بسم الله الرّحمن الرّحيم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه شهید مدنی آذربایجان
دانشکده علوم پایه
گروه فیزیک

پایان نامه مقطع کارشناسی ارشد
رشته فیزیک (گرایش نظری)

مطالعه سنجه های درهمتنیدگی کوانتومی شکل یابی و توافق و رابطه آنها با شاهدهای درهمتنیدگی

استاد راهنما:
دکتر یحیی اکبری

استاد مشاور:
دکتر اسفندیار فیضی

پژوهشگر:
مریم عزتی

اسفند ماه / ۱۳۹۰شمسی
تبریز / ایران

تقدیم به:

روح پاک پدرم،

و به مادرم، دریای بی کران فداکاری و عشق که هر چه دارم از اوست،

و برادرم و خواهرانم،که وجودشان شادی بخش و مایه دلگرمی من می باشد،

و همسرم که سایه مهربانیش سایه سار زندگیم می باشد،

و پسرم مَهدی، امید بودنم.

سپاس گزاری :

با تشکر و تقدیر فراوان از زحمات و راهنمایی های استاد راهنمای گرامی و ارجمند جناب آقای دکتر یحیی اکبر و استاد مشاور محترم جناب آقای دکتر اسفندیار فیضی.

فهرست مطالب

چکیده

در همتنیدگی کوانتومی یکی از جالبترین جنبه های غیر کلاسیک مکانیک کوانتومی است و اساس بسیاری از فرایندهای نظریه اطلاعات کوانتومی را تشکیل می دهد. بنا بر این، شناسایی و تعیین میزان در همتنیدگی حالتهای کوانتومی اهمیت بسزایی دارد. تاکنون سنجه های زیادی برای تعیین میزان در همتنیدگی حالتهای کوانتومی معرفی شده است که هیچ یک از آنها به تنهایی قادر به تعیین میزان در همتنیدگی تمام حالتهای کوانتومی نیستند. در این پایان نامه سنجه درهمتنیدگی شکل یابی و سنجه توافق مورد مطالعه قرار گرفته است. برای تشخیص حالتهای کوانتومی درهمتنیده، از معیارهای درهمتنیدگی و شاهد های درهمتنیدگی استفاده می شود. در این پایان نامه به معیارهای پرز و کاهش اشاره شده و چگونگی ساختن شاهدهای درهمتنیدگی از نگاشت های مثبتی که کاملا مثبت نیستند، بررسی شده است. سرانجام، نشان داده شده است که میان شاهدهای درهمتنیدگی و مربع بردار توافق حالت های خالص کاملا درهمتنیده رده های W و GHZ سیستم های بس کیوبیتی رابطه ای وجود دارد.

کلیدواژه ها: درهمتنیدگی کوانتومی- سنجه‌ی درهمتنیدگی- سنجه توافق- درهمتنیدگی شکل یابی- شاهدهای درهمتنیدگی.

مقدمه

مباحث اطلاعات کوانتومی یکی از مباحث مهم مطرح در حال حاضر است و درهمتنیدگی کوانتومی یکی از منابع اصلی در تمام فرایندهای اطلاعات کوانتومی است.به عنوان مثال،حالتهایی که دارای ماکزیمم درهمتنیدگی هستند، حالتهای کلیدی برای ترابرد کوانتومی[1]به شمار می روند، از دیگر کاربردهای درهمتنیدگی در فرایندهای اطلاعات کوانتومی می توان به رمزنگاری کوانتومی[2] ، محاسبات کوانتومی[3] و مخابرات کوانتومی[4] اشاره کرد. به همین دلیل، پی بردن به در همتنیدگی یک حالت کوانتومی و میزان درهمتنیدگی آن جهت استفاده در فرایندهای اطلاعات کوانتومی از اهمیت اساسی برخوردار است. برای تشخیص در همتنیدگی یک حالت کوانتومی، می توان از دو رهیافت استفاده کرد. رهیافت اول، معیارهای درهمتنیدگی و رهیافت دوم، شاهدهای درهمتنیدگی است. برای تعیین میزان درهمتنیدگی، از سنجه های درهمتنیدگی کوانتومی استفاده می شود. تاکنون سنجه های زیادی برای تعیین میزان در همتنیدگی حالتهای کوانتومی معرفی شده است که هیچ یک از آنها به تنهایی قادر به تعیین میزان در همتنیدگی تمام حالتهای کوانتومی نیستند. سنجه های توافق و درهمتنیدگی شکل یابی از مهم ترین آنها است.

