



﴿اللَّهُمَّ صَلِّ عَلَى مُحَمَّدٍ وَآلِ مُحَمَّدٍ وَعَلَىٰ عَائِلَتِهِمْ﴾

بسمه تعالی



تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

اعضای هیأت داوران نسخه نهایی پایان نامه خانم زهرا قیومی رشته آمار به شماره دانشجویی ۸۹۵۲۰۲۱۰۰۷ تحت عنوان: «تحلیل مدل های گاوسی پنهان فضایی با استفاده از روش تقریب لاپلاس آشپانی جمع بسته» را در تاریخ ۱۳۹۱/۱۰/۲۰ از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجه کارشناسی ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای	رتبه علمی	نام و نام خانوادگی	اعضای هیأت داوران
	استاد	دکتر محسن محمدزاده	۱- استاد راهنما
	استادیار	دکتر مجید جعفری خالدي	۲- استاد ناظر داخلی
	استادیار	دکتر موسی گل علی زاده	۳- استاد ناظر داخلی
	استاد	دکتر حمید پزشک	۴- استاد ناظر خارجی
	استادیار	دکتر موسی گل علی زاده	۵- نماینده تحصیلات تکمیلی

آیین نامه چاپ پایان نامه (رساله) های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله) های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله) ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته آمار است که در سال ۱۳۹۱ در دانشکده علم ریاضی دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی

سرکار خانم/جناب آقای دکتر محمد مجتهدزاده، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر _____

و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر _____ از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

ماده ۶: اینجانب زهرا قیومی دانشجوی رشته آمار مقطع کارشناسی ارشد

تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: زهرا قیومی

تاریخ و امضا:

۹۱/۱۰/۲۶

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان‌نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان‌نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ۴- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵- این آیین‌نامه در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/۴/۱۸ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/۴/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب..... دانشجوی رشته..... ورودی سال تحصیلی.....»
مقطع..... دانشکده..... متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا:.....

تاریخ: ۹۱/۱۰/۲۴



دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد آمار

تحلیل مدل‌های گاوسی پنهان فضایی با
استفاده از روش تقریب لاپلاس
آشیانی جمع‌بسته

توسط

زهرا قیومی

استاد راهنما

دکتر محسن محمدزاده

دی ماه ۱۳۹۱

با تمام کاستی‌هایش
تقدیم به مهربان‌ترین خدایم

قدردانی

سپاس خدای را که نه از مهرش زمینه ناکامی است، نه از نعمت او جایی تهی است. نه از آمرزشش زمینه نومییدی است و نه پرستش او مایه سرافکندگی است.

سپاس خدای راست که ثنای او فزون از نیروی سخنوران، دهش هایش بیرون از گنجایش شمارش گران و پرداختن حق او فراتر از توان سخت کوشان است. هم او که هیچ اندیشه دور پروازی شناختاش را فرا چنگ نیاورد و هیچ هوش ژرف بینی به ژرفایش راه نیابد. با توانمندی بی کرانش آفریدگان را بیافرید، بادها را در پرتو مهر خویش بگسترانید و به میخ کوه های گران زمین را استواری بخشید. چنین است که پرتو هستی همه او را گواهی نمایان اند و خاری در چشم منکران. ساحت خداوندی از آن چه تشبیه گران و منکران او می گویند برتر و برتر است، بی گمان.

امتنان و سپاس می گزارم تلاش ها، زحمات و راهنمایی های ظریف، ارزشمند و بی شائبه استاد فرزانه و گرانمایه ام، جناب دکتر محسن محمدزاده را که با حمیت و جدیت، مرا به دقت، اندیشه، درک و تعمق وامی داشتند. از خانواده عزیزم مخصوصاً پدر و مادر مهربانم که در لحظه به لحظه زندگی در کنارم بوده و مرا از حمایت خویش بهره مند ساختند، تشکر می نمایم.

این تحقیق با حمایت پژوهشکده آمار انجام شده است. لذا بر خود لازم می دانم از ایشان به دلیل پشتیبانی در دریافت اطلاعات، حمایت ها و راهنمایی هایی ارزنده در زمینه تحلیل داده ها قدردانی نمایم.

