعریف ۵.۱ ایزومتری $f : X \longrightarrow Y$ مستوی است اگر برای هر a، b در X داشته باشیم

$$f\left(\frac{(a+b)}{۲}\right) = \frac{f(a)+f(b)}{۲}. \qquad (۱—۳)$$

یعنی f نقطه وسط خط واصل را حفظ می‌کند. چون ایزومتری‌ها پیوسته‌اند با استفاده از (۱—۳)، (۱—۲) را برای همه t های گویا بین صفر و یک به دست می‌آوریم.

نکته ۲.۱ در دو حالت مهم زیر هر ایزومتری، مستوی است:

الف) X اکیداً محدب باشد یعنی هیچ کره‌ای شامل یک بازه نیست در این صورت (۱—۳)، با توجه به این نکته که کره‌ها با مراکز $f(a)$ و $f(b)$ و شعاع $\frac{||a-b||}{۲}$، تنها در نقطه $\frac{f(a)+f(b)}{۲}$ متقاطع اند، به دست می‌آید. فضاهای حاصلضرب داخلی و ℓ^p برای $۱ < p < \infty$ اکیداً محدبند.

ب)اگر f دوسویی باشد. این نتایج به وسیله مازور و اولام در سال (۱۹۳۲) اثبات شده است. [۱ ص ۱٦٦] و [۲، ۱۴.۱]. ما اثبات این نتیجه را در این بخش ارائه می‌دهیم.

تعریف ٦.۱ انـعـکـاس X در z برای $z \in X$ عبارتست از نگاشت $\psi : X \longrightarrow X$ که با ضابطه $\psi(x) = ۲z - x$ تعریف شده است. چون $\psi o \psi$، همانی است، لذا ψ تابعی دوسویی با ضابطه $\psi = \psi^{-۱}$ می‌باشد. علاوه بر این ψ ایزومتری است و z تنها نقطه ثابت ψ است. معادلات

$$||\psi(x) - z|| = ||x - z|| \quad \text{و} \quad ||\psi(x) - x|| = ۲||x - z|| \qquad (۴—۱)$$

برای هر x درX برقرارند.

قضیه ۴.۱ : مازور—اولام:

هر ایزومتری دوسویی $f : X \longrightarrow Y$ بین فضاهای نرم‌دار مستوی است.

اثبات. فرض کنید a و b در X باشند، قرار می‌دهیم $z = \frac{a+b}{۲}$. اگرW خانواده همه ایزومتری‌های دوسویی $g : X \longrightarrow X$ باشد که نقاط a و b را ثابت نگه می‌دارد و قرار دهیم

$$\lambda = \sup\{||g(z) - z|| : g \in W\}.$$

برای $g \in W$ داریم:

$$||g(z) - a|| = ||g(z) - g(a)|| = ||z - a||.$$

بنابراین

$$||g(z) - z|| \leq ||g(z) - a|| + ||a - z|| = ۲||a - z||.$$

در نتیجه $\lambda < \infty$.

فرض کنید ψ انعکاس X در z باشد. اگر $g \in W$ آن‌گاه $g^* = \psi g^{-1}\psi g \in W$ و بنابراین $||g^*(z) - z|| \leq \lambda$. چون g^{-1} ایزومتری است با توجه به (۱−۴) داریم

$$
\begin{aligned}
۲||g(z) - z|| &\overset{\text{بنا به تعریف } \psi}{=} ||\psi(g(z)) - g(z)|| = ||g^{-1}\psi(g(z)) - z|| = ||\psi(g^{-1}(\psi(g(z))) - z|| \\
&= ||g^*(z) - z|| \leq \lambda, \qquad (g \in W).
\end{aligned}
$$

بنابراین $۲\lambda \leq \lambda$ پس $\lambda = ۰$. یعنی $g(z) = z$ برای هر g در W.

فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ یک ایزومتری دوسویی باشد. قرار دهید $z' = \frac{f(a)+f(b)}{۲}$ باید نشان دهیم $f(z) = z'$. اگر ψ' انعکاس Y در z' باشد آن‌گاه نگاشت $h = \psi f^{-1}\psi' f$ در W است و بنابراین $h(z) = z$. در نتیجه $\psi' f(z) = f(z)$. چون z' تنها نقطه ثابت ψ' است نتیجه می‌گیریم $f(z) = z'$.

تعریف ۷.۱ یک فضای برداری حقیقی با متریک $d(.,.)$ که در $d(u,w) = d(u+v, w+v)$ برای هر u، v و w صدق می‌کند و در آن اعمال جمع و ضرب اسکالر پیوسته مجزا هستند، یک فضای برداری متریک نامیده می شود.

تعریف ۸.۱ یک فضای برداری متریک کامل، F−فضا نامیده می شود. غالباً معرفی تابع $||u|| = d(u, ۰)$ که شبه‌نرم خوانده می‌شود برای این‌گونه فضاها مناسب‌تر است که به وضوح دارای خصوصیات زیر است:

الف) $||u|| = ۰$ اگر وتنها اگر $u = ۰$.

ب) $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$.

ج) $||-u|| = ||u||$.

د) اگر $\beta_m \longrightarrow \beta$ و $||U_m - U|| \longrightarrow ۰$. آن‌گاه $||\beta_m U_m - \beta U|| \longrightarrow ۰$ که U_m، v و U متعلق به فضا و β و β_m اعداد حقیقی هستند.

تعریف ۹.۱ یک فضای برداری توپولوژیکی موضعاً کراندار است اگر هر همسایگی مبدأ شامل یک مجموعه باز کراندار باشد.

تعریف ۱۰.۱ یک فضای برداری توپولوژیکی محدب موضعی است اگر دارای یک پایه موضعی با اعضای محدب باشد.

در ادامه به تقریب ایزومتری‌ها می پردازیم.
یک $\varepsilon-$ ایزومتری از یک فضای متریک X به فضای دیگر Y یک نگاشت $T : X \longrightarrow Y$ است که فاصله‌ها را حداکثر به اندازه $\varepsilon > \circ$ تغییر می‌دهد یعنی

$$|d(T(x), T(y)) - d(x, y)| < \varepsilon, \qquad (x, y \in X).$$

برای این گونه نگاشت‌ها مسئله پایایی مطرح می‌شود. آیا برای $\eta > \circ$ داده شده یک $\varepsilon > \circ$ و یک ایزومتری $U : X \longrightarrow Y$ وجود دارد به طوری که برای هر x در X داشته باشیم $d(T(x), U(x)) < \eta$؟ در موردی که X یک فضای هیلبرت و $X = Y$ پاسخ توسط هایرز و اولام داده شده است. ([۱۰] را ببینید) آن‌ها نشان دادند برای $\varepsilon > \circ$ داده شده و یک $\varepsilon-$ ایزومتری پوشای T با $T(\circ) = \circ$

$$U(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{T(\text{۲}^n x)}{\text{۲}^n}, \qquad (\text{۱}-\text{۵})$$

برای هر $x \in X$ موجود است و

$$||T(x) - U(x)|| < k\varepsilon \qquad (x \in X).$$

درسال ۱۹۸۳، گویرتز [۷] نشان داد که هر $\varepsilon-$ ایزومتری پوشا $f : X \longrightarrow Y$ با $f(\circ) = \circ$ که X و Y فضاهای باناخ حقیقی اند می‌تواند به صورت یکنواخت با یک ایزومتری خطی U تقریب زده شود به طوری که

$$||f(x) - U(x)|| \leq \text{۵}\varepsilon, \qquad (x \in X).$$

املادیک و شمرل [۱۵] نشان داد که $\text{۲}\varepsilon$ در آخرین نامساوی ثابتی اکید است. مسئله ایزومتری‌ها و تغییرات آن‌ها به وسیله ریاضیدانان بسیاری از مناظر مختلف مورد توجه قرار گرفته است. در بخش بعدی ابتدا مسئله پایایی و سپس تقریب ایزومتری‌ها روی فضاهای باناخ را بررسی می‌کنیم.

