بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه قم

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

عنوان:

اندیس های کیرشهف شبکه های الحاقی

استاد راهنما:

دکترغلامحسن شیردل

نگارنده:

نرجس رمضان نیا جلالی

بهار ۱۳۹۳

تقدیم به:

پدر و مادر فداکارم

همسر مهربان و دلسوزم

و دو پسر عزیزم

تشکر و قدردانی

حمد و سپاس مخصوص خداوندی است که پروردگار جهانیان است. حال که با عنایت و لطف خداوند موفق به نگارش این پایان‌نامه شدم، از همه کسانی که مرا در این راه یاری نمودند، تشکر و قدردانی می‌کنم.

از استاد گرامی و بزرگوار **آقای دکترغلام حسن شیردل** به پاس راهنمایی‌های ارزشمند و حمایت‌های بی‌دریغ‌شان در انجام این پایان‌نامه نهایت قدردانی و تشکر را دارم.

از اساتید گرامی و بزرگوار که داوری این پایان‌نامه را بر عهده داشتند تشکر و قدردانی می‌نمایم.

چکیده:

ما در این پایان نامه، مقاومت مؤثر بین هر جفت از رئوس نسبت به $0 \geq \lambda$ و وزن ω روی مجموعه رئوس شبکه الحاقی همچنین اندیس کیرشهف نسبت به $0 \geq \lambda$ و وزن ω شبکه الحاقی را محاسبه می کنیم.بعلاوه، شرح کاملی از مقادیر ویژه و توابع ویژه مربوط به عملگر شرودینگر نیمه معین مثبت روی شبکه الحاقی را بیان می کنیم.

در پایان، مقاومت مؤثر و اندیس کیرشهف توسعه یافته نسبت به $0 \geq \lambda$ و وزن ω رابرای برخی از شبکه های الحاقی به ویژه برای شبکه های مخروطی و ستاره ای محاسبه می کنیم.

واژه های کلیدی:

طیف شرودینگر
شبکه الحاقی
تابع گرین
اندیس کیرشهف
مقاومت مؤثر
لاپلاسین ترکیبیاتی
خوشه ای

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در علم شیمی،اندیس کیرشهف به عنوان یک شاخص برتر نسبت به سایر شاخص های مورد استفاده در تشخیص مو لکولهای متفاوت با شکل و ساختار یکسان مطرح می باشد[۹]. این شاخص به عنوان مجموع مقاومت های مؤثر بین هر جفت از رئوس شبکه تعریف می شود و هم چنین معروف به مقاومت کل است[۸]. با توجه به کاربردهای فوق، تحقیقات زیادی در مورد اندیس های کیرشهف صورت گرفته که در یک مورد می توان محاسبه اندیس کیرشهف برای کلاس های گرافهای متقارن را نام ببریم[٤،۱۱]. به علاوه محاسبه این پارامترها برای شبکه مرکبشان و نیز پیدا کردن روابط موجود بین اندیس های کیرشهف شبکه اصلی و شبکه مرکبشان مفید است. برای نمونه [۱۲] را ببینید. در[٥،٦] مؤلف کلیاتی از اندیس کیرشهف شبکه های متناهی که شامل معرفی مقاومت مؤثر بین هر جفت از رئوس نسبت به $\lambda \geq 0$ و وزن ω است را معرفی می کند. این ثابت می کند که λ کوچکترین مقدار ویژه یک عملگر ویژه شرودینگر نیمه معین مثبت مناسب و ω تابع مشخصه وابسته شبکه مرکب است. در این جا نشان می دهیم که این کلیات، برای بدست آوردن مفهوم اندیس کیرشهف یک شبکه الحاقی مفید هستند. به ویژه، اندیس کیرشهف استاندارد یک شبکه الحاقی که جمع اندیس کیرشهف توسعه یافته است و یک مقدار ثابت که فقط به ضرایب هدایت الحاقی مربوط است را بدست می آوریم. در این کار ، نقش تابع گرین که محاسبه مقاومت مؤثر شبکه است، ضروری می باشد. بعد از معرفی تعاریف اصلی عملگرهای مورد بحث و خاصیت آنها ، ما تعریفی از تابع گرین یک شبکه الحاقی ارائه

می دهیم. بنابراین حاصل کار ما ، تعریفی از مقاومت مؤثر و به تبع آن تعریفی از اندیس کیرشهف و نیز تعریفی از یک شبکه الحاقی می باشد . در ابتدا به معرفی چند عنوان که در طول این فصل به آنها نیاز داریم می پردازیم.