زهرا قیومی

دی ۱۳۹۱

چکیده

مدل‌های گاوسی پنهان فضایی در زمینه‌های کاربردی متعددی مورد استفاده قرار می‌گیرند. گاهی در تحلیل بیز سلسله‌مراتبی این گونه مدل‌ها توزیع‌های پسینی یا شرطی کامل فرم بسته‌ای ندارند، لذا برای محاسبه آن‌ها معمولاً از الگوریتم‌های نمونه‌گیری مونت کارلوی زنجیر مارکوفی استفاده می‌شود. وجود همبستگی بین عناصر میدان پنهان معمولاً موجب افزایش زمان محاسبات و ناهمگرایی الگوریتم می‌شود. برای حل این مشکل روش تقریب لاپلاس آشیانی جمع‌بسته استفاده می‌شود، که در آن روش‌های انتگرال‌گیری عددی و تقریب لاپلاس به طریقی کارا ترکیب می‌شود به طوری که محاسباتی سریع و تقریبی دقیق جایگزین شبیه‌سازی‌های سنگین می‌شود.

در این پایان‌نامه ضمن مطالعه مدل‌های گاوسی پنهان فضایی و بررسی ویژگی‌های آن‌ها، میدان تصادفی مارکوفی گاوسی معرفی می‌شود. به‌علاوه خصوصیات این میدان تحت قیود خطی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. سپس نحوه کاربست مدل‌های گاوسی پنهان فضایی و روش تقریب لاپلاس آشیانی جمع‌بسته، روی داده‌های قیمت مسکن در شهر تهران به نمایش گذاشته و مدل برتر از بین پنج مدل معرفی شده که هر یک شامل انواع اثرات ثابت و تصادفی هستند، براساس ملاک‌های مناسب انتخاب و تحلیل می‌شود. به منظور نمایش کارایی روش تقریب لاپلاس آشیانی جمع‌بسته، مدلی با استفاده از این روش و الگوریتم‌های MCMC اجرا و زمان محاسبات و دقت مدل مورد مقایسه و ارزیابی قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: مدل گاوسی پنهان فضایی، میدان تصادفی مارکوفی گاوسی، تقریب لاپلاس آشیانی جمع‌بسته.

فهرست مندرجات

۱	آشنایی با میدان تصادفی مارکوفی گاوسی	۱
۱ مقدمه	۱.۱
۵ تعاریف و مفاهیم اولیه	۲.۱
۶ همبستگی فضایی	۱.۲.۱
۷ گراف	۲.۲.۱
۱۰ ارتباط خاصیت مارکوفی و استقلال شرطی	۳.۲.۱
۱۳ میدان تصادفی مارکوفی گاوسی	۳.۱
۱۵ خواص مارکوفی در میدان تصادفی مارکوفی گاوسی	۱.۳.۱
۱۵ ویژگی‌های شرطی میدان تصادفی مارکوفی گاوسی	۲.۳.۱
۱۷ مشخص سازی میدان تصادفی مارکوفی گاوسی با شرطی‌های کامل	۳.۳.۱

۱۸	میدان تصادفی مارکوفی گاوسی چندمتغیره	۴.۳.۱
۱۹	مدل های گاوسی پنهان فضایی	۴.۱
۲۱	الگوریتم های شبیه سازی میدان تصادفی مارکوفی گاوسی	۵.۱
۲۴	شبیه سازی غیرشرطی میدان تصادفی مارکوفی گاوسی	۱.۵.۱
۲۶	شبیه سازی شرطی میدان تصادفی مارکوفی گاوسی	۲.۵.۱

۲ میدان تصادفی مارکوفی گاوسی ذاتی

۳۲			
۳۳	تعاریف و مفاهیم اولیه	۱.۲
۳۶	میدان تصادفی مارکوفی گاوسی تحت قیدهای خطی	۲.۲
۴۲	میدان تصادفی مارکوفی گاوسی ذاتی	۳.۲
۴۲	میدان تصادفی مارکوفی گاوسی ذاتی مرتبه اول روی خط	۱.۳.۲
۴۶	میدان تصادفی مارکوفی گاوسی ذاتی مرتبه اول روی شبکه	۲.۳.۲
۴۹	مدل بسیج	۴.۲