۱—۲ پایایی نگاشت‌های حافظ فاصله

در این بخش به بررسی پایداری نگاشت‌های حافظ فاصله می‌پردازیم. مطالب این بخش از [۱۸، ۲۰ و ۲۱] برداشت شده است.

تعریف ۱۱.۱ اگر $f : X \longrightarrow Y$، آن‌گاه هر نگاشت $F : Y \longrightarrow X$ بااین خاصیت که برای هر y در Y

$$||fF(y) - y|| \leq \delta$$

را یک δ–معکوس f می‌نامیم اگر f یک δ–معکوس داشته باشد، δ–پوشا نامیده می‌شود. یا به عبارت معادل $f : X \longrightarrow Y$ δ– پوشاست اگر و تنها اگر

$$\forall y \in Y, \quad \exists\, x \in X, \quad ||y - f(x)||_Y \leq \delta.$$

بنابراین عبارت (δ, ε)–ایزومتری به یک ε–ایزومتری δ–پوشا اشاره دارد. علاوه بر این f تقریباً پوشا نامیده می‌شود اگر $\delta \geq 0$ وجود داشته باشد به طوری که f، δ–پوشا باشد.

درادامه باید از یکی از نتایج شمرل و وایسالا استفاده کنیم که برای اثبات می‌توانید [۱۹] را ببینید.

قضیه ۵.۱ فرض کنید $(X, ||.||_X)$ و $(Y, ||.||_Y)$ فضاهای باناخ بوده و $f : X \longrightarrow Y$ یک ε–ایزومتری، تقریباً پوشا، برای یک $\varepsilon \geq 0$ و $f(0) = 0$ باشد. در این صورت یک ایزومتری خطی یکتای $u : X \longrightarrow Y$ موجود است به طوری که

$$||f(x) - u(x)||_Y \leq 2\varepsilon, \qquad x \in X.$$

قضیه ۶.۱ فرض کنید $(X, +)$ یک گروه و $(Y, ||.||)$ یک فضای باناخ حقیقی و ε, δ ثابت‌های غیرمنفی بوده و $f : X \longrightarrow Y$، δ–پوشا باشد به طوری که

$$\sup\{||f(x+y) - f(y+x)|| : \ x, y \in X\} =: m < \infty. \qquad (۱—۶)$$

اگر f در نامساوی زیر صدق کند

$$\Big|\, ||f(x)-f(y)|| - ||f(x-y)|| \,\Big| \le \varepsilon, \qquad (x,y\in X). \tag{۱—۷}$$

آن‌گاه

$$||f(x+y)-f(x)-f(y)|| \le ۵\varepsilon + ۵\delta, \quad (x,y\in X). \tag{۱—۸}$$

اثبات. $x\in X$ را ثابت فرض کرده و نگاشت چند متغیره $G_x : Y \longrightarrow n(Y)$ (که $n(Y)$ خانواده همه زیرمجموعه‌های غیرتهی Y است.) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G_x(u) := \{f(a_u+x)-f(x) : a_u \in f^{-۱}(B(u,\delta))\}, \quad (u\in Y),$$

