

صلى الله عليه وسلم



دانشگاه شاهرود

دانشکده علوم پایه

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته فیزیک اتمی - مولکولی

عنوان:

بررسی و شبیه سازی موجبر بلور فوتونی به منظور انتشار نور کند

اساتید راهنما:

دکتر محمد مرادی

دکتر محمود حسینی فرزاد

پژوهشگر:

هاجر مومنی نژاد

مهر ۱۳۹۱

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات  
و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه  
متعلق به دانشگاه شهرکرد است.

اکنون که این پایان نامه به پایان رسیده است، بر خود فرض می دانم از استاد گرانقدر، جناب آقای دکتر محمد مرادی که آموزه های اخلاقی و علمی ایشان، همواره راهگشا بوده است تشکر و قدردانی نمایم.

هم چنین از استاد بزرگوار، جناب آقای دکتر محمود حسینی فرزند که راهنمایی های لازم را در طول مدت انجام این پروژه مبذول داشتند صمیمانه سپاسگذارم و از خداوند منان خالصانه، آرزوی سلامت و سعادت ایشان را خواستارم.

تقدیم بہ:

اسوہی تلاش

پدرم

و

کود صبر

مادرم

## چکیده

در این پایان‌نامه، انتشار نور کند در یک موجبر تیغه‌ای بلور فوتونی مثلثی به طور عددی با استفاده از روش بسط امواج تخت مطالعه شده است و بر اساس آن یک موجبر بلور فوتونی پهن‌بند با سرعت گروه پایین و پاشندگی پایین پیشنهاد شده است. تحلیل‌های شبیه‌سازی نشان می‌دهد که بیشینه ساختن ضریب گروه و کمینه ساختن پاشندگی در پهنای باند وسیع با تغییر شعاع حفره‌ی هوا، جابجایی موقعیت سه ردیف اول حفره‌ها در اطراف موجبر و تغییر زاویه بین بردارهای شبکه اولیه در موجبرهای بلور فوتونی امکان‌پذیر است. بررسی‌ها نشان می‌دهد اثر تغییر زاویه بین بردارهای شبکه اولیه بر پهنای باند و بر پاشندگی سرعت گروه به مراتب بیشتر از تغییر شعاع حفره هوا و جابجایی موقعیت حفره‌های موجبر می‌باشد. چنین موجبر بلور فوتونی، سرعت گروه پایین و پاشندگی پایین روی یک بازه‌ی طول موج گسترده‌ای را ارائه می‌کند. نتایج محاسبات عددی پهنای باند 32nm، 19nm و 15nm به ترتیب مطابق با ضریب گروه 30، 40 و 50 ارائه می‌دهد.

**کلمات کلیدی:** موجبر بلور فوتونی، نور کند، سرعت گروه، پاشندگی سرعت گروه، موجبر سیلیکونی.

## فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	فهرست مطالب
۳	فهرست شکل‌ها
۶	<b>فصل اول: بلورهای فوتونی</b>
۶	مقدمه
۶	۱-۱ معرفی بلورهای فوتونی
۸	۱-۱-۱ بلورهای فوتونی دو بعدی
۹	۱-۱-۲ شبکه وارون
۱۲	۲-۱ معادلات حاکم بر بلور فوتونی
۱۳	۳-۱ روش‌های عددی در تحلیل بلورهای فوتونی
۱۴	۱-۳-۱ روش بسط امواج تخت (PWE)
۱۶	۲-۳-۱ روش تفاضل‌های متناهی در حوزه زمان (FDTD)
۲۰	۳-۳-۱ شرایط مرزی مورد استفاده در بلور فوتونی
۲۱	۴-۱ منشأ گاف نوار فوتونی
۲۳	۵-۱ ساختار نوار در بلورهای فوتونی
۲۳	۱-۵-۱ ساختار نوار برای بلور فوتونی دو بعدی
۲۴	۲-۵-۱ ساختار نوار برای بلور فوتونی تیغه‌ای
۲۶	۶-۱ انواع تیغه‌های بلور فوتونی
۲۷	۱-۶-۱ اثرات ضخامت تیغه بلور فوتونی
۲۸	۷-۱ کاربردهای بلور فوتونی
۲۹	<b>فصل دوم: موجبرهای بلور فوتونی</b>
۲۹	مقدمه
۳۰	۱-۲ موجبرهای بلور فوتونی دو بعدی
۳۲	۲-۲ موجبرهای تیغه‌ای بلور فوتونی
۳۵	۱-۲-۲ موجبرهای ضریب شکست کاهش یافته
۳۶	۲-۲-۲ موجبرهای ضریب شکست افزایش یافته
۳۷	۳-۲ سرعت گروه و پاشندگی سرعت گروه
۳۸	۴-۲ اتلاف‌ها در موجبرهای بلور فوتونی
۴۰	۵-۲ نور کند

۴۰	..... ۱-۵-۲ نور کند در موجبرهای بلور فوتونی
۴۱	..... ۲-۵-۲ بررسی نور کند با استفاده از ساختار نواری
۴۲	..... ۳-۵-۲ ساختارهای نور کند پهن باند
۴۴	..... ۶-۲ مدهای هدایت شده گاف و هدایت شده ضریب شکست
۴۶	..... فصل سوم: نتایج شبیه‌سازی
۴۶	..... مقدمه
۴۶	..... ۱-۳ اصول طراحی
۴۷	..... ۲-۳ نحوه پیاده‌سازی و ابزارهای مورد استفاده
۴۸	..... ۳-۳ اثر تغییر تدریجی شعاع حفره‌های مجاور موجبر تیغه‌ای بلور فوتونی
۵۴	..... ۴-۳ اثر تغییر تدریجی پهنای موجبر تیغه‌ای بلور فوتونی
۶۱	..... ۵-۳ اثر تغییر هم‌زمان $r_i$ ها و $w_i$ ها
۶۳	..... ۶-۳ بررسی اثر تغییر زاویه بین دو بردار اولیه موجبر بر نمودار پاشندگی
۶۴	..... ۱-۶-۳ اثر تغییر هم‌زمان زاویه بین دو بردار شبکه $(\theta)$ و شعاع حفره‌های موجبر $(r_i)$
۶۷	..... ۲-۶-۳ اثر تغییر هم‌زمان زاویه بین دو بردار شبکه $(\theta)$ و پهنای موجبر $(w_i)$
۷۱	..... ۳-۶-۳ اثر تغییر هم‌زمان زاویه بین دو بردار شبکه $(\theta)$ با تغییر پهنایها $(w_i)$ و شعاع‌های موجبر $(r_i)$
۷۳	..... ۷-۳ نتیجه‌گیری و پیشنهادها
۷۴	..... منابع