یک حالت کوانتومی یک سیستم دو جزئی را یک حالت حاصلضربی می گویند اگر بتوان آنرا به صورت ضرب تانسوری دو حالت هر کدام مربوط به یک جزء نوشت. حالت کوانتومی جداپذیر حالتی است که بتوان آن را به صورت ترکیب محدبی از حالت های حاصلضربی نوشت. در غیر این صورت، حالت کوانتومی را درهمتنیده می گویند.

---

۱ Quantum Teleportation
۲ Quantum Cryptography
۳ Quantum Computation
۴ Quantum Communication

یک سنجه درهمتنیدگی، یک نگاشت از ماتریس های چگالی به اعداد حقیقی مثبت است که خواص اساسی در همتنیدگی را ارضا می کند و برای تعیین میزان درهمتنیدگی یک حالت کوانتومی به کار می رود. شاهد درهمتنیدگی یک عملگر هرمیتی نا مثبت است که مقدار چشمداشتی آن با تمام حالت های جداپذیر، نامنفی و حداقل با یک حالت در همتنیده، منفی است. به عبارت دیگر، می تواند حد اقل یک حالت در همتنیده را تشخیص دهد.

در فصل اول تعاریف و مفاهیم مورد نیاز در طول پایاننامه را آورده ایم. در فصل دوم ابتدا تعریف سنجه را ارائه کرده و سپس به بررسی دو سنجه توافق و درهمتنیدگی شکل یابی پرداخته ایم. ووترز در سال ۱۹۹۷ در مقا له ای سنجه ی درهمتنیدگی شکل یابی را برای یک جفت از سیستم های کوانتومی، به صورت آنتروپی اعضاء آن جفت تعریف کرد.تعریف توافق برای اولین بار توسط ووترز و هیل در سال ۱۹۹۸ ارائه شد. ووترز و هیل نشان دادند که درهمتنیدگی شکل یابی ، یک تابع افزایشی یکنواخت محدب از توافق است. برای تعمیم توافق به ابعاد بالاتر، تلاش های فراوانی شده است از جمله تلاش رونگتا و همکارانش، کهI–توافق را برحسب یک وارونگر کلی ،که تعمیم عمل وارونی اسپین دو کیوبیتی به ابعاد بالاتر است، تعریف کردهاندو همچنین بردار توافق که توسط دکتر اخترشناس معرفی شده است.

یک حالت سه کیوبیتی به دو روش ناهمسان درهمتنیده می شود و با استفاده از ارتباطات کلاسیکی و عملگرهای موضعی(LOCC)، نمی توان یک رده حالت را از رده حالت دیگر به دست آورد. بنابراین سنجه درهمتنیدگی برای این دو ردهبه صورت های متفاوت تعریف می شود که آنها رارده– GHZ و رده–W می نامند. با بررسی سنجه های توافق حالت های خالص و آمیخته رده–GHZ و رده–W فصل دوم را به پایان رسانده ایم.

در فصل سوم، ابتدا تعریف شاهدهای درهمتنیدگی را بیان کردهایم. اساس شاهدهای درهمتنیدگی قضیه هان– باناخ است و بر طبق این قضیه، اگر مقدار چشمداشتی شاهدی با ماتریس چگالی مورد نظر منفی باشد، آن ماتریس چگالی حتما درهمتنیده است. آنچه برای ما اهمیت دارد، ساختن شاهدی است که چنین خصوصیتی داشته باشد. یکی از روش های ساخت شاهدهای درهمتنیدگی، استفاده از نگاشت های مثبتی است که کاملا مثبت نیستند. در اینجا، ساخت شاهد با استفاده از نگاشت ترانهاد، نگاشت کاهش و نگاشت چویی را مورد مطالعه قرار داده ایم. نگاشتی که مثبت باشد اما کاملا مثبت نباشد، می تواند یک معیار

جداپذیری به دست دهد. معیارها به صورت کیفی و گاهی به صورت کمی، درهمتنیدگی یک حالت کوانتومی را مشخص می کنند. معیار درهمتنیدگی پرز از نگاشت ترانهاد و معیار درهمتنیدگی کاهش از نگاشت کاهش به دست می آید. همچنین، برای حالت های خالص سه کیوبیتی رده- GHZ و رده- W ، شاهدهای درهمتنیدگی را بررسی کرده‌ایم.

در فصل چهارم نشان داده ایم که شاهد درهمتنیدگی با مجذور سنجه توافق مرتبط است.

فصل اول

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل تعریف ها و مفاهیم مقدماتی مورد نیاز در فصل های بعدی پایان نامه را ارائه می دهیم .