که $B(a,\eta)$، گوی بسته به مرکز a و شعاع η را نشان می‌دهد. چون f، δ–پوشاست برای هر u در Y داریم: $G_x(u) \neq \phi$. u و v را در Y ثابت در نظر گرفته و فرض می‌کنیم $z_v \in G_x(v), z_u \in G_x(u)$. $a_u \in f^{-۱}(B(u,\delta))$ و $a_v \in f^{-۱}(B(v,\delta))$ موجودند به طوری که $z_u = f(a_u+x)-f(x)$ و $z_v = f(a_v+x)-f(x)$. در نتیجه $||f(a_v)-v|| \le \delta$ و $||f(a_u)-u|| \le \delta$. بنابراین:

$$\begin{aligned}
\Big|\, ||z_u - z_v|| - ||u-v|| \,\Big| &\le \Big|\, ||f(a_u+x)-f(a_v+x)|| - ||f(a_u-a_v)|| \,\Big| \\
&+ \Big|\, ||f(a_u-a_v)|| - ||f(a_u)-f(a_v)|| \,\Big| \\
&+ \Big|\, ||f(a_u)-f(a_v)|| - ||u-v|| \,\Big| \\
&\le ۲\epsilon + ||f(a_u)-f(a_v)-u+v|| \le ۲\varepsilon + ۲\delta.
\end{aligned}$$

در نتیجه برای هر v,u در Y و z_u دلخواه در $G_x(u)$ و z_v دلخواه در $G_x(v)$ خواهیم داشت:

$$\Big|\, ||z_u - z_v|| - ||u-v|| \,\Big| \le ۲\varepsilon + ۲\delta. \tag{۱—۹}$$

یعنی اگر g_x انتخاب دلخواه از G_x باشد آن‌گاه:

$$\Big|\, ||g_x(u)-g_x(v)|| - ||u-v|| \,\Big| \le ۲\varepsilon + ۲\delta, \qquad (u,v\in Y). \tag{۱—۱۰}$$

به عبارت دیگر هر انتخابی از G_x یک $(۲\varepsilon+۲\delta)$–ایزومتری است. علاوه بر این اگر دو انتخاب دلخواه h_x, g_x از G_x را داشته باشیم با قرار دادن $u=v$ در رابطه (۱–۹) خواهیم داشت:

$$||g_x(u)-h_x(u)|| \leq ۲\varepsilon+۲\delta, \qquad (u\in Y). \tag{۱–۱۱}$$

بنابراین فاصله بین هر دو انتخاب بزرگتر از $۲\varepsilon + ۲\delta$ نیست.

حال نشان می دهیم که G_x، یک نگاشت δ–پوشاست یعنی

$$\forall v\in Y,\ \exists\ u\in Y: \quad ||v-h_x(u)||\leq \delta,$$

برای h_x ای از G_x. برای این منظور v را در Y ثابت در نظر گرفته و a دلخواه در $f^{-۱}(B(v+f(x),\delta)$ برمی‌گزینیم. فرض کنید $u := f(a-x)$ و $h_x(u)=f(a)-f(x)$. در این صورت $a-x\in f^{-۱}(u)\subset f^{-۱}(B(u,\delta))$ و $h_x(u)=f((a-x)+x)-f(x)$ مقدار انتخاب شده تابع G_x در u خواهد بود. بنابراین

$$||h_x(u)-v|| = ||f(a)-f(x)-v|| \leq \delta.$$

فرض کنید $g_x: Y\longrightarrow Y$ یک انتخاب دلخواه از G_x باشد. حال ثابت می‌کنیم که

$$||g_x(\circ)|| \leq \varepsilon+\delta. \tag{۱–۱۲}$$

چون $g_x(\circ)\in G_x(\circ)$، لذا $a\in f^{-۱}(B(\circ,\delta))$ موجود است به طوری که

$$g_x(\circ) = f(a+x)-f(x).$$

بنابراین چون $||f(a)||\leq \delta$ با توجه به (۱–۷) داریم:

$$\begin{aligned} ||g_x(\circ)|| &= ||f(a+x)-f(x)|| \\ &\leq \Big|\, ||f(a+x)-f(x)|| - ||f(a)||\, \Big| + ||f(a)|| \leq \varepsilon+\delta. \end{aligned}$$

بدین ترتیب (۱–۱۲) ثابت می‌شود.