## فهرست نمودارها و شکل‌ها

عنوان	صفحه
شکل ۱-۱ مثال‌هایی از بلور فوتونی یک، دو و سه بعدی. رنگ‌های مختلف نمایش دهنده مواد با ثابت‌های دی‌الکتریک متفاوت هستند .....	۸
شکل ۲-۱ (الف) بلور فوتونی دو بعدی مربعی و سلول واحد آن (ب) بلور دو بعدی مثلثی و سلول واحد آن (لوزی) .....	۹
شکل ۳-۱ شکل‌ها از سمت راست بترتیب برای ناحیه اول بریلوئن، شبکه وارون، شبکه واقعی بلور و ناحیه کاهش‌ناپذیر بریلوئن بلورهای فوتونی (الف) با شبکه مربعی و (ب) با شبکه مثلثی را نشان می‌دهد. در آخرین شکل سمت چپ مثلث $\Gamma MK$ مرزهای ناحیه برای شبکه مربعی و مثلث $\Gamma MK$ همین ناحیه را برای شبکه مثلثی نشان می‌دهد .....	۱۱
شکل ۴-۱ شبکه‌بندی FDTD برای مدهای TM دو بعدی .....	۱۹
شکل ۵-۱ شبکه‌بندی FDTD برای مدهای TE دو بعدی .....	۲۰
شکل ۶-۱ ساختار مورد شبیه‌سازی برای یک موجبر فوتونی .....	۲۲
شکل ۷-۱ (الف) ساختار نوار برای بلور مربعی (ب) ساختار نوار برای بلور مثلثی دو بعدی .....	۲۴
شکل ۸-۱ (الف) تیغه بلور فوتونی مثلثی (ب) ساختار نوار تیغه .....	۲۵
شکل ۹-۱ (الف) تیغه مربعی از میله‌های دی‌الکتریک در هوا (ب) تیغه مثلثی از حفره‌های هوا در زمینه دی‌الکتریک با روکش‌های یکنواخت .....	۲۶
شکل ۱۰-۱ (الف) ساختار نوار تیغه مربعی از میله‌های دی‌الکتریک با روکش متناوب (ب) ساختار نوار تیغه مثلثی از حفره‌های هوا با روکش متناوب .....	۲۷
شکل ۱۱-۱ اندازه گاف در مدهای هدایت شده تیغه‌های حفره‌ای و میله‌ای بر حسب تابعی از ضخامت تیغه (مضربی از دوره تناوب). تیغه حفره‌ای گافی در مدهای شبه TE دارد (سمت چپ) و تیغه میله‌ای گافی در مدهای شبه TM دارد (سمت راست). هر چه ضخامت افزایش می‌یابد، گاف نیز افزایش می‌یابد .....	۲۷
شکل ۱-۲ انواع موجبر بلور فوتونی. شکل (الف) موجبری خطی با دوره تناوب $a$ و شکل (ب) و (ج) موجبرهایی با خمش‌های متفاوت را نشان می‌دهد .....	۳۰
شکل ۲-۲ (الف) موجبر نقص خطی مربعی (ب) ابر ساختار موجبر مربعی .....	۳۱
شکل ۳-۲ (الف) نمودار پاشندگی موجبر نقص خطی مربعی (ب) نمایه مد منتشر شده در موجبر .....	۳۱
شکل ۴-۲ (الف) موجبر فوتونی شبکه مثلثی دو بعدی (ب) نمودار پاشندگی و دو مد هدایت شده که در گاف بلور فوتونی مشاهده می‌شود .....	۳۲
شکل ۵-۲ (الف) انواع موجبرهای ضریب شکست کاهش‌یافته (ب) موجبرهای ضریب شکست افزایش‌یافته .....	۳۴
شکل ۶-۲ موجبر شکاف .....	۳۴
شکل ۷-۲ (الف) موجبر تیغه‌ای بلور فوتونی مثلثی (ب) ساختار نواری موجبر تیغه‌ای .....	۳۴
شکل ۸-۲ (الف) نمودار پاشندگی برای موجبر تیغه‌ای با شعاع میله کاهش‌یافته (ب) نمودار پاشندگی برای موجبر تیغه‌ای با شعاع حفره افزایش‌یافته .....	۳۵

شکل ۲-۹ (الف) نمودار پاشندگی برای موجبر تیغه‌ای با شعاع میله افزایش‌یافته (ب) نمودار پاشندگی برای موجبر تیغه‌ای با شعاع حفره کاهش‌یافته ..... ۳۷

شکل ۲-۱۰ (الف) نمودار سرعت گروه بر حسب بسامد (ب) نمودار پاشندگی بر حسب بسامد یک موجبر بلور فوتونی. سرعت گروه بر حسب سرعت نور در خلا بهنجار شده است. برای بسامدهای نزدیک لبه  $\frac{fa}{c} = 0.265$ ، سرعت گروه بسیار پایین و پاشندگی بسیار بالا است ..... ۳۸

شکل ۲-۱۱ (الف) ساختار نوار موجبر مثلثی (ب) نمایه مد هدایت شده در موجبر ..... ۴۲

شکل ۲-۱۲ (الف) ساختار نوار موجبر بلور فوتونی (ب) نمودار سرعت گروه و پاشندگی (نمودار آبی رنگ) ..... ۴۳

شکل ۲-۱۳ نمودار نوار یک موجبر بلور فوتونی مثلثی با دو پهنای مختلف  $w=1$  و  $w=0.7$  ..... ۴۴

شکل ۲-۱۴ نمودار نواری یک موجبر نقص خطی دو بعدی با  $r=0.3a$ ،  $w=1$ ،  $n=3.5$  برای قطبش TE.  $v_1$  و  $v_2$  بترتیب مدهای هدایت شده گاف و هدایت شده ضریب شکست هستند ..... ۴۵

شکل ۳-۱ نمودار بسامد بهنجار  $(\frac{\omega a}{2\pi c})$  بر حسب  $\frac{ka}{2\pi}$  برای شعاع‌های مختلف حفره‌های ردیف اول ..... ۴۹

شکل ۳-۲ نمودار سرعت گروه بر حسب بسامد بهنجار  $(\frac{\omega a}{2\pi c})$  برای شعاع‌های مختلف حفره‌های ردیف اول ..... ۵۰