۱-۱ فضای هیلبرت[۱]

حالت های ممکن هر سیستم کوانتومی را با اعضای یک فضای برداری مختلط به نام فضای هیلبرت نشان می دهند. فضای هیلبرت فضای برداری کاملی است که در آن یک ضرب داخلی تعریف می شود. اعضای فضای هیلبرت را بردار می نامند.

در یک فضای هیلبرت H، حداکثر تعداد بردارهای مستقل خطی را بعد آن می نامند و با $dimH$ نشان می دهند. هر مجموعه از بردارهای مستقل خطی را که تعداد آنها برابر با بعد یک فضای هیلبرت باشد و بتواند آن را پدید آورد، یک پایه برای فضای هیلبرت می نامند. هر بردار دلخواه فضای هیلبرت برحسب بردارهای پایه به طور کامل تعیین می شود. مثلا با دو حالت $|۰\rangle$ و $|۱\rangle$ به عنوان بردارهای پایه ، هر حالت در فضای هیلبرت دو بعدی را می توان به صورت زیر نوشت :

$$|\psi\rangle = \alpha|۰\rangle + \beta|۱\rangle \tag{۱-۱}$$

که در آن α و β دو عدد مختلط دلخواه هستند .

۲-۱ فضای هیلبرت یک سیستم مرکب از دو زیرسیستم کوانتومی

دو سیستم کوانتومی A, B را در نظر بگیرید. چنانچه فضای هیلبرت آنها را به ترتیب با H_A, H_B نشان بدهیم، فضای هیلبرت سیستم مرکب به صورت حاصلضرب تانسوری $H = H_A \otimes H_B$ تعریف می شود. اگر:

$$dimH_A = M \quad , \ dimH_B = N \tag{۲-۱}$$

آنگاه داریم:

$$dimH = dimH_A . dimH_B = M . N \tag{۳-۱}$$

---

[۱] Hilbert space

در سراسر این رساله، پایه H_A را به صورت $\{|e_i\rangle\}$ در نظر می گیریم . بنابراین هر حالت فضای H_{A} را می توان به صورت زیر نوشت :

$$|\psi_A\rangle = \sum_{i=۱}^{M} a_i\, |e_i\rangle \qquad (۴-۱)$$

همچنین پایه H_B را به صورت $\{|f_j\rangle\}$ در نظر می گیریم . در نتیجه هر حالت فضای H_B به صورت زیر نوشته می شود :

$$|\psi_B\rangle = \sum_{j=۱}^{N} b_j\, |f_j\rangle \qquad (۵-۱)$$

از این رو، یک پایه فضای مرکب $H = H_A \otimes H_B$ به صورت $\{|e_i\rangle \otimes |f_j\rangle\}$ است و هر حالت فضای مرکب می تواند به صورت زیر نوشته شود :

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |e_i\rangle \otimes |f_j\rangle = \sum_{i,j} c_{ij}\, |e_i, f_j\rangle \qquad (۶-۱)$$

۱-۳ تعریف مفهوم کیوبیت[۱] :

کیوبیت مخفف کلمه کوانتوم بیت است. در اصطلاح نظریه اطلاعات کوانتومی، هر فضای هیلبرت دو بعدی را یک کیوبیت می نامند. در عمل، هر سیستم کوانتومی دو حالته مثل حالت های اسپین یک الکترون، می تواند نمایشی از یک کیوبیت باشد.

معمولا دو بردار پایه متعامد بهنجار یک کیوبیت را با $|۰\rangle$ و $|۱\rangle$ نشان می دهند . بنا بر این، هر حالت تک کیوبیتی را می توان به صورت زیر نوشت :

$$|\psi\rangle = a|۰\rangle + b|۱\rangle \quad ; \quad |a|^۲ + |b|^۲ = ۱ \quad ; \quad a, b \in \mathbb{C} \qquad (۷-۱)$$

a , b ضرایب بسط هستند که به ترتیب دامنه ی احتمال حالت های $|۰\rangle$ و $|۱\rangle$ را نشان می دهند و $\mathbb{C}$ نشانگر میدان اعداد مختلط است. روی میدان اعداد مختلط ، فضای هیلبرت تک کیوبیت ، همان فضای $\mathbb{C}^۲$ است . فضای هیلبرت یک سیستم دو کیوبیتی، عبارت است از :