چون G_x ، δ–پوشاست و $g_x(u)$ در $G_x(u)$ است با توجه به محاسبات (۱–۱۱) برای هر v در Y، u در Y موجود است به طوری که $||v-g_x(u)||\leq ۲\varepsilon+۳\delta$.

بنابراین g_x یک $(۳\delta + ۲\varepsilon)$ پوشا و $g_x - g_x(\circ)$ یک $۴\delta + ۳\varepsilon-$ پوشاست. علاوه بر این در صفر، به صفر می‌گراید و با توجه به $(۱-۱۰)$، یک $۲\delta+۲\varepsilon$–ایزومتری است. بنا به قضیه ۵.۱، یک ایزومتری خطی یکتا $I_{g_x} : Y \longrightarrow Y$ موجود است به طوری که

$$||g_x(u) - g_x(\circ) - I_{g_x}(u)|| \leq ۴\varepsilon + ۴\delta, \qquad (u \in Y).$$

در نتیجه با توجه به $(۱-۱۲)$ داریم:

$$||g_x(u) - I_{g_x}(u)|| \leq ۵\varepsilon + ۵\delta, \qquad (u \in Y). \qquad (۱۳-۱)$$

در ادامه نشان می‌دهیم که این ایزومتری به انتخاب G_x وابسته نیست. فرض کنید $h_x : Y \longrightarrow Y$ انتخاب دیگری از G_x باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} ||I_{h_x}(u) - I_{g_x}(u)|| &\leq ||I_{h_x}(u) - h_x(u)|| + ||h_x(u) - g_x(u)|| + ||g_x(u) - I_{g_x}(u)|| \\ &\leq ۱۲\varepsilon + ۱۲\delta. \end{aligned}$$

چون ایزومتری‌های I_{g_x} و I_{h_x} خطی اند پس $I_{g_x} = I_{h_x}$.
I_{g_x} را به اختصار با I_x نمایش می‌دهیم. برای x و y ثابت در X، فرض کنید $u := f(y)$ در این صورت $y \in f^{-۱}(u) \subset f^{-۱}(B(u,\delta))$ و $f(x+y) - f(x)$ مقدار انتخابی g_x در G_x در نقطه u است. بنا به تعریف G_x و با توجه به $(۱-۱۳)$ داریم:

$$||f(y+x) - f(x) - I_x(f(y))|| \leq ۵\varepsilon + ۵\delta, \qquad (x, y \in X). \qquad (۱۴-۱)$$

با تبدیل x به y و برعکس در$(۱-۱۴)$ داریم:

$$||f(x+y) - f(y) - I_y(f(x))|| \leq ۵\varepsilon + ۵\delta, \qquad (x, y \in X). \qquad (۱۵-۱)$$

بنابراین با توجه به $(۱-۱۴)$ و $(۱-۱۵)$ و $(۱-۶)$ برای همه x و y در X داریم:

$$\begin{aligned} ||f(x) - I_y(f(x))|| &\leq ||f(x) + I_x(f(y)) - f(y+x)|| + ||f(y+x) - f(x+y)|| \\ &+ ||f(x+y) - f(y) - I_y(f(x))|| + ||f(y) - Ix(f(y))|| \\ &\leq ۱\circ\varepsilon + ۱\circ\delta + m + ۲||f(y)||. \end{aligned}$$

در نامساوی فوق، فرض می‌کنیم $y \in X$ ثابت باشد. چون f ، δ–پوشاست برای یک u دلخواه در Y، x در X موجود است به طوری که $||u - f(x)|| \leq \delta$ و داریم:

$$\begin{aligned} ||u - I_y(u)|| &\leq ||u - f(x)|| + ||f(x) - I_y(f(x))|| + ||I_y(f(x)) - I_y(u)|| \\ &\leq 10\varepsilon + 12\delta + m + 2||f(y)||. \end{aligned}$$