شکل ۳-۳ نمودار پاشندگی سرعت گروه  $(\beta_2)$  بر حسب بردار موج  $\frac{ka}{2\pi}$  برای شعاع‌های مختلف حفره‌های ردیف اول ..... ۵۰

شکل ۳-۴ نمودار بسامد بهنجار  $(\frac{\omega a}{2\pi c})$  بر حسب  $\frac{ka}{2\pi}$  برای شعاع‌های مختلف حفره‌های ردیف دوم ..... ۵۱

شکل ۳-۵ نمودار سرعت گروه بر حسب بسامد بهنجار  $(\frac{\omega a}{2\pi c})$  برای شعاع‌های مختلف حفره‌های ردیف دوم ..... ۵۲

شکل ۳-۶ نمودار پاشندگی سرعت گروه  $(\beta_2)$  بر حسب بردار موج  $\frac{ka}{2\pi}$  برای شعاع‌های مختلف حفره‌های ردیف دوم ..... ۵۲

شکل ۳-۷ نمودار بسامد بهنجار  $(\frac{\omega a}{2\pi c})$  بر حسب  $\frac{ka}{2\pi}$  برای شعاع‌های مختلف حفره‌های ردیف سوم ..... ۵۳

شکل ۳-۸ نمودار سرعت گروه بر حسب بسامد بهنجار  $(\frac{\omega a}{2\pi c})$  برای شعاع‌های مختلف حفره‌های ردیف سوم ..... ۵۴

شکل ۳-۹ نمودار پاشندگی سرعت گروه  $(\beta_2)$  بر حسب بردار موج  $\frac{ka}{2\pi}$  برای شعاع‌های مختلف حفره‌های ردیف سوم ..... ۵۴

شکل ۳-۱۰ نمودار بسامد بهنجار  $(\frac{\omega a}{2\pi c})$  بر حسب  $\frac{ka}{2\pi}$  برای  $w_1$ های مختلف ..... ۵۵

شکل ۳-۱۱ نمودار سرعت گروه بر حسب بسامد بهنجار  $(\frac{\omega a}{2\pi c})$  برای  $w_1$ های مختلف ..... ۵۶

شکل ۳-۱۲ نمودار پاشندگی سرعت گروه  $(\beta_2)$  بر حسب بردار موج  $\frac{ka}{2\pi}$  برای  $w_1$ های مختلف ..... ۵۶

شکل ۳-۱۳ نمودار بسامد بهنجار  $(\frac{\omega a}{2\pi c})$  بر حسب  $\frac{ka}{2\pi}$  برای  $w_2$ های مختلف ..... ۵۷

شکل ۳-۱۴ نمودار سرعت گروه بر حسب بسامد بهنجار  $(\frac{\omega a}{2\pi c})$  برای  $w_2$ های مختلف ..... ۵۸

شکل ۳-۱۵ نمودار پاشندگی سرعت گروه  $(\beta_2)$  بر حسب بردار موج  $\frac{ka}{2\pi}$  برای  $w_2$ های مختلف ..... ۵۸

شکل ۳-۱۶ نمودار بسامد بهنجار  $(\frac{\omega a}{2\pi c})$  بر حسب  $\frac{ka}{2\pi}$  برای  $w_3$ های مختلف ..... ۵۹

شکل ۳-۱۷ نمودار سرعت گروه بر حسب بسامد بهنجار  $(\frac{\omega a}{2\pi c})$  برای  $w_3$ های مختلف ..... ۶۰

شکل ۳-۱۸ نمودار پاشندگی سرعت گروه  $(\beta_2)$  بر حسب بردار موج  $\frac{ka}{2\pi}$  برای  $w_3$ های مختلف ..... ۶۰

شکل ۳-۱۹ نمودار بسامد بهنجار  $(\frac{\omega a}{2\pi c})$  بر حسب  $\frac{ka}{2\pi}$  برای  $r$  و  $w$ های مختلف ..... ۶۲

شکل ۳-۲۰ نمودار سرعت گروه بر حسب بسامد بهنجار  $(\frac{\omega a}{2\pi c})$  برای  $r$  و  $w$ های مختلف ..... ۶۲

شکل ۳-۲۱ نمودار پاشندگی سرعت گروه  $(\beta_2)$  بر حسب بردار موج  $\frac{ka}{2\pi}$  برای  $r$  و  $w$ های مختلف ..... ۶۳

شکل ۳-۲۲ موجبر تیغه‌ای بلور فوتونی با شبکه مثلثی به ضخامت  $h$  که  $\theta$  زاویه بین دو بردار شبکه اولیه است ..... ۶۴

- شکل ۳-۲۳ نمودار سرعت گروه بر حسب بسامد بهنجار  $(\frac{\omega a}{2\pi c})$  برای شعاع‌های مختلف حفره‌های ردیف اول و  $\theta = 65^0$   
 ۶۴.....
- شکل ۳-۲۴ نمودار پاشندگی سرعت گروه  $(\beta_2)$  بر حسب بردار موج  $\frac{ka}{2\pi}$  برای شعاع‌های مختلف حفره‌های ردیف اول و  $\theta = 65^0$   
 ۶۵.....
- شکل ۳-۲۵ نمودار سرعت گروه بر حسب بسامد بهنجار  $(\frac{\omega a}{2\pi c})$  برای شعاع‌های مختلف حفره‌های ردیف دوم و  $\theta = 65^0$   
 ۶۵.....
- شکل ۳-۲۶ نمودار پاشندگی سرعت گروه  $(\beta_2)$  بر حسب بردار موج  $\frac{ka}{2\pi}$  برای شعاع‌های مختلف حفره‌های ردیف دوم و  $\theta = 65^0$   
 ۶۶.....
- شکل ۳-۲۷ نمودار سرعت گروه بر حسب بسامد بهنجار  $(\frac{\omega a}{2\pi c})$  برای شعاع‌های مختلف حفره‌های ردیف سوم و  $\theta = 65^0$   
 ۶۶.....
- شکل ۳-۲۸ نمودار پاشندگی سرعت گروه  $(\beta_2)$  بر حسب بردار موج  $\frac{ka}{2\pi}$  برای شعاع‌های مختلف حفره‌های ردیف سوم و  $\theta = 65^0$   
 ۶۷.....
- شکل ۳-۲۹ نمودار سرعت گروه بر حسب بسامد بهنجار  $(\frac{\omega a}{2\pi c})$  برای  $w_1$ های مختلف و  $\theta = 65^0$   
 ۶۸.....
- شکل ۳-۳۰ نمودار پاشندگی سرعت گروه  $(\beta_2)$  بر حسب بردار موج  $\frac{ka}{2\pi}$  برای  $w_1$ های مختلف و  $\theta = 65^0$   
 ۸۷.....
- شکل ۳-۳۱ نمودار سرعت گروه بر حسب بسامد بهنجار  $(\frac{\omega a}{2\pi c})$  برای  $w_2$ های مختلف و  $\theta = 65^0$   
 ۶۹.....
- شکل ۳-۳۲ نمودار پاشندگی سرعت گروه  $(\beta_2)$  بر حسب بردار موج  $\frac{ka}{2\pi}$  برای  $w_2$ های مختلف و  $\theta = 65^0$   
 ۶۹.....
- شکل ۳-۳۳ نمودار سرعت گروه بر حسب بسامد بهنجار  $(\frac{\omega a}{2\pi c})$  برای  $w_3$ های مختلف و  $\theta = 65^0$   
 ۷۰.....
- شکل ۳-۳۴ نمودار پاشندگی سرعت گروه  $(\beta_2)$  بر حسب بردار موج  $\frac{ka}{2\pi}$  برای  $w_3$ های مختلف و  $\theta = 65^0$   
 ۷۰.....
- شکل ۳-۳۵ نمودار سرعت گروه بر حسب بسامد بهنجار  $(\frac{\omega a}{2\pi c})$  برای  $w_i$ های و  $r_i$ های مختلف و  $\theta = 65^0$   
 ۷۱.....
- شکل ۳-۳۶ نمودار پاشندگی سرعت گروه  $(\beta_2)$  بر حسب بردار موج  $\frac{ka}{2\pi}$  برای  $w_i$ های و  $r_i$ های مختلف و  $\theta = 65^0$   
 ۷۲... ..