۲.۱ تعاریف

۱.۲.۱ عملگر خود الحاق

یک عملگر T از فضای V به خودش ($Tel(V)$) را خود الحاق گوییم اگر $T^t = T$.

۲.۲.۱ درون ریختی

یک هممورفیسم از یک فضا یا یک ساختار جبری به درون خودش را درون ریختی یا ایندومرفیسم می نامند. به طور مثال یک ایندومرفیسم از فضای برداری V،یک تابع خطی به صورت $f : V \to V$ می باشد.

۳.۲.۱ ماتریس مثبت معین

ماتریس $A_{n\times n}$ را ماتریس مثبت معین گویند اگر برای هر بردار مخالف صفر X داشته باشیم: $X^tAX > 0$.

٤.۲.۱ عملگر نیمه معین مثبت

عملگر $T \in L(V)$ رامثبت نیمه معین گویند هرگاه

$$\forall u \in V : \qquad u^tTu \geqslant 0$$

دراین صورت می نویسیم $T \geqslant 0$. هم چنین $T \in L(V)$ را مثبت معین گویند هرگاه

$$\forall u \in V - \{0\} : \qquad u^tTu > 0.$$

۵.۲.۱ لاپلاسین ترکیبیاتی

فرض کنید V یک مجموعه متناهی باشد، مجموعه توابع حقیقی روی V را با $\mathcal{C}(V)$ نشان می دهیم لاپلاسین ترکیبیاتی یا به طور ساده لاپلاسین شبکه Γ ،یک درون ریختی (ایندومرفیسم)از $\mathcal{C}(V)$ است.

که به هر $u \in \mathcal{C}(V)$ تابع

$$\mathcal{L}(u)(x) = \sum_{y \in V} c(x,y)(u(x) - u(y)) \qquad (x \in V)$$

را نسبت می دهد.

۶.۲.۱ عملگر شرودینگر

فرض کنید $q \in \mathcal{C}(V)$ ،عملگر شرودینگر روی Γ با پتانسیل q یک ایندومرفیسم از $C(V)$ است که به هر $u \in C(V)$ تابع

$$\mathcal{L}_q(u) = \mathcal{L}(u) + qu$$

را نسبت می دهد که $qu \in C(V)$ به صورت

$$(qu)(x) = q(x)u(x)$$

تعریف می شود.به عنوان نمونه[۲،۷] را ببینید. این معروف است که هرعملگر شرودینگر ، خود الحاق است و در عملگرهای شرودینگر مایل هستیم که آنها نیمه معین مثبت باشند.برای مطالعه بیشتر خواص این نوع عملگرها به [۲] مراجعه نمائید.برای هر $\omega \in \Omega(V)$ ،پتانسیل تعیین شده توسط ω به صورت تابع $q_\omega = -\omega^{-1}\mathcal{L}(\omega)$ تعریف می شود.

تعریف ۱.۱. فرض کنید V یک مجموعه متناهی باشد ، مجموعه توابع حقیقی روی V را با $\mathcal{C}(V)$ نشان می دهیم .

حاصل ضرب داخلی معمولی روی $\mathcal{C}(V)$ را با $\langle .,. \rangle$ نشان می دهیم .بنابراین اگر $u, v \in \mathcal{C}(V)$ ،آن گاه

$$\langle u, v \rangle = \sum_{x \in V} u(x)v(x)$$

برای هر $x \in V$ و $\varepsilon_x \in \mathcal{C}(V)$ ،تابع دیراک در x به صورت

$$1(x) = 1$$

به ازای هر $x \in V$ تعریف می شود ودر بقیه جاها $\omega \in (V)$ ،یک وزن است هرگاه به ازای هر $x \in V$ ، $\omega(x) > 0$ و $\langle \omega, \omega \rangle = 1$. مجموعه وزن ها روی V به صورت $\Omega(V)$ نشان داده می شود.