۳ تقریب لاپلاس آشیانی جمع بسته ۵۱

۱.۳ تقریب گاوسی توزیع ها ۵۲

۲.۳ تقریب توزیع های پسینی ۵۶

۱.۲.۳ تقریب پسینی توأم ابرپارامترها با راهبرد توری ۵۷

۲.۲.۳ تقریب پسینی کناری ابرپارامترها ۶۲

۳.۲.۳ تقریب پسینی کناری عناصر میدان پنهان ۶۲

۳.۳ ملاک های ارزیابی ۶۸

۱.۳.۳ اندازه های پیشگویی ۶۸

۲.۳.۳ فاصله کولبک-لیبلر ۶۹

۴ تحلیل قیمت مسکن در شهر تهران ۷۴

۱.۴ تعاریف اولیه ۷۶

۲.۴ تحلیل کاوش گرانه داده ها ۸۱

۳.۴ مدل بندی داده ها ۸۲

۴.۴ مقایسهٔ دقت و سرعت دو روش تقریب لاپلاس آشیانی جمع بسته و مونت

کارلوی زنجیر مارکوفی ۹۷

۵.۴ بحث و نتیجه گیری ۱۰۳

الف ۱۱۵

الف.۱ تعیین ماتریس دقت $Q_{[-i,-i]}$ ۱۱۵

الف.۲ تقریب لگاریتم توزیع کناری عناصر میدان پنهان ۱۱۶

لیست اشکال

۸	۱.۲.۱	نمایی از یک گراف ساده
۱۱	۲.۲.۱	زنجیر مارکوفی
۱۱	۳.۲.۱	استقلال شرطی در گراف
۱۲	۴.۲.۱	گراف سودار
۳۰	۵.۵.۱	نقشه مناطق ۲۲ گانه شهر تهران
۳۰	۶.۵.۱	شبکه گراف شهر تهران

۱.۲.۲ نمونه‌های تولید شده از میدان تصادفی مارکوفی گاوسی ناسره ۴۱

۱.۱.۳ نمودار تقریب گاوسی (خط چین) به ازای $y = 3$ ، $\mu = 0$ ، $k = 0/001$ و

الف - $\eta_0 = 0$ ، ب - $\eta_0 = 0/5$ ، ج - $\eta_0 = 1$ و د - $\eta_0 = 1/5$ ۵۴

۲.۲.۳ انتخاب نقاط انتگرال‌گیری با راهبرد توری ۶۰

۳.۲.۳ نمایش ماتریسی معادله تاکاهاشی ۶۴

۴.۳.۳ تقریب توزیع گاما با توزیع نرمال $\mathcal{N}(1/5, 0/25)$ ۷۲

۵.۳.۳ تقریب توزیع گاما با توزیع نرمال $\mathcal{N}(2/5, 0/25)$ ۷۲

۶.۳.۳ تقریب توزیع گاما با توزیع نرمال $\mathcal{N}(3/1, 0/25)$ ۷۲

۱.۲.۴ بافت‌نگار قیمت مسکن، محور افقی در مقیاس 10^9 ۸۱

۲.۲.۴ بافت‌نگار لگاریتم قیمت مسکن ۸۲

- ۳.۳.۴ پهنه‌بندی متوسط قیمت مسکن در مناطق ۲۲ گانه شهر تهران ۸۳
- ۴.۳.۴ اثر متغیر سال ساخت بر قیمت فروش مسکن در مدل ۱ ۸۹
- ۵.۳.۴ بافت‌نگار *PIT* مدل ۱ ۹۰
- ۶.۳.۴ بافت‌نگار *PIT* مدل ۲ ۹۱
- ۷.۳.۴ پهنه‌بندی ساختار فضایی مدل ۳ ۹۲
- ۸.۳.۴ اثر متراژ بر قیمت در مدل ۵ ۹۵
- ۹.۳.۴ پهنه‌بندی ساختار فضایی مدل ۵ ۹۶
- ۱۰.۳.۴ بافت‌نگار مقادیر *PIT* مدل ۵ ۹۷
- ۱۱.۴.۴ اثر متغیر متراژ ۹۹
- ۱۲.۴.۴ پهنه‌بندی ساختار فضایی با روش *INLA* ۱۰۱

