بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم پایه

مرکز شیراز

پایان نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض گرایش جبر

گروه علمی ریاضی

عنوان پایان نامه : حلقه های JCP – انژکتیو

محمد رضا حسن لی

استاد راهنما : دکتر احمد خاکساری

استاد مشاور : دکتر حسین یزدی

دی ماه ۱۳۹۰

تاریخ : ....
شماره : ....
پیوست : ....

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام نور استان فارس

باسمه تعالی

صورتجلسه دفاع از پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

جلسه دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد **آقای محمدرضا حسن‌لی** دانشجوی رشته **ریاضی محض** گرایش **جبر** به شماره دانشجویی **۸۸۰۲۷۴۴۱۶** با عنوان:

" حلقه‌های JCP - انژکتیو"

با حضور هیات داوران در روز **دوشنبه** مورخ **۱۳۹۰/۱۰/۱۲** ساعت **۱۱ صبح** در محل ساختمان **غدیر دانشگاه پیام نور شیراز** برگزار شد و هیأت داوران پس از بررسی، پایان‌نامه مذکور را شایسته نمره به عدد ......۱۹/۵......به حروف......نوزده و نیم........ با درجه.......عالی.......تشخیص داد.

ردیف	نام و نام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه	امضاء
۱	دکتر احمد خاکساری	راهنما	دانشیار	پیام نور شیراز	
۲	دکتر محبوبه حسین‌یزدی	مشاور	استادیار	پیام نور شیراز	
۳	دکتر شمس‌الملوک خوشدل	داور	استادیار	پیام نور شیراز	
۴	دکتر الهام اسراری	نماینده تحصیلات تکمیلی	استادیار	پیام نور شیراز	

رئیس اداره تحصیلات تکمیلی

شیراز- شهرک گلستان، بلوار دهخدا
قبل از نمایشگاه بین المللی
تلفن : ۳-۰۷۱۱-۶۲۲۲۲۴۰
دورنگار : ۰۷۱۱-۶۲۲۲۲۴۹
صندوق پستی : ۱۳۶۸ - ۷۱۹۵۵

گواهی اصالت نشر و حقوق مادی ومعنوی اثر

اینجانب محمد رضا حسن لی دانشجوی ورودی سال ۸۸ مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گواهی می نمایم چنانچه در پایان نامه خود از فکر ، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته ام با نقل قول مستقیم یا غیر مستقیم منبع و ماخذ آن را نیز در جای مناسب ذکر کرده ام . بدیهی است مسئولیت تمامی مطالبی که نقل قول دیگران نباشد بر عهده خویش می دانم و جوابگوی آن خواهم بود .

دانشجو تائید می نماید که مطالب مندرج در این پایان نامه نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است .

نام و نام خانوادگی : محمد رضا حسن لی

تاریخ و امضاء ۱۲ / ۱۰ / ۹۰

اینجانب محمد رضا حسن لی دانشجوی ورودی سال۸۸ مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گواهی می نمایم چنانچه بر اساس مطالب پایان نامه خود اقدام به انتشار مقاله ، کتاب ، و ... نمایم ضمن مطلع نمودن استاد راهنما ، با نظر ایشان نسبت به نشر مقاله ، کتاب ، و ... و به صورت مشترک و با ذکر نام استاد راهنما مبادرت نمایم .

نام و نام خانوادگی : محمد رضا حسن لی

تاریخ و امضاء ۱۲ / ۱۰ / ۹۰

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات ، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه مطعلق به دانشگاه پیام نور می باشد .

دی ماه ۱۳۹۰

تقدیم به :

پدر و مادر مهربان و همسر و فرزند عزیزم

هدیه من به شماست .

همواره می کوشم تا باعث آسودگی خاطر نازنینتان باشم .

تقدیر و تشکر :

حمد و سپاس پروردگار مهربان را که به من قدرت خواندن و نوشتن و قرار گرفتن در این مسیر را عطا فرمود.

اینجانب اتمام این پایان نامه را مدیون راهنمایی های دلسوزانه و راهگشای استاد بزرگوارم ، جناب آقای دکتر احمد خاکساری هستم.

مراتب تقدیر و تشکر فراوان خود را از ایشان که در نگارش این پایان نامه زحمات فراوانی متحمل شدند و در تمام مراحل، مشاوری دلسوز ونماد صفات والای انسانی بودند ابراز می نمایم.