تعریف ۲.۱. سه تائی مرتب $\Gamma = (V, E, c)$ یک شبکه متناهی را نشان می دهد که آن ، یک گراف همبند متناهی بدون حلقه و بدون یال چند گانه است ،با مجموعه رئوس V که عدد اصلی آن برابر n بوده و مجموعه یالهای E که به هر یال $\{x, y\}$ مقدار $c(x, y) > 0$ اختصاص داده می شود.
هم چنین تابع c برای یالهای جهتدار می تواند به عنوان یک تابع متقارن به صورت $c : V \times V \longrightarrow [0, \infty]$ باشد به طوری که به ازای هر $x \in V$ ، $c(x, x) = 0$ وبعلاوه راس x مجاور راس y است اگروفقط اگر $c(x, y) > 0$.

قضیه ۱.۱. عملگر شرودینگر $\mathcal{L}_q$ نیمه معین مثبت است اگروفقط اگروجود داشته باشد $\omega \in \Omega(V)$ و $\lambda \geqslant 0$ به طوری که $q = q_\omega + \lambda$ بعلاوه ω و λ منحصر به فرد تعیین می شوند. بعلاوه $\mathcal{L}_q$ منفرد است اگر وتنها اگر $\lambda = 0$ که در این مورد $\langle \mathcal{L}_{q\omega}(v), v\rangle = 0$ اگروتنها اگر $v = a\omega$ و $a \in R$.در هر صورت λ کوچکترین مقدار ویژه $\mathcal{L}_q$ است وتابع ویژه وابسته اش،مضرب ω است.
اگر $\mathcal{L}_q$ معین مثبت باشد آن گاه معکوس پذیر است و معکوس آنرا عملگر گرین می نامند.
از سوی دیگر وقتی $\mathcal{L}_q$ نیمه معین مثبت وتکین باشدو $u \in \mathcal{C}(V)$ منحصر به فرد باشدو $\langle u, \omega\rangle = 0$ و $\mathcal{L}_q(u) = f - \langle \omega, f\rangle\omega$ عملگری که به هر تابع $f \in \mathcal{C}(V)$ اختصاص داده می شود ،عملگر گرین نامیده می شود.
در هر صورت ، عملگر گرین به صورت g_q نشان داده می شود. [۵]راببینید.
بعلاوه تابع $G_q : V \times V \longrightarrow R$ که به صورت $G_q(x, y) = g_q(\varepsilon_y)(x)$ به ازای هر $x, y \in V$ تعریف می شود، تابع گرین نامیده می شود.توجه کنید که $g_q(\omega) = \Lambda(\lambda)\omega$ که وقتی $\lambda > 0$ آن گاه $\Lambda(\lambda) = \lambda^{-1}$ وهم چنین $\Lambda(0) = 0$.

در [۵،٦]مؤلف کلیاتی از مفهوم اندیس کیرشهف با تعریف مقاومت مؤثر و اندیس کیرشهف نسبت به مقدار $\lambda \geq 0$ و وزن $\omega \in \Omega(V)$ رابیان می کند.به ویژه ،فرض کنیم که تابع روی $\mathcal{C}(V)$ به صورت زیر تعریف شود

$$\eth_{x,y}(u) = 2[\frac{u(x)}{\omega(x)} - \frac{u(y)}{\omega(y)}] - \langle \mathcal{L}_q(u), u\rangle$$

آن گاه می توانیم تعاریف زیر را ارائه دهیم.

تعریف ۳.۱. فرض کنید $x, y \in V$ ،مقاومت مؤثر بین x, y نسبت به λ و ω برابر مقدار

$$R_{\lambda,\omega}(x,y) = \max_{u\in\mathcal{C}(V)} \left\{ \eth_{x,y}(u) \right\}$$

واندیس کیرشهف Γ نسبت به λ و ω برابر مقدار

$$K(\lambda,\omega) = \frac{1}{2} \sum_{x,y\in V} R_{\lambda,\omega}(x,y)\omega^2(x)\omega^2(y)$$

می باشد.حال اگر

$$\eth_{x,y}(u) = 2[\frac{u(x)}{\omega(x)} - \frac{u(y)}{\omega(y)}] - \langle \mathcal{L}_q(u), u\rangle$$

آن گاه مقاومت کل در $x \in V$ نسبت به λ و ω به صورت

$$r_{\lambda,\omega}(x) = \max_{u\in\mathcal{C}(V)} \left\{ \eth_{x}(u) \right\}$$

تعریف می شود. در ادامه مطالب ،هر کجا که مشکلی پیش نیاید، λ و ω را از عبارتها حذف می کنیم.