## فصل اول

### بلورهای فوتونی

#### مقدمه

هدف از معرفی بلورهای فوتونی<sup>۱</sup> کنترل خواص اپتیکی مواد است. بلورهای فوتونی از موضوعات علمی است که در سال‌های اخیر کاربردهای بسیار وسیع آن در حوزه پژوهش‌های بنیادی و تکنولوژی، مورد توجه محققان بسیاری قرار گرفته است. این بلورها انقلابی در صنعت مخابرات و فناوری‌های اپتیکی فراهم کرده است که در آینده نزدیک شاهد رشد فزاینده‌ی کاربردهای آن‌ها خواهیم بود. نیاز روزافزون به ارتباط، انتقال و پردازش اطلاعات سریع‌تر، ساختارهای تمام نوری را به عنوان گزینه‌ای برای ساخت ادواتی مانند حافظه، کلید و گیت منطقی مطرح نموده است. در این میان بلورهای فوتونی به دلیل ویژگی‌های جالبی نظیر امکان ایجاد نور با سرعت گروه بسیار پایین، تلفات ناچیز و انعطاف‌پذیری در شکل و ابعاد بسیار جالب توجه هستند [۱].

#### ۱-۱ معرفی بلورهای فوتونی

مطالعه و تحقیق در مورد محیط‌هایی با ساختار متناوب که امکان وجود بازه‌های ممنوعه فرکانسی را برای فوتون‌ها فراهم می‌آورند، منجر به پیدایش و گسترش شاخه‌ی جدیدی در فیزیک کاربردی به نام بلورهای فوتونی شده است. اگرچه بلورهای فوتونی در واقع از سال ۱۸۸۷ مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، ولی عبارت

---

<sup>1</sup> Photonic crystal

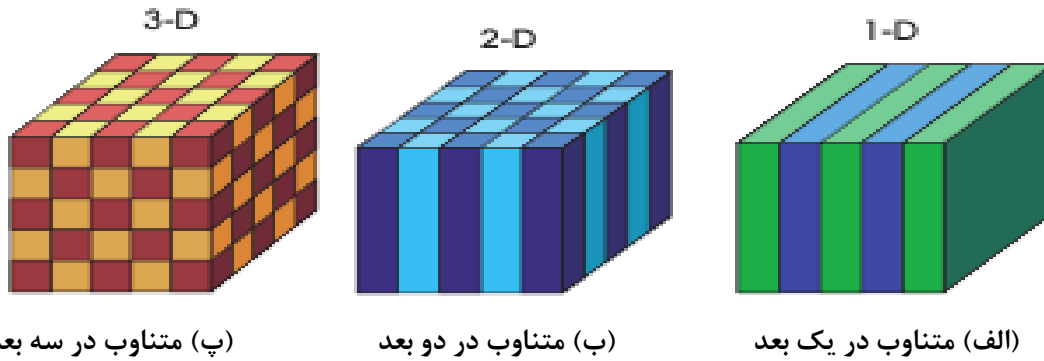
"بلورهای فوتونی" برای اولین بار ۱۰۰ سال بعد، زمانی که الی یابلانویچ<sup>۱</sup> مقاله‌ی مشهور خود درباره‌ی بلورهای فوتونی را در سال ۱۹۸۷ منتشر کرد، مورد استفاده قرار گرفت. اطلاق واژه بلور به این ساختارها، از تکرار یک بلوک ساختمانی حاصل می‌شود و واژه‌ی فوتونی نیز از آن رو بکار می‌رود که این ساختارها بر انتشار فوتون‌ها اثر می‌گذارند. بلورهای فوتونی از لایه‌های متناوبی از مواد که ثابت دی‌الکتریک آن‌ها با هم متفاوت هستند، تشکیل شده است. این بلورها در برابر امواج نوری همان رفتاری را دارند که نیم‌رساناها در مقابل امواج الکترونی شبکه از خود نشان می‌دهند. فوتون‌ها (معادل ذره‌ای امواج الکترومغناطیسی) بسته به طول موج می‌توانند از درون بلورهای فوتونی عبور کنند یا منعکس شوند. محدوده‌ی طول موج‌هایی را که اجازه‌ی عبور ندارند، باند ممنوعه فوتونی<sup>۲</sup> (گاف نوار فوتونی) می‌نامند. گاف‌های فوتونی بازه‌هایی از بسامد هستند که نور نمی‌تواند در آن بسامدها در ساختار منتشر شود که بر این اساس می‌توان در انتقال یا تغییر جهت یا محصور کردن موج در ابعاد بسیار ظریف از آن‌ها استفاده کرد. مشخصه اصلی بلورهای فوتونی دوره‌ای بودن ثابت دی‌الکتریک<sup>۳</sup> در آن‌ها است که دوره تناوب آن در محدوده طول موج نور در گاف نوری است. این ویژگی منجر به ایجاد نوار ممنوعه فرکانسی در بلور می‌شود، به‌طوری‌که امواج الکترومغناطیسی که با بسامد در منطقه ممنوعه تابش می‌شوند، قادر به عبور از بلور نیستند. پس مهم‌ترین اثر ناشی از تناوب وجود محدوده‌های پیوسته و کران‌دار در حوزه بسامد است که در آن محدوده امکان انتشار موج در ساختار وجود ندارد. برای گستره‌ای از بسامد، اگر یک بلور فوتونی نور فرودی را با هر قطبشی و در هر زاویه‌ای بازتاب دهد، می‌گوییم که بلور دارای گاف فوتونی کامل است. تغییرات متناوب در ضریب شکست می‌تواند ابعاد مختلف بلورهای فوتونی را بسازد. ضریب شکست ساختار بصورت نسبت بین ضریب شکست ماده با ثابت دی‌الکتریک زیاد و ماده با ثابت دی‌الکتریک کم تعریف می‌شود (ساختار فوتونی از دو ماده با ثابت دی‌الکتریک متفاوت تشکیل شده است) و میزان پاشندگی موج را درون ساختار بیان می‌کند. مطابق شکل ۱-۱ بلورهای فوتونی می‌توانند در یک، دو و سه بعد متناوب باشند که دوره تناوب آن‌ها در محدوده‌ی طول موج فوتون است. اگر این تکرار در یک بعد باشد به بلور تشکیل شده، بلورهای فوتونی یک بعدی می‌گوییم. تکرار ساختار متناوب در دو و سه بعد نیز بلورهای فوتونی دو و سه بعدی را به‌وجود خواهد آورد [۱].