همچنین از استاد مشاورم، سرکار خانم دکترحسین یزدی، که مرا در نگارش این پایان نامه یاری رساندند، نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

سپاس قلبی خود را نسبت به زحمات بی دریغ استادان بزرگوارم، جناب آقای دکتر یوسفی و سرکار خانم دکتر ارشاد ابراز می نمایم.

در پایان از زحمات پدر و مادر دلسوزم و همسر مهربانم که با حضوردلگرم کننده اش مرا یاری نمود تشکر می نمایم.

چکیده :

محور اصلی این پایان نامه، حلقه های JCP- انژکتیو می باشد که آنها را به عنوان یک تعمیم از حلقه های P – انژکتیو معرفی می کنیم.

در ابتدا حلقه های JCP –انژکتیورا معرفی کرده، سپس برخی نتایج مهم و شناخته شده حلقه های P – انژکتیو را به حلقه های JCP – انژکتیو تعمیم می دهیم .

در ادامه حلقه های به طور ضعیف انژکتیو را بررسی می کنیم و رابطه آنها را با حلقه های P– انژکتیو و JCP – انژکتیو بیان کرده ، به علاوه نشان می دهیم که در چه شرایطی یک حلقه p– انژکتیو می تواند حلقه JCP– انژکتیو باشد و برعکس .

کلمات کلیدی :

حلقه JCP – انژکتیو راست ، پوچ ساز ، حلقه GC2 ، حلقه به طور ضعیف انژکتیو ، حلقه وان نیومن منظم .

فهرست مطالب :

فهرست علائم :

$\in$	متعلق است به
$\notin$	متعلق نیست به
$\subseteq$	زیر مجموعه
$\nsubseteq$	زیر مجموعه نیست
$\sum$	مجموع
$\mathbb{R}$	مجموعه اعداد حقیقی
$\mathbb{Z}$	مجموعه اعداد صحیح
$\mathbb{N}$	مجموعه اعداد طبیعی
M/N	مدول خارج قسمت
$A \cong B$	A با B یکریخت است
$\oplus$	جمع مستقیم
R[X]	حلقه چند جمله ای ها با ضرائب در R

مقدمه

در سرتاسر این پایان نامه، R حلقه ای شرکت پذیر با عضو همانی فرض شده است. همه مدول‌ها یکانی هستند. برای هر زیرمجموعه غیرتهی X از حلقه R ، پوچ‌ساز راست از X را با r(X) و پوچ‌ساز چپ از X را با l(X) نمایش می‌دهیم. اگر X={a} باشد آنگاه به اختصار پوچ‌ساز راست را با r(a) و پوچ‌ساز چپ را l(a) نمایش می‌دهیم .

به طور متداول J(R) جیکوبسون رادیکال R را با J نمایش می‌دهیم .

N | M به این معنی است که زیر مدول N یک جمعوند مستقیم از M می باشد .

در فصل اول مروری بر مفاهیم مربوط به جبر پیشرفته را خواهیم داشت که منظورمان از بیان این نکات یادآوری مفاهیم می باشد. به همین دلیل از اثبات برخی قضایا خودداری نموده ایم .

در فصل دوم یک سری از ویژگی‌های حلقه‌های JCP- انژکتیو راست را معرفی می‌کنیم و با یک مثال نشان می‌دهیم که حلقه JCP- انژکتیو راستی وجود دارد که P- انژکتیو راست نیست. در این بخش همچنین بررسی خواهیم کرد که در چه شرایطی یک حلقه JCP- انژکتیو راست می تواند یک P- انژکتیو راست شود .

در فصل سوم نشان می‌دهیم که اگر R یک حلقه JCP- انژکتیو راست باشد، به طوری که هر R- مدول منفرد ساده راست آن پوچ – انژکتیو باشد ، آنگاه R ، P- انژکتیو راست است .

در فصل چهارم حلقه‌های انژکتیو ضعیف راست را مورد بررسی قرار می دهیم و شرایطی را که برای هر حلقه انژکتیو ضعیف برقرار است ، اثبات می کنیم .

در فصل پنجم حلقه های P – انژکتیو را تعمیم داده و شرایط کلی تری برای حلقه های JCP – انژکتیو معرفی می کنیم .