وقتی $\lambda = 0$ معمولا اندیس λ ووقتی که ω ثابت باشد،اندیس ω را حذف می کنیم. دراین حالت ، R مقاومت مؤثر استاندارد شبکه و K اندیس کیرشهف معرفی شده در شیمی آلی می باشد.
فرمولهای زیر که بر حسب توابع گرین بیان شده اند،در این پایان نامه مورد استفاده قرار می گیرند.

قضیه ۲.۱. برای هر $x, y \in V$ داریم:

$$r_{\lambda,\omega}(x) = \frac{G_q(x,x)}{\omega^2(x)} - \Lambda(\lambda)$$

و

$$R_{\lambda,\omega}(x,y) = \frac{G_q(x,x)}{\omega^2(x)} + \frac{G_q(y,y)}{\omega^2(y)} - \frac{2G_q(x,y)}{\omega(x)\omega(y)}$$

بنابراین

$$k(\lambda,\omega) = \sum_{x\in V} r_{\lambda,\omega}(x)\omega^2(x) = \sum_{x\in V} G_q(x,x) - \Lambda(\lambda)$$

وبه ویژه

$$\sum_{y\in V} [R_{\lambda,\omega}(x,y) - K(\lambda,\omega)]\omega^2(y) = r_{\lambda,\omega}(x).$$

به راحتی می توان نتیجه گرفت که وقتی V یک مجموعه تک عضوی باشدآن گاه به ازای هر $u \in \mathcal{C}(V)$ ، $g_q(u) = \Lambda(\lambda)u$ وبعلاوه $R_{\lambda,\omega}$ و $r_{\lambda,\omega}$ و $K_{\lambda,\omega}$ تهی هستند.

ازسوی دیگر،پارامترهای بالا هم چنین می توانند برحسب مقادیر ویژه $\mathcal{L}_q$ وتابع مشخصه نظیرشان بیان شوند.به ویژه اگر $\lambda = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_{n-1}$ ،مقادیر ویژه $\mathcal{L}_q$ باشندو $\{u_j\}_{j=0}^{n-1}$ که $u_0 = \omega$ پایه های متعامد یکه متناظر باتابع مشخصه شان باشند،آن گاه نتیجه زیر برقرار است.

قضیه ۳.۱. به ازای هر $x, y \in V$ ،داریم:

$$r_{\lambda,\omega} = \frac{1}{\omega^2(x)} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{u_j^2(x)}{\lambda_j}$$

$$R_{\lambda,\omega}(x,y) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_j} \Big(\frac{u_j(x)}{\omega(x)} - \frac{u_j(y)}{\omega(y)} \Big)^2$$

بنابراین

$$K(\lambda,\omega) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_j}$$

ملاحظه می کنید که اگر $xQ_{q\omega}(x)$ چندجمله ای مشخصه $\mathcal{L}_{q\omega}$ باشد،آن گاه $(x-\lambda)Q_{q\omega}(x-\lambda)$ چندجمله ای مشخصه $\mathcal{L}_q$ است وبنابراین

$$K(\lambda,\omega) = -\frac{Q'_{q\omega}(-\lambda)}{Q_{q\omega}(-\lambda)}$$

پس اگر $Q_{q\omega}(x) = a_n x^{n-1} + \ldots + a_2 x + a_1$ آن گاه $K(\omega) = -\frac{a_2}{a_1}$