---

<sup>1</sup> Eli Yablonovitch

<sup>2</sup> Photonic Band Gap

<sup>3</sup> Dielectric Constant



شکل ۱-۱ مثال‌هایی از بلور فوتونی یک، دو و سه بعدی. رنگ‌های مختلف نمایش دهنده مواد با ثابت‌های دی‌الکتریک متفاوت هستند [۱].

### ۱-۱-۱ بلورهای فوتونی دو بعدی

بلورهای فوتونی دو بعدی بسیاری از ویژگی‌های مهم بلورهای فوتونی سه بعدی را ارائه می‌کنند که می‌توانند برای اثبات مهم‌ترین اهداف وسایل بلور فوتونی مورد استفاده قرار گیرند. مهم‌ترین ویژگی بلورهای فوتونی در دو بعد این است که میدان آن‌ها در دو بعد به دلیل تقارن می‌توانند به دو قطبش تقسیم شوند: مد TM که میدان مغناطیسی در صفحه انتشار و میدان الکتریکی در صفحه عمود بر این صفحه قرار دارد و مد TE که میدان الکتریکی در صفحه انتشار و میدان مغناطیسی عمود بر آن دارد. این خاصیت مهم باعث می‌گردد بتوان مسائل اساسی مربوط به قطبش‌های مختلف را به طور جداگانه بررسی کرد. بلورهای دو بعدی می‌توانند از حفره‌های هوا در یک دی‌الکتریک یا میله‌های دی‌الکتریک در هوا به صورت شبکه مربعی یا مثلثی که ثابت دی‌الکتریک آن در یک جهت همگن<sup>۱</sup> و در امتداد دو محور دیگر متناوب است، تشکیل شوند. ساختار دو بعدی دارای تقارن انتقالی در دو بعد است یعنی:

$$\varepsilon(r) = \varepsilon(x, y) = \varepsilon(r + R) \quad (1-1)$$

که  $\varepsilon$  گذردهی الکتریکی و  $R$  بردار انتقال شبکه است.

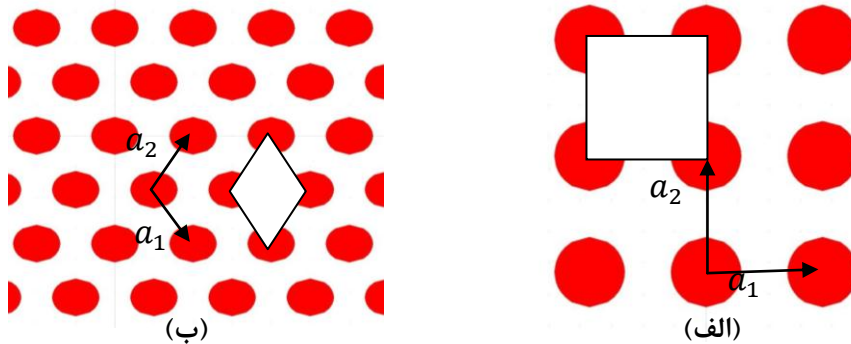
در شکل ۱-۲ دو ساختار مربعی و مثلثی نشان داده شده است که در این ساختارها  $a_1, a_2$  بردارهای ثابت شبکه<sup>۲</sup> نامیده می‌شود و بیانگر حداقل طول فضایی است که ساختار شبکه در آن تکرار می‌شود و جزء عوامل بسیار مهم در ساختارهای بلور فوتونی می‌باشد. این بردارها هر دو نقطه از شبکه را با رابطه زیر به هم مرتبط می‌کند:

$$\vec{r} = r + m_1 a_1 + m_2 a_2 = r + R \quad (2-1)$$

<sup>1</sup> Homogeneous

<sup>2</sup> Lattice Vectors

که  $m_2, m_1$  اعداد صحیح هستند و  $R$  بردار انتقال شبکه می باشد.



شکل ۲-۱ (الف) بلور فوتونی دو بعدی مربعی و سلول واحد آن (مربع) (ب) بلور دو بعدی مثلثی و سلول واحد آن (لوزی).

به دلیل تقارن انتقالی بلور فوتونی می توان مدهای بلور را در ناحیه کوچکی بنام سلول واحد<sup>۱</sup> بررسی کرد. سلول واحد کوچکترین جزیی است که با انتقال و تکرار آن بتوان کل بلور را بازسازی کرد. ساده ترین سلول واحد برای بلور فوتونی مربعی و مثلثی بترتیب بصورت مربع و لوزی با اضلاع برابر با ثابت شبکه می باشند ، به شکل های (۲-۱) مراجعه شود [۲].