فصل اول :

مقدمات و مفاهیم اولیه

از آنجا که مبنای هر مبحث جبر، تعاریف و قضایایی هستند که به آنها استناد شده یا از آنها استفاده شده است، پیش از شروع بحث لازم است برخی تعاریف و قضایایی که مورد احتیاج هستند را برای یادآوری ذکر نماییم .

۱-۱تعریف:

فرض کنید R یک مجموعه غیرتهی و(+,0) اعمال دوتایی روی R باشند که ما آن ها را به ترتیب "جمع" و "ضرب" می خوانیم . (R , + , 0) را یک حلقه می نامیم ، اگر شرایط زیر برقرار باشند :

۱. (R , +) یک گروه آبلی باشد .

۲. عمل ضرب دارای خاصیت شرکت پذیری باشد . یعنی :

$$\forall a, b, c \in R , (a . b) . c = a . (b. c)$$

۳. عمل ضرب روی جمع توزیع پذیرباشد . یعنی به ازای هر $a , b , c \in R$

$a. (b+c) = a. b + a . c$ (قانون توزیع پذیری چپ)

$(b+c) . a = b . a + c . a$ (قانون توزیع پذیری راست)

۱-۲تعریف:

فرض کنید (R , + , 0) یک حلقه باشد . R را حلقه جابجایی گویند، هر گاه :

$$\forall a , b \in R , a . b = b . a$$

۱-۳تعریف:

فرض کنید (R , + , 0) یک حلقه باشد . R را حلقه یکدار گوییم، هر گاه عنصری مانند $e \in R$ وجود داشته باشد، به طوری که به ازای هر $a \in R$ داشته باشیم :

$$ae=ea =a$$

۱-۴تعریف:

فرض کنید R یک حلقه با عنصر همانی ۱ باشد . عنصر $u\in R$ معکوس پذیر است، هر گاه $v\in R$ موجود باشد، به طوری که $vu=uv=1$.

چنین v ای یکتاست و به آن معکوس ضربی u گوییم .

۱-۵تعریف:

فرض کنیدR یک حلقه باشد. عنصر $a\neq0$ درR را مقسوم علیه صفر چپ (راست) گویند، اگر یک عنصر $b\neq0$ درR وجود داشته باشد به طوری که $ab=0$ $(ba=0)$.

۱-۶تعریف:

فرض کنید R یک حلقه باشد. عضو x از حلقه R پوچ توان نامیده می شود هرگاه عدد طبیعی مانند n وجود داشته باشد به طوری که $x^n=0$.

۱-۷تعریف:

فرض کنیم R یک حلقه باشد . عنصر $a\in R$ خود توان نامیده می شود هر گاه $a^2=a$.

۱-۸تعریف:

زیرمجموعه غیرتهی S از حلقه R را زیرحلقه R نامند، هر گاه S همراه با اعمال دوتاییR خود یک حلقه باشد .

۱-۹تعریف:

حلقه غیرصفرR ، یک قلمرو صحیح نامیده می شود ، هرگاه فاقد مقسوم علیه صفر غیربدیهی باشد .
حلقه اعداد حقیقی ، اعداد صحیح واعداد گویا ، مثال هایی ازیک قلمروصحیح می باشند .

۱-۱۰تعریف:

حلقه یکدار R با خاصیت $1_R\neq0$ که در آن هر عنصر ناصفری یکه باشد یک حلقه بخشی نامیده می شود .

۱-۱۱تعریف:

فرض کنید R یک حلقه دلخواه و X یک مجهول یا یک متغیر روی R باشد . در این صورت مجموعه :

$$R[X]=\{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n \mid a_i\in R\ ,\ i\in \mathbb{N}\cap\{0\}\}$$

که متشکل از همه چندجمله ای های با ضرایب در R است همراه با جمع و ضرب تعریف شده به صورت :

$$\{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n)+(b_0+b_1x+\ldots+b_nx^m)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\ldots+(a_n+b_n)x^n+\ldots+b_mx^m$$

که $n\leq m$ و

$$(a_0+a_1X+\ldots+a_nx^n).(b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m)=\Sigma C_{ij}x^{i+j}$$

که در آن $C_{ij}=a_0b_j+a_1b_{j-1}+\dots+a_ib_0$ یک حلقه می باشد . این حلقه را حلقه چندجمله ای ها روی R می نامند .