اثبات. باتوجه به مرجع ٦ و قضیه ٣.٤وتوضیحات ماقبل $P_\omega(u)$ یک ایندومرفیسم از $\mathcal{C}(V)$ است که به هر $u \in \mathcal{C}(V)$ تابع

$$P_\omega(u) = \langle \omega, u \rangle \omega$$

رانسبت می دهد،پس

$$P_{u_j}(f_{xy}) = \langle u_j, f_{xy} \rangle u_j$$

که

$$f_{xy} = \frac{1}{\omega}(\varepsilon_x - \varepsilon_y)$$

هم چنین مطابق توضیحات در مرجع ٦، اگر قرار دهیم:

$$V = \zeta_{\lambda,\omega}(f_{x.y})$$

که $\zeta_{\lambda,\omega}$ همان عملگر گرین است،آن گاه این معادله پوآسون زمانی جواب دارد که:

$$\mathcal{L}_q(u) = f_{xy}$$

هم چنین طبق تعریف عملگر گرین در مرجع ٦داریم:

$$V = \zeta_{\lambda,\omega}(f_{x.y}) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_j} P_{u_j}(f_{xy}) \qquad (1.1)$$

حال طبق توضیحات بالا داریم:

$$V = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_j} \langle u_j, \frac{1}{\omega}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \rangle u_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{u_j}{\lambda_j} (\frac{u_j(x)}{\omega(x)} - \frac{u_j(y)}{\omega(y)})$$

هم چنین طبق توضیحات مرجع ٦وقضیه۳.٤ داریم:

$$R_{\lambda,\omega} = \langle \mathcal{L}_q(V), V \rangle$$

که

$$\mathcal{L}_q(V) = f_{xy}$$

درنتیجه

$$R_{\lambda,\omega} = \langle \mathcal{L}_q(V), V \rangle$$

$$= \langle \frac{1}{\omega}(\varepsilon_x - \varepsilon_y), V \rangle$$

که طبق رابطه(۱/۱)، V ،همان عملگر گرین است درنتیجه

$$R_{\lambda,\omega} = \langle \frac{1}{\omega}(\varepsilon_x - \varepsilon_y), \sum_{j=1}^{n-1} \frac{u_j}{\lambda_j} (\frac{u_j(x)}{\omega(x)} - \frac{u_j(y)}{\omega(y)}) \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\omega}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \frac{u_j(x)}{\lambda_j} \Big(\frac{u_j}{\omega(x)}\Big) - \frac{1}{\omega}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \frac{u_j(y)}{\lambda_j} \Big(\frac{u_j}{\omega(y)}\Big)$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \Big(\frac{u_j(x)}{\lambda_j \omega(x)} \Big(\frac{u_j(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}{\omega}) - \frac{u_j(y)}{\lambda_j \omega(y)} (\frac{u_j(\varepsilon_x - \varepsilon_y)}{\omega}) \Big)$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_j} \Big(\frac{u_j^2(x)}{\omega^2(x)} - \frac{u_j(y)u_j(x)}{\omega(x)\omega(y)} \Big) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_j} \Big(\frac{u_j(x)u_j(y)}{\omega(x)\omega(y)} - \frac{u_j(y)^2}{\omega^2(y)} \Big)$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_j} \Big(\frac{u_j^2(x)}{\omega^2(x)} + \frac{u_j^2(y)}{\omega^2(y)} - 2\frac{u_j(x)u_j(y)}{\omega(x)\omega(y)} \Big)$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_j} \Big(\frac{u_j(x)}{\omega(x)} - \frac{u_j(y)}{\omega(y)} \Big)^2$$

$$R_{\lambda,\omega} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_j} \Big(\frac{u_j(x)}{\omega(x)} - \frac{u_j(y)}{\omega(y)} \Big)^2$$

حال ثابت می کنیم که

$$K(\lambda,\omega) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_j}$$

طبق تعریف ۳.۱داریم:

$$K(\lambda,\omega) = \frac{1}{2} \sum_{x,y\in V} R_{\lambda,\omega}\omega^2(x)\omega^2(y)$$

هم چنین طبق برهان قضیه ۳.٤ درمرجع٦ داریم:

$$\sum_{x,y\in V} R_{\lambda,\omega}(x,y)\omega^2(x)\omega^2(y) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_j} (2\langle u_j, u_j\rangle - 2\langle u_j, \omega\rangle)$$