### ۲-۱-۱ شبکه ی وارون

همان طور که گفته شد یک بلور فوتونی از یک سلول واحد تشکیل شده که به صورت نامحدود و متناوب در فضا تکرار می گردد. آرایش فضایی سلول واحد یک شبکه را تشکیل می دهد. هر شبکه توسط بردارهای شبکه ی مستقیم، معین می شود.

با توجه به تناوب ساختار بلور در فضا می توانیم ساختار بلور را با انتقال به فضای فوریه بررسی کنیم. تحلیل فوریه، آرایش فضایی متناوب بلور را به مولفه های فرکانس فضایی تجزیه می کند و فضای فوریه برای مشخص کردن امواج الکترومغناطیسی بر اساس بردار موج به کار می رود.

سری فوریه ی تابع دی الکترونیک متناوب که بلور فوتونی را تعریف می کند به صورت زیر است.

$$\varepsilon(\vec{r}) = \sum_G \varepsilon(\vec{G}) \exp(i\vec{G} \cdot \vec{r}) \quad (3-1)$$

که  $\varepsilon(G)$  ضرایب بسط فوریه هستند.

با جایگذاری در رابطه (۱-۱) داریم:

$$\varepsilon(\vec{r} + \vec{R}) = \sum_G \varepsilon(\vec{G}) e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}} e^{i\vec{G} \cdot \vec{R}} = \varepsilon(\vec{r}) \quad (4-1)$$

<sup>1</sup> Unit Cell

با استفاده از شرط تناوب بلور، می توان بردارهای شبکه وارون را بدست آورد:

$$G \cdot R = 2\pi n \quad \text{یا} \quad a_i \cdot b_j = 2\pi \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (5-1)$$

که  $b_1, b_2, b_3$  بردارهای واحد در شبکه وارون<sup>1</sup> هستند و از روابط زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= 2\pi \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{V_c} \\ \vec{b}_2 &= 2\pi \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{V_c} \\ \vec{b}_3 &= 2\pi \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{V_c} \end{aligned} \quad (6-1)$$

در روابط بالا  $V_c = \vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)$  حجم سلول واحد اولیه ی شبکه بلوری است. شبکه بلوری و شبکه وارون، معکوس یکدیگرند. بردارهای شبکه مستقیم دیمانسیون طول دارند در حالیکه بردارهای شبکه وارون دیمانسیون معکوس طول دارند. در دو بعد  $a_3$  می تواند بصورت دلخواه انتخاب گردد و در دو بعد بیشترین مطالعات هندسی مربوط به شبکه های مربعی و مثلثی وجود می شود.

هر ترکیب خطی از  $b_1, b_2$  بردار شبکه وارون،  $G$  نامیده می شود:

$$G = mb_1 + nb_2 \quad (7-1)$$

بنابراین در فضا مجموعه ی نقاطی که با کلیه ی بردارهای شبکه وارون مشخص می شوند را شبکه وارون می نامیم. در شبکه وارون تقارن های هندسی شبکه ی اصلی مانند انتقال و دوران وجود دارد. مثلا شبکه ی وارون یک شبکه ی مربعی یا مکعبی خود را تبدیل به یک شبکه مربعی یا مکعبی می کند. بنابراین شبکه وارون از مجموعه نقاطی که با بردارهای شبکه وارون درست می شود، تشکیل می گردد که بطور متناوب در فضای فرکانس تکرار می شود. شبکه وارون را می توان با کمک انتقال و تکرار یک سلول واحد به دست آورد که آن را نواحی بریلوئن می نامیم. بر اساس ویژگی های تقارن شبکه مربعی می توان نشان داد که اطلاعات بخش کوچکی از ناحیه اول بریلوئن<sup>2</sup> برای به دست آوردن ساختار نوارهای بسامد در ناحیه اول بریلوئن کافی است که ناحیه ی کاهش ناپذیر<sup>3</sup> نامیده می شود. در شکل ۱-۳ شبکه وارون یک بلور فوتونی مربعی و مثلثی و ناحیه اول بریلوئن آن و همچنین ناحیه بریلوئن کاهش ناپذیر آن ها با نقاط تقارن بالا توسط مثلث تیره نشان داده شده است [۳۰].

بردارهای مستقیم شبکه مربعی بصورت زیر هستند که در آن  $a$  ثابت شبکه است:

$$\vec{a}_1 = a(1,0) \quad \text{و} \quad \vec{a}_2 = a(0,1) \quad (8-1)$$

بردارهای وارون بصورت زیر هستند:

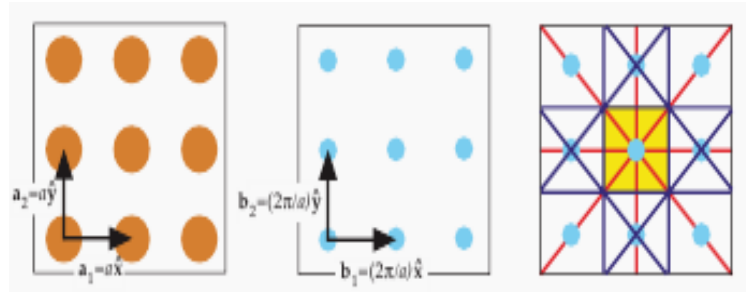
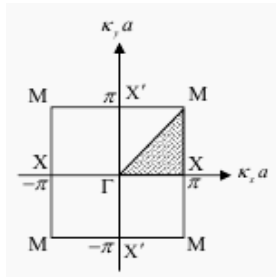
$$\vec{b}_1 = \frac{2\pi}{a}(1,0) \quad \text{و} \quad \vec{b}_2 = \frac{2\pi}{a}(0,1) \quad (9-1)$$

<sup>1</sup> Primitive Reciprocal Lattice Vectors

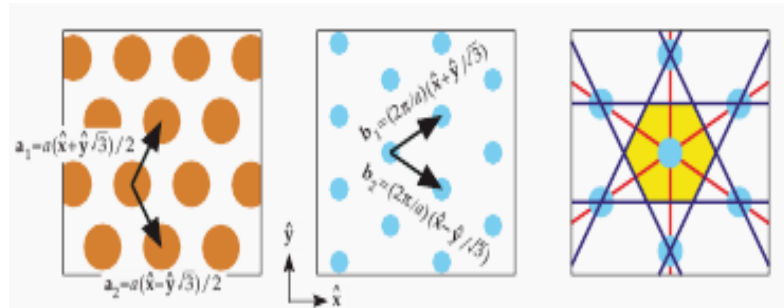
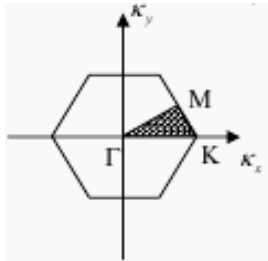
<sup>2</sup> First Brillouin Zone

<sup>3</sup> Irreducible Brillouin Zone





(الف)



(ب)

شکل ۱-۳ از سمت راست بترتیب برای ناحیهی اول بریلوئن، شبکهی وارون، شبکهی واقعی بلور و ناحیهی کاهش‌ناپذیر بریلوئن بلورهای فوتونی (الف) برای شبکه مربعی و (ب) برای شبکه مثلثی را نشان می‌دهند. در آخرین شکل سمت چپ مثلث  $\Gamma MX$  مرزهای ناحیه برای شبکه مربعی و مثلث  $\Gamma MK$  همین ناحیه را برای شبکه مثلثی نشان می‌دهد.