۱-۱۲تعریف:

فرض کنید R یک حلقه و I یک زیرمجموعه غیرتهی از R باشد. دراین صورت I یک ایده آل چپ (راست) حلقه R است هر گاه :

الف) I زیرگروهی از $(R , +)$ باشد. به عبارت دیگر برای هر $a , b\in I$ داشته باشیم $a-b\in I$

ب) I نسبت به ضرب هر عضو دلخواه از حلقه R از چپ (راست) در عناصر I بسته باشد. به عبارت دیگر برای هر $a \in I , x \in R$ ، $xa \in I$ $(ax \in I)$ باشد .

۱-۱۳تعریف:

ایده آل I از حلقه R یک ایده آل دوطرفه حلقه R است . هر گاه هم یک ایده آل راست و هم یک ایده آل چپ R باشد. وقتی I ایده آل حلقه R باشد می نویسیم $I \lhd R$.

۱-۱۴تعریف:

فرض کنید R یک حلقه باشد. ایده آل I از R پوچ است اگر هر عنصر I پوچ توان باشد .

۱-۱۵تعریف:

ایده آل P از حلقه R (حلقه جابجایی و یکدار باشد) را اول می نامند در صورتی که :

۱) $P\neq R$.

۲) برای هر x , y از R اگر $x y \in P$ آنگاه $x \in P$ یا $y \in P$.

۱-۱۶قضیه:

فرض کنید R یک حلقه باشد. ایده آل P از حلقه R اول است اگر و تنها اگر R/P یک حوزه صحیح باشد.

۱-۱۷تعریف:

ایده آل m از حلقه R ماکسیمال است در صورتی که $m \neq R$ و به ازای هر ایده آل I از R ، اگر $m \subseteq I$ آنگاه $I = R$ یا $m = I$.

۱-۱۸گزاره:

فرض کنید R یک حلقه باشد. $x \in R$ یکه است اگر و تنها اگر x به هیچ یک از ایده آل های ماکسیمال حلقه R تعلق نداشته باشد .

۱-۱۹تعریف:

فرض کنید I , J دو ایده آل حلقه R و $J \subseteq I$ باشد . I ایده آل مینیمال روی J است هر گاه بین I , J ایده آل دیگری قرار نگیرد . اگر $J = \{0\}$ و بین I , J ایده آل دیگری قرار نگیرد ، I را ایده آل مینیمال حلقه گوییم .

۱-۲۰قضیه:

فرض کنید N مجموعه عناصر پوچ توان حلقه جابجایی R باشد. یعنی $N = \{x \in R : x^n = 0 , n \in \mathbb{N}\}$ در این صورت :

۱) N یک ایده آل R است .

۲) $\frac{R}{N}$ هیچ عنصر پوچ توان غیرصفر ندارد .

مجموعه تمام عناصر پوچ توان حلقه R را با $N(R)$ نمایش می دهند .

۱-۲۱تعریف:

حلقه ای که تنها پوچ توان آن صفر باشد $(N(R)=0)$ حلقه کاهش یافته نامیده می شود .

۱-۲۲مثال:

حلقه خارج قسمتی $\frac{R}{N}$ یک حلقه کاهش یافته است .

۱-۲۳قضیه:

فرض کنید R یک حلقه باشد . در این صورت R کاهش یافته است اگر و تنها اگر برای هر $r \in R$ تساوی $r^2 = 0$ ایجاب کند که $r = 0$.

اثبات:

فرض کنید R کاهش یافته باشد . بنابراین صفر تنها عنصر پوچ توان R است . لذا از $r^2=0$ برای هر $r\in R$ ، صفر بودن r نتیجه می شود .

بر عکس:

فرض کنید $a\in R$ عضو پوچ توان ناصفر و n کوچک ترین عدد صحیحی باشد که $a^n=0$. بنابراین $a^{n-1}\neq 0$ چون $a^{n-1}.\, a^{n-1}= a^n\, a^{n-2}=0$ ، پس $(a^{n-1})^2=0$ و بنا به فرض $a^{n-1} = 0$ خواهد بود ، که این تناقض است .■

۱-۲۴مثال:

۱. زیرحلقه یک حلقه کاهش یافته و حاصلضرب حلقه های کاهش یافته ، خود یک حلقه کاهش یافته است .