پس داریم:

$$K(\lambda,\omega) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_j} (2\langle u_j, u_j\rangle - 2\langle u_j, \omega\rangle)$$

از طرفی طبق قضیه ۲.۱ داریم: $u_0 = \omega$ و $\{u_j\}_{j=1}^{n-1}$ پایه های متعامد یکه هستند،پس

$$\langle u_j, u_j\rangle = 1$$

و

$$\langle u_j, \omega\rangle = \langle u_j, u_0\rangle = 0 \qquad j \neq 0$$

درنتیجه

$$K(\lambda,\omega) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_j}$$

اکنون نشان می دهیم که

$$r_{\lambda,\omega}(x)=\frac{1}{\omega^2(x)}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{u_j^2(x)}{\lambda_j}$$

طبق قضیه ۲.۱ داریم:

$$R_{\lambda,\omega}(x,y)=\frac{G_q(x,x)}{\omega^2(x)}+\frac{G_q(y,y)}{\omega^2(y)}-\frac{2G_q(x,y)}{\omega(x)\omega(y)}$$

وطبق قضیه۳.۱ داریم:

$$R_{\lambda,\omega}(x,y)=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\lambda_j}\left(\frac{u_j(x)}{\omega(x)}-\frac{u_j(y)}{\omega(y)}\right)^2$$

درنتیجه

$$R_{\lambda,\omega}(x,y)=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\lambda_j}\left(\frac{u_j^2(x)}{\omega^2(x)}+\frac{u_j^2(y)}{\omega^2(y)}-2\frac{u_j(x)u_j(y)}{\omega(x)\omega(y)}\right)$$

بنابراین طبق توضیحات بالا ،نتیجه می گیریم که:

$$G_q(x,x)=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{\lambda_j}u_j^2(x)$$

هم چنین طبق قضیه ۲.۱ داریم:

$$r_{\lambda,\omega}(x)=\frac{G_q(x,x)}{\omega^2(x)}-\Lambda(\lambda)$$

درنتیجه :

$$r_{\lambda,\omega}(x)=\frac{1}{\omega^2(x)}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{u_j^2(x)}{\lambda_j}-\Lambda(\lambda)$$

وطبق توضیحات مرجع ٦ داریم :

اگر $\lambda=0$ معادله پوآسون دارای جواب است اگروفقط اگر $P_\omega(f)=0$ واین یعنی $\mathcal{L}_q(u)=f$

وچون طبق مفروضات ابتدای اثبات ، $\mathcal{L}_q(u)=f$ پس معادله پوآسون دارای جواب است ودر نتیجه

$\lambda=0$ وبنابراین طبق توضیحات قضیه ۲.۱ ، $\Lambda(0)=0$،پس

$$r_{\lambda,\omega}=\frac{1}{\omega^2(x)}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{u_j^2(x)}{\lambda_j}$$

هم چنین برای توضیحات پایانی قضیه داریم:

$$Q_{q\omega}(x)=a_nx^{n-1}+\ldots+a_2x+a_1$$

و

$$Q_{q\omega}(-\lambda)=a_n(-\lambda)^{n-1}+\ldots+a_2(-\lambda)+a_1$$

درنتیجه:

$$Q'_{q\omega}(-\lambda) = (n-1)a_n(-\lambda)^{n-2} + \ldots + a_2$$

پس

$$-\frac{Q'_{q\omega}(-\lambda)}{Q_{q\omega}(-\lambda)} = -\frac{(n-1)a_n(-\lambda)^{n-2} + \ldots - a_2}{a_n(-\lambda)^{n-1} + \ldots + a_2(-\lambda) + a_1}$$

درنتیجه به دست می آوریم که:

$$-\frac{Q'_{q\omega}(-\lambda)}{Q_{q\omega}(-\lambda)} = K(\lambda, \omega)$$

بعد از حذف عامل λ به این نتیجه می رسیم که:

$$K(\omega) = -\frac{a_2}{a_1}$$

□

ما درفصل های بعدی به معرفی برخی از شبکه ها ی الحاقی و محاسبه اندیس کیرشهف و سایر عوامل مربوط به آنها می پردازیم.

فصل ۲

شبکه های الحاقی