---

[۱] Qubit

$$H = H_A \otimes H_B = \mathbb{C}^{۲} \otimes \mathbb{C}^{۲} \tag{۸-۱}$$

به طور طبیعی، بردارهای پایه ی این فضای هیلبرت به صورت زیرند :

$$|۰۰\rangle, |۰۱\rangle, |۱۰\rangle, |۱۱\rangle \tag{۹-۱}$$

هر حالت این فضای چهار بعدی را می توان بر حسب این پایه ها نوشت . به عنوان مثال :

$$|\psi^-\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|۰\rangle|۱\rangle - |۱\rangle|۰\rangle) = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|۰۱\rangle - |۱۰\rangle) \tag{۱۰-۱}$$

۱-٤ سیستم N کیوبیتی

حالت یک سیستم کوانتومی N-کیوبیتی می تواند به عنوان یک بردار در یک فضای مختلط ۲^{N} بعدی بیان شود . چنانچه اعضای پایه متعامد بهنجار هر کیوبیت را با $|۰\rangle$ و $|۱\rangle$ نشان دهیم ، اعضای پایه متعامد بهنجار یک سیستم N-کیوبیتی به صورت رشته های دودوییمانند $|۰۱۱۰۰ \ldots ۱۰۱\rangle$ خواهد بود .

۱-۵ حالت خالص[۱]

حالت خالص سیستم کوانتومیH عبارت است از تصویرگر $|\psi\rangle\langle\psi|$ روی بردار بهنجاری مانند $|\psi\rangle \in H$. به عبارت دیگر حالت خالص حالتی است که توان دوم آن همواره با خود آن برابر است :

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \Rightarrow \rho^{۲} = (|\psi\rangle\langle\psi|)(|\psi\rangle\langle\psi|) = |\psi\rangle\langle\psi| = \rho \tag{۱۱-۱}$$

---

۱ Pure State

۱-۶ حالت خالص جداپذیر[1]

در یک سیستم کوانتومی دو قسمتی متشکل از دو زیر سیستم، حالت خالص $|\psi\rangle$ را جداپذیر می گویند اگر بتوانیم آن را به صورت یک بردار حاصل ضرب یعنی به صورت $|\psi\rangle = |e,f\rangle \equiv |e\rangle \otimes |f\rangle$ بنویسم که در آن $|e\rangle$ حالتی از زیر سیستم اول و $|f\rangle$ حالتی از زیر سیستم دوم است .

۱-۷ حالت خالص درهمتنیده[2]

در صورتی که یک حالت خالص جداپذیر نباشد، آن را درهمتنیده می گویند. یعنی، یک حالت خالص درهمتنیده را نمی توان به صورت یک بردار حاصل ضرب $|\psi\rangle = |e,f\rangle$ نوشت.

۱-۸ تجزیه اشمیت[3]

با توجه به اینکه در یک فضای برداری انتخاب پایه منحصر به فرد نیست، بسته به انتخاب پایه، هر حالت خالص $|\psi\rangle \in \mathrm{H_A} \otimes \mathrm{H_B}$ به صورت های گوناگونی بسط داده می شود. اشمیت نشان داده است که می توان پایه ی مناسبی پیدا کرد به طوری که در آنتمام ضرایب بسط حقیقی و مثبت است، یعنی

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{M} a_i \, |e_i, f_i\rangle \qquad (۱-۱۲)$$

که در آن $a_\mathrm{i} \geq 0$ و $\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{M}} a_i^2 = 1$. تعداد a_i های مخالف صفر در تجزیه اشمیت را مرتبه اشمیت می گویند. ثابت می شود که تجزیه اشمیت و در نتیجه مرتبه اشمیت یک حالت خالص، منحصر بفرد است .

توجه کنید که بنا بر تجزیه اشمیت، حالت خالص جداپذیر حالتی است که مرتبه اشمیت آن ۱ باشد. حالت های $|0,0\rangle$ و $|1,0\rangle$ نمونه هایی از حالت های خالص جداپذیرند. به عنوان مثال، در یک سیستم دو کیوبیتی،تجزیه اشمیت حالت خالص دلخواه $|\psi\rangle$ می تواند به صورت کلی $|\psi\rangle = a_1|01\rangle + a_2|10\rangle$ و یا $|\psi\rangle = a_1|00\rangle + a_2|11\rangle$ باشد. اگر a_1 و یا a_2 صفر شود، حالت مورد نظر جداپذیر است.