۲. حلقه Z ، هر میدان و هر حلقه چندجمله ای روی میدان، مثال هایی از حلقه های کاهش یافته هستند .

۳. $\frac{Z}{6Z}$ کاهش یافته است ، چون 6Z تنها عنصر پوچ توان آن است .

۴. $\frac{Z}{4Z}$ کاهش یافته نیست ، چون 2+4Z عنصر پوچ توان $\frac{Z}{4Z}$ است .

۱-۲۵قضیه:

فرض کنید N عنصر پوچ توان حلقه جابجایی R باشد ، در این صورت $N= \bigcap_{p\lhd_p R} P$.

۱-۲۶تعریف:

اشتراک تمام ایده آل های ماکسیمال حلقه R را با J (R) نمایش می دهیم و آن را رادیکال جیکوبسون R می نامیم.

۱-۲۷تعریف:

اگر J , I دو ایده آل حلقه R باشند. آن گاه ایده آل حاصل تقسیم I بر J را با نماد (I:J) نشان داده و داریم : $(I : J) = \{x \in R \mid x J \subseteq I \}$

اگر I ایده آل صفر باشد . در این صورت ، (0: J) را پوچ ساز ایده آل J گوییم و با $Ann_R(J)$ نمایش می دهیم وداریم:

$$(0:J)=\{x\in R \mid x J = 0 \} = Ann_R(J)$$

۱-۲۸تعریف:

فرض کنید R و R' دو حلقه باشند . تابع $f: R\to R'$ را همریختی حلقه ای می نامیم ، در صورتی که به ازای هر $x,y \in R$ داشته باشیم :

i. $f(x+y)=f(x)+f(y)$

ii. $f(x.y)=f(x).f(y)$

۱-۲۹تعریف:

- همریختی f یک یکریختی است هر گاه f یک به یک و پوشا باشد .
- در صورتی که همریختی f فقط پوشا باشد آن را بروریختی و اگر همریختی f فقط یک به یک باشد آن را تکریختی گوییم .

۱-۳۰تعریف:

فرض کنید R یک حلقه و مجموعه غیرتهی M همراه با عمل جمع یک گروه آبلی باشد. M یک R - مدول چپ (راست) است ، هر گاه نگاشت

$R\times M\to M$ ($M\times R\to M$) با ضابطه $(r, x) \to rx$ ($(x , r) \to xr$) موجود باشد به طوری که :

i. به ازای هر دو عضو از M مثل x , y و هر عضو از R مثل r داشته باشیم :

$r (x + y) = rx + ry \quad ((x + y) r = xr + yr)$

ii. به ازای هر عضو از M مثل x و هر دو عضو از R مثل s , r داشته باشیم :

$(r + s) x = r x + s x \quad (x (r + s) = x r + xs)$

iii. به ازای هر عضو از M مثل x و هر دو عضو از R مثل s , r داشته باشیم :

$(r s) x = r (s x) \quad (x (r s) = (x r) s)$

۱-۳۱علامت گذاری:

منظور از ${}_RM$ یعنی M یک R - مدول چپ و منظور از M_R یعنی M یک R - مدول راست و همچنین منظور از ${}_RM_R$ یعنی M هم یک R – مدول چپ و هم یک R – مدول راست است .

۱-۳۲تعریف:

فرض کنید R یک حلقه وM یک R – مدول چپ (راست) و N زیرمجموعه ناتهی از M باشد . N را زیرمدول M گوییم ، اگر با تحدید جمع و ضرب اسکالر در M به N ، N به یک R – مدول چپ (راست) تبدیل شود .

می توان به راحتی ثابت کرد که زیرمجموعه غیرتهی N از M ، زیر مدول M است هر گاه دارای شرایط زیر باشد :

i. اگر $x , y \in N$ آنگاه $x - y \in N$ باشد .

ii. اگر $r \in R , x \in N$ آنگاه $r x \in N$ $(x r \in N)$ باشد .

۱-۳۳مثال:

الف) فرض کنید R یک حلقه وM ، R - مدول چپ (راست) باشد . $\{0\}$ وM دو زیرمدول از Mهستندکه زیرمدول های بدیهی M نامیده می شوند .

ب) اگر حلقه R را به عنوان R - مدول چپ (راست) در نظر بگیریم زیرمدول های R دقیقا همان ایده آل های چپ (راست) R هستند .