از خطی بودن ایزومتری I_y نتیجه می‌شود که:

$$I_y(u) = u, \quad (u \in Y)$$

از (۱–۱۵) به دست می‌آوریم

$$||f(x+y) - f(y) - f(x)|| \leq 5\varepsilon + 5\delta, \qquad (x, y \in X),$$

که این اثبات را کامل می‌کند. □

نتیجه ۲.۱ فرض کنید $(X, +)$ یک گروه و $(Y, ||.||)$ یک فضای باناخ حقیقی و $f : X \longrightarrow Y$ پوشا باشد به طوری که (۱–۶) برقرار باشد در این صورت $||f(x) - f(y)|| = ||f(x-y)||$ اگر و تنها اگر f جمعی باشد.

قضیه ۷.۱ فرض کنید $(X, +)$ یک گروه و $(Y, ||.||)$ یک فضای باناخ حقیقی و δ و ε ثابت‌های غیر منفی باشند. اگر $f : X \longrightarrow Y$، δ–پوشا باشد به طوری که

$$f(x+y+z) = f(x+z+y), \qquad (x, y, z \in X) \qquad (۱–۱۶)$$

و

$$\Big| \, ||f(x) - f(y)|| - ||f(x-y)|| \, \Big| \leq \varepsilon, \qquad (x, y \in X).$$

در این صورت دقیقاً یک تابع جمعی $g : X \longrightarrow Y$ موجود است به طوری که

$$||f(x) - g(x)|| \leq 5\varepsilon + 5\delta, \qquad (x \in X).$$

اثبات. به وضوح شرط (۱—۱۶)، (۱—۶) را با $m = 0$ نتیجه می‌دهد. بنابراین با استفاده از قضیه قبل می توان (۱—۸) را نتیجه گرفت. شرط (۱—۱۶) ما را قادر می‌سازد تا با استفاده از نتیجه ریتز بیان کنیم که یک تابع جمعی یکتای $g : X \longrightarrow Y$ موجود است به طوری که برای هر x در X

$$||f(x) - g(x)|| \leq 5\varepsilon + 5\delta.$$

چنین تابعی در معادله زیر صدق می‌کند

$$||g(x - y)|| = ||g(x) - g(y)||, \qquad (x, y \in X).$$

برای دیدن جزئیات بیشتر [۱۷، قضایای ۴ و ۵، ص ۲۴۴—۲۴۰] راببینید. □

نکته ۳.۱ فرضیات (۱—۶) و (۱—۸) در قضیه ٦.۱ و ۷.۱ و نتیجه ۲.۱ خیلی ضعیفتر از جابه‌جایی بودند. با فرض آبلی بودن دامنه، روابط (۱—٦) و (۱—۸) به‌طور بدیهی برقرارند.

نکته ۴.۱ شرط (۱—٦)، غالباً شرط کاناپن نامیده می‌شود زیرا برای اولین بار در مقاله او دیده شد.

قضیه ۸.۱ فرض کنید $(X, ||.||)$ یک فضای نرم‌دار حقیقی و $(Y, ||.||)$ یک فضای باناخ حقیقی و δ و ε دو ثابت غیر منفی باشند. اگر $f : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت δ—پوشا صادق در شرط زیر باشد:

$$||x - y|| = ||u - v|| \Rightarrow |\ ||f(x) - f(y)|| - ||f(u) - f(v)||\ | \leq \varepsilon, \qquad (۱۷—۱)$$

آن‌گاه یک ثابت $c > 0$ و یک ایزومتری خطی یکتای $G : X \longrightarrow Y$ موجود است به طوری که

$$||f(x) - f(0) - cG(x)|| \leq 5\varepsilon + 5\delta, \qquad (x \in X).$$

اگر علاوه بر این، $(X, ||.||)$ یک فضای باناخ باشد آن‌گاه G، دو سویی است.