همان‌طور که از شکل (۱-۳) دیده می‌شود ساختار شبکهی معکوس غیر از ویژگی تقارن انتقالی نسبت به هر بردار شبکه معکوس دلخواه، که همان تناوب آن است، با اعمال دوران‌های  $\frac{\pi}{2}$  (یا مضارب آن) حول مبدأ، تقارن آینه‌ای نسبت به محورهای  $k_x$  و  $k_y$  و اقطار صفحه که با محورهای یاد شده زاویه  $\frac{\pi}{4}$  می‌سازند، ناوردا است. لذا مثلث  $\Gamma MX$  در شکل ۱-۳ کوچکترین جزئی از ناحیه بریلوئن اول است که با تبدیلات یاد شده قادر است اطلاعات ناحیه بریلوئن اول را بازسازی نماید.

نقاط با تقارن بالا در ناحیه بریلوئن اول دارای این مختصات است:

$$M = (\pi/a, \pi/a), X = (\pi/a, 0), \Gamma = (0,0)$$

شکل ۱-۳ (ب) یک شبکه مثلثی در دو فضای حقیقی و وارون در امتداد بردارهای پایه را نشان می‌دهد.

بردارهای مستقیم شبکه مثلثی بصورت زیر هستند که در آن  $a$  ثابت شبکه است:

$$\vec{a}_1 = a\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ و } \vec{a}_2 = a\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (10-1)$$

بردارهای وارون آن بصورت زیر هستند:

$$\vec{b}_1 = \frac{2\pi}{a}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ و } \vec{b}_2 = \frac{2\pi}{a}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad (11-1)$$

مختصات نقاط با تقارن بالا در ناحیه بریلوئن اول شبکه مثلثی به این صورت است:

$$M = (0, 2\pi/\sqrt{3}a), K = (2\pi/\sqrt{3}a, 2\pi/\sqrt{3}a), \Gamma = (0,0)$$

## ۲-۱ معادلات حاکم بر بلور فوتونی

برای توصیف انتشار امواج نور در بلور فوتونی معادلات ماکسول<sup>۱</sup> به کار برده می شود که عبارتند از [۴]:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (الف-۱۲-۱)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \quad (ب-۱۲-۱)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (ج-۱۲-۱)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (د-۱۲-۱)$$

برای یک محیط دی الکتریک فرض های زیر را در نظر می گیریم:

۱- محیط بدون بار آزاد<sup>۲</sup> و چگالی جریان آزاد الکتریکی باشد. ( $\rho = J = 0$ )

۲- محیط خطی، همسانگرد<sup>۳</sup> و غیر مغناطیسی<sup>۴</sup> ( $\mu = \mu_0$ ) باشد. ( $D(r) = \epsilon(r)E(r)$ )

۳- میدان ها با زمان به صورت سینوسی (به طور هماهنگ) تغییر کنند، یعنی:

$$E(r, t) = E(r)e^{i\omega t}$$

$$H(r, t) = H(r)e^{i\omega t}$$

میدان فیزیکی می تواند با استفاده از قسمت حقیقی میدان مختلط بدست آید. بسامد زاویه ای  $\omega$  و بسامد  $f$  توسط  $\omega = 2\pi f$  به هم مربوط هستند. با در نظر گرفتن فرض های بالا معادلات ماکسول به صورت زیر بازنویسی می شوند:

$$\nabla \times E(r) = -i\frac{\omega}{c}H(r) \quad (۱۳-۱)$$

$$\nabla \times H(r) = -i\frac{\omega}{c}\epsilon(r)E(r) \quad (۱۴-۱)$$

با ترکیب این دو معادله، مساله ویژه مقداری برای میدان مغناطیسی به صورت زیر به دست می آید [۱]:

$$\left(\nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon} \nabla \times\right)\right)H(r) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 H(r) \quad (۱۵-۱)$$

در رابطه (۱۵-۱)،  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$  سرعت نور در خلا است. اگر میدان مغناطیسی توسط معادله (۱۵-۱) تعیین شود، میدان الکتریکی می تواند با استفاده از معادله (۱۳-۱) تعیین شود. برای یک ماده دی الکتریک ویژگی های مواد می تواند هم چنین توسط ضریب شکست  $n = \sqrt{\epsilon_r}$  به جای گذردهی الکتریکی نسبی<sup>۵</sup>  $\epsilon_r$  مشخص شود.

<sup>1</sup> Maxwell

<sup>2</sup> Source-Free

<sup>3</sup> Linear Isotropic Medium

<sup>4</sup> Nonmagnetic

<sup>5</sup> Relative Permittivity

ویژگی کلی انتشار موج در بلورهای فوتونی این است که هیچ مقیاس طولی بنیادی<sup>۱</sup> وجود ندارد یعنی برای بلورهای فوتونی هیچ ثابت بنیادی با ابعاد طول وجود ندارد. این خاصیت اشاره به این مطلب دارد که حل مسئله در یک مقیاس از لحاظ ابعاد ساختار و طول موج متناسب با آن، قابل تعمیم به ساختار دیگر با طول موج دیگر است. محدوده طیف بسامد ساختار بلور فوتونی تنها به ضریب شکست ساختار، میزان پاشندگی آن و ثابت شبکه بستگی دارد و به کمک این قابلیت می توان این ساختارها را در محدوده های مختلف طیف بسامد تحلیل کرد و نتایج را به کمک مقیاس مناسب به یکدیگر تعمیم داد. مثلاً برای تابع دی الکتریک  $\epsilon(r)$  که با یک پارامتر مقیاس  $s$  به صورت  $\epsilon(r) = \epsilon(r/s)$  است، فقط با تغییر متغیرها و به کار بردن  $r' = sr$  و  $\nabla' = \nabla/s$  در رابطه (۱۵-۱) داریم:

$$\left( \nabla' \times \left( \frac{1}{\epsilon} \nabla' \times \right) \right) H(r'/s) = \left( \frac{\omega}{cs} \right)^2 H(r'/s) \quad (16-1)$$