۱-۳۴تعریف:

فرض کنید R حلقه و M یک R - مدول باشد . مدول M را ساده گوییم اگر

i. $M\neq\{0\}$ باشد .

ii. تنها زیرمدول های آن، $\{0\}$ و M باشند .

۱-۳۵تعریف:

فرض کنید R یک حلقه باشد . زیرمدول M_1 از R - مدول M را جمعوند مستقیم M گوییم هرگاه زیرمدول دیگری از R - مدول M مانند M_2 موجود باشد به طوری که M جمع مستقیم M_1 , M_2 باشد . یعنی :

$$M= M_1 \oplus M_2$$

که این معادل است با این که $M = M_1 + M_2$ و $M_1 \cap M_2 = \{0\}$.

۱-۳۶قضیه:

فرض کنید R یک حلقه باشد . اگر M یک R - مدول ساده باشد در این صورت ایده آل ماکسیمالی از R مانند I وجود دارد به طوری که $M \cong \frac{R}{I}$.

۱-۳۷قضیه:

فرض کنید R یک حلقه باشد . هر R - مدول متناهی تولید شده غیرصفر ، شامل حداقل یک زیر مدول ماکسیمال است .

۱-۳۸تعریف:

فرض کنید R یک حلقه و A ، B مدول هایی روی حلقه R باشند . تابع $f:A\to B$ یک همریختی R - مدولی است مشروط بر این که به ازای هر $a , c\in A$ و $r\in R$ داشته باشیم :

$$f(a + c) = f(a) + f(c)$$
$$f(r a) = r f(a)$$

۱-۳۹قضیه:

به ازای هر R – مدول مثل M ، دنباله دقیقی مثل $P \to M \to 0$ وجود دارد که در آن P ، R – مدولی پروژکتیو است . اگر M متناهی مولد باشد ، P نیز متناهی مولد است . همچنین اگر M یک R – مدول باشد ، M را باوفا گوییم هرگاه $Ann(M)=0$ باشد .

۱-۴۰تعریف:

فرض کنید N ، R - مدول و M توسیعی از آن باشد ، می گوییم M توسیع اساسی N است اگر به ازای هر زیر مدول غیر صفر K از M داشته باشیم $N \cap K \neq 0$.

۱-۴۱تعریف:

فرض کنید M ، R – مدول باشد . در این صورت M نوتری (آرتینی) است اگر و فقط اگر هر مجموعه ناتهی از زیر مدول های M ، عضو ماکسیمال (مینیمال) داشته باشد .

۱-۴۲تعریف:

فرض کنید R یک حلقه باشد . یک عنصر خودتوان e را نیمه مرکزی چپ (راست) می نامیم . اگر $ae=eae$ $(ea=eae)$ برای تمام $a\in R$.

۱-۴۳تعریف:

فرض کنید R یک حلقه باشد . یک عنصر خودتوان e را مرکزی می نامیم هرگاه ae=ea برای تمام $a\in R$.

۱-۴۴تعریف:

حلقه R را آبلی می نامند هر گاه هر عنصر خودتوان آن مرکزی باشد .

۱-۴۵گزاره:

هر حلقه کاهش یافته ، آبلی است .

اثبات:

اگر $e^2 = e \in R$ و $a \in R$. آن گاه داریم:

$$(ea - eae)^2 = eaea - eaeae - eaeea + eaeeae = 0$$

پس $ea = eae$. به طور مشابه ثابت می شود $ae = eae$. در نتیجه e مرکزی است . ■

۱-۴۶تعریف:

حلقه R نیم ساده است هر گاه $J(R)=0$.

۱-۴۷تعریف:

حلقه R را ساده می نامیم اگر و تنها اگر ایده آل های دوطرفه R ، صفر و خود R باشد .

۱-۴۸مثال:

حلقه های تقسیم و میدان ها ساده هستند .

۱-۴۹قضیه:

فرض کنید R یک حلقه غیرصفر باشد در این صورت :

۱-اگر I ایده آل چپ (راست) سره ای از R باشد ، آن گاه ایده آل چپ ماکسیمالی (راست ماکسیمالی) ازR وجود دارد که شامل I باشد .

۲- R ایده آل چپ ماکسیمال (راست ماکسیمال) دارد .