---

[1] Separable Pure State

[2] Entangled Pure State

[3] SchmidtDecomposition

در صورتی که $a_۱ = a_۲ = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$ باشد، حالت مورد نظر یک حالت کاملا درهمتنیده است که حالت بل نامیده می شود.در یک سیستم دو کیوبیتی، چهار حالت بل وجود دارد که عبارتند از:

$$|\psi^{\pm}\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|۰۱\rangle \pm |۱۰\rangle) \quad (۱۳\text{-}۱)$$

$$|\varphi^{\pm}\rangle = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(|۰۰\rangle \pm |۱۱\rangle) \quad (۱٤\text{-}۱)$$

۱-۹ حالت آمیخته[۱] و ماتریس چگالی[۲]

حالت آمیخته حالتی است که نمی توان آن را با یک بردار حالت نشان داد. برای توصیف حالت های آمیخته از مفهوم ماتریس چگالی استفاده می کنند .ماتریس چگالی که معمولا با ρ نشان داده می شود، یک عملگر هرمیتی مثبت روی فضای $H = H_A \otimes H_B$ است که هربردار حالت را به بردار حالت دیگر تبدیل می کند. رد ρ مساوی ۱ انتخاب می شود تا شرط واحد بودن احتمال کل برقرار شود. برای ρ مجموعه های کرنل و برد به صورت زیر تعریف می شوند :

$$K\{\rho\} = \{|\psi\rangle \in H : \rho|\psi\rangle = ۰\} \;;\; R\{\rho\} = \{|\psi\rangle \in H : \exists|\varphi\rangle : \rho|\varphi\rangle = |\psi\rangle\} \quad (۱۵\text{-}۱)$$

کرنل و برد زیر فضاهای H هستند که به ترتیب توسط ویژه بردارهای با ویژه مقادیر صفر و ویژه بردارهای با ویژه مقادیر مخالف صفر ρ پدید می آیند. بعد زیر فضای برد را مرتبه ρ می گویند.

با انتخاب پایه $\{|i,j\rangle\}$ برای فضای $H = H_A \otimes H_B$، می توان عملگر ρ را با استفاده از عملگرهای پایه به صورت زیر بسط داد :

$$\rho = \sum_{ijkl} \rho_{kl}^{ij} |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B \langle k|_A \otimes \langle l|_B = \sum_{ijkl} \rho_{kl}^{ij} |i,j\rangle\langle k,l| \quad (۱٦\text{-}۱)$$

---

۱ Mixed State

۲ Density Matrix

۱-۱۰ جداپذیری و درهمتنیدگی حالت آمیخته

حالت آمیخته ρ جداپذیر نامیده می شود اگر بتوان آن را به صورت ترکیب محدبی از حالت های خالص حاصلضربی نوشت :

$$\rho = \sum_{i=1}^{k} p_i |e_i, f_i\rangle\langle e_i, f_i| \qquad (۱-۱۷)$$

که در آن $p_i \geq 0$ و $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ و k یک عدد طبیعی کوچکتر یا مساوی با مربع بعد فضا است. اگر حالت آمیخته ρ جداپذیر نباشد، آن را درهمتنیده می گویند.

۱-۱۱ ترانهاد جزئی[۱] و حالت های PPT

ماتریس چگالی ρ یک عملگر هرمیتی مثبت روی فضای $H = H_A \otimes H_B$ است که برحسب اعضای پایه فضا، می توان آن را به صورت زیر نشان داد:

$$\rho = \sum_{ijkl} \rho_{kl}^{ij} (|i\rangle_A \otimes |j\rangle_B)(\langle k|_A \otimes \langle l|_B) = \sum_{ijkl} \rho_{kl}^{ij} (|i\rangle_A \langle k|_A) \otimes (|j\rangle_B \langle l|_B) \qquad (۱-۱۸)$$

ترانهاد جزئی آن نسبت به زیر سیستم A به صورت زیر تعریف می شود:

$$\rho^{T_A} = \sum_{ijkl} \rho_{kl}^{ij} (|i\rangle_A \langle k|_A)^T \otimes (|j\rangle_B \langle l|_B)$$

$$= \sum_{ijkl} \rho_{kl}^{ij} (|k\rangle_A \langle i|_A) \otimes (|j\rangle_B \langle l|_B) \quad , \quad \left(\rho^{T_A}\right)_{kl}^{ij} = \rho_{il}^{kj} \qquad (۱-۱۹)$$

حالتی را که ترانهاد جزئی آن نسبت به سیستم A یا B مثبت باشد، به اختصار حالت PPT می نامیم:

$$\rho^{T_A} \geq 0 \quad \text{یا} \quad \rho^{T_B} \geq 0 \qquad (۱-۲۰)$$

یک حالت PPT را که درهمتنیده نیز باشد ، حالت درهمتنیده PPT می نامیم[۱].

---

۱ Partial Transpose

فصل دوم

سنجه درهمتنیدگی

شکل یابی و سنجه توافق