اما این دوباره همان معادله اصلی است، این بار با نمای مد  $H(r) = H(r/s)$  و بسامد  $\omega' = \omega/s$ . یعنی اگر بخواهیم بعد از تغییر مقیاس طول با یک سازه  $s$  نمای مد جدید را بدانیم، تنها مد قبلی و بسامد آن را با سازه‌ی مشابهی مقیاس بندی<sup>۲</sup> می کنیم. این حقیقت از اهمیت عملی زیادی برخوردار است. برای مثال، ساخت بلورهای فوتونی در مقیاس میکرونی می تواند کاملاً مشکل باشد. اما مدل ها می توانند در مقیاس طولی بزرگ تر از سانتی متر به آسانی ساخته و در محدوده ی میکروموج<sup>۳</sup> امتحان شود [۵].

ثابت می شود که عملگر ماکسول (عملگر طرف چپ معادله (۱۵-۱)) یک عملگر خطی و هرمیتی<sup>۴</sup> است. خطی بودن عملگر می گوید که اگر  $H_1(r), H_2(r)$  هر دو جواب با بسامد یکسان باشند در این صورت هر ترکیب خطی از آن دو نیز جواب است. از طرف دیگر، هرمیتی بودن عملگر ماکسول می گوید ویژه مقادیر باید حقیقی باشند، یعنی  $(\frac{\omega}{c})^2$  حقیقی است. هم چنین هرمیتی بودن عملگر ماکسول هر دو مد هماهنگ  $H_1(r), H_2(r)$  با بسامدهای مختلف را مجبور می کند که ضرب داخلی صفر داشته باشند، یعنی مدهای  $H_1(r), H_2(r)$  متعامد هستند [۱].

### ۳-۱ روش های عددی در تحلیل بلورهای فوتونی

با توجه به پیچیدگی و حجم بالای محاسبات، هر گونه راه حل تحلیلی برای معادلات حاکم بر بلور فوتونی را عملاً غیرممکن می سازد، راه حل های عددی همواره مورد توجه خاص بوده اند. روش های متفاوتی در دو حوزه زمان و بسامد برای آنالیز و شبیه سازی بلورهای فوتونی و بدست آوردن مدهای میدان الکترومغناطیس وجود دارد که هر یک مزیت و کاستی ویژه خود را دارا است. این روش ها به دو دسته

<sup>1</sup> Fundamental Length Scale

<sup>2</sup> Scaling

<sup>3</sup> Microwave

<sup>4</sup> Linear and Hermitian Operator

تقسیم می‌شوند: روش‌های عددی حوزه زمان که ارزیابی زمانی میدان‌ها را با شرایط دلخواه در یک دستگاه<sup>۱</sup> گسسته (تفاضل محدود) مدل بندی می‌کنند و روش‌های حوزه بسامد که مستقیماً میدان‌ها و بسامدها را توسط قطری کردن ویژه عملگرها استخراج می‌کند. به‌طور کلی مزیت روش‌های قابل اعمال در حوزه بسامد، سرعت بالاتر آن‌ها نسبت به روش‌های حوزه زمان است. در روش‌های مبتنی بر حوزه زمان معمولاً اطلاعات بیشتری از شبیه‌سازی انجام شده قابل استخراج است. از جمله معروف‌ترین روش‌های حوزه بسامد می‌توان به روش‌های مبتنی بر بسط‌های گوناگون اشاره کرد. برای مثال در مرجع [۶] بسطی مبتنی بر امواج تخت برای محاسبه منحنی پاشندگی بلورهای فوتونی و در مراجع [۷] بسطی مبتنی بر توابع موجک<sup>۲</sup> جهت آنالیز بلورهای فوتونی دو بعدی و به‌دست آوردن مقدار گاف فوتونی ارائه شده است. برای ساختارهای دو بعدی روش چند قطبی‌های<sup>۳</sup> متعدد به خوبی، قابل استفاده در شبیه‌سازی بلورهای فوتونی است [۸]. همچنین استفاده از توابع وانیر<sup>۴</sup> که ابتدا برای آنالیز ساختارهای مربوط به حالت جامد توسعه یافته بود برای شبیه‌سازی بلورهای فوتونی بکار گرفته شده است [۹]. همچنین روش‌های ماتریس انتقال و ماتریس پراکندگی را می‌توان برای بدست آوردن طیف عبوری بلورهای فوتونی مورد استفاده قرار داد. از دیگر روش‌های متداول و دقیق برای شبیه‌سازی بلورهای فوتونی می‌توان به روش‌های تفاضل محدود [۳۱] و المان محدود در دو حوزه زمان و بسامد اشاره کرد. روش بسط موج تخت یک روش حوزه فرکانس است و می‌تواند ساختار باند و میدان‌های مد را بدست آورد. در این پروژه هدف شبیه‌سازی موجبرهای بلورهای فوتونی با استفاده از روش بسط امواج تخت<sup>۵</sup> است که در ادامه به بررسی این روش می‌پردازیم.

### ۱-۳-۱ روش بسط امواج تخت

روش بسط موج تخت توسط سیگالس<sup>۶</sup> و همکارانش در مطالعه‌ی ساختار نوار بلورهای فوتونی بکار گرفته شد [۱۰]. نقطه شروع برای بررسی انتشار امواج الکترومغناطیس در بلور فوتونی حل معادلات ماکسول است. روش بسط موج تخت شامل بسط توابع متناوب در سری فوریه مناسب و قرار دادن بسط در معادله موج است. نتیجه یک مسئله ویژه مقداری ماتریسی نامحدود است که باید برای محاسبات عددی کوتاه شود. در حل مسئله ویژه مقداری، طیفی از ویژه فرکانس‌ها (یعنی ساختار باند) و بسط ضرائب برای ویژه مدهای بلوخ بدست می‌آید.

<sup>1</sup> System

<sup>2</sup> Wavelet Functions

<sup>3</sup> Multipolars Method

<sup>4</sup> Wannier Functions

<sup>5</sup> Plane Wave Expansion Method

<sup>6</sup> Sigalas