۱۳.۴.۴ پهنه‌بندی ساختار فضایی با الگوریتم *MCMC* ۱۰۱

آشنایی با میدان تصادفی مارکوفی گاوسی

۱.۱ مقدمه

تنوع زمینه‌های کاربردی، تقاضای محققان در زمینه‌های مختلف برای دستیابی به نتایج دقیق همراه با محاسباتی سریع، برآزش مدل‌هایی پیچیده‌تر و روش‌های نوین محاسباتی را می‌طلبد. یک فرض اساسی در مدل‌های خطی (LM)، ناپستگی خطاهاست، اما همیشه این فرض برقرار نیست و ممکن است خطاها همبسته باشند. مدل‌های آمیخته خطی تعمیم‌یافته^۱ (GLMM) به‌عنوان تعمیمی از مدل‌های خطی تعمیم‌یافته^۲ (GLM) (مک کلا و نلدر، ۱۹۸۹) یکی از انواع مدل‌ها محسوب می‌شوند که به‌منظور تحلیل داده‌های همبسته ناگاوسی (گسسته) به‌کار می‌روند. در این رده از مدل‌ها همبستگی داده‌ها با افزودن عامل اثرات تصادفی در تحلیل مدل لحاظ می‌شوند. دیگل و همکاران (۱۹۹۸) یک GLMM را در حالتی که ساختار همبستگی داده‌ها از نوع فضایی است، یعنی همبستگی آن‌ها ناشی از

^۱ Generalized Linear Mixed Model

^۲ Generalized Linear Model

موقعیت مکانی داده‌ها در ناحیه تحت مطالعه است به یک GLMM فضایی^۳ (SGLMM)، تعمیم دادند که معمولاً فرض گاوسی بودن این میدان در تحلیل مدل لحاظ می‌شود. باغیشنی (۱۳۸۹) با استفاده از دوروش همسانه‌سازی داده‌ها^۴ و درست‌نمایی مرکب مدل‌های SGLMM را مورد مطالعه و بررسی قرار داد.

مدل‌های رگرسیون جمعی ساختاری^۵ (STAR) که توسط فهرامیر و تاتز (۲۰۰۱) معرفی شدند، تعمیمی از مدل‌های ذکر شده هستند (قلی‌زاده، ۱۳۹۱). مدل‌های گاوسی پنهان که در زمینه‌های مختلف کاربرد دارند، رده گسترده‌ای از مدل‌های رگرسیون جمعی ساختاری هستند که در آن‌ها میانگین متغیر پاسخ y_i ، یعنی $\mu_i = E(y_i)$ ، با یک پیشگوی جمعی ساختاری به صورت

$$\eta_i = \alpha + \sum_{j=1}^{n_f} f^{(j)}(u_{ij}) + \sum_{k=1}^{n_\beta} \beta_k z_{ki}, \quad i = 1, \dots, n$$

از طریق تابع پیوند $g(\cdot)$ به صورت $g(\mu_i) = \eta_i$ مدل‌بندی می‌شود، که در آن β اثرات ثابت خطی از مؤلفه‌های متغیرهای تبیینی $z_i = (z_{1i}, \dots, z_{n_\beta i})$ و بردار متغیرهای تصادفی و پنهان است که خود یا تابعی از آن گاوسی است. در مدل‌های گاوسی پنهان برای پارامترهای α ، $\{f^{(j)}(\cdot)\}$ و $\{\beta_k\}$ توزیع‌های پیشینی گاوسی در نظر گرفته می‌شود. این مدل‌ها عبارتند از:

الف – مدل‌های رگرسیونی، شامل مدل‌های خطی تعمیم‌یافته، مدل‌های اسپلاین تاوانیده (لانگ و برزگر، ۲۰۰۴)، مدل‌های قدم زدن تصادفی (رو و هلند، ۲۰۰۵) و فرایندهای گاوسی (چو و قهرمانی، ۲۰۰۵).

ب – مدل‌های پویا (وست و هریسون، ۱۹۹۷)، مدل‌هایی هستند که همبستگی زمانی مشاهدات از طریق یک متغیر تبیینی وارد مدل می‌شود.

^۳Spatial Generalized Linear Mixed Model

^۴Data Cloning

^۵Structured Additive Regression Model

ج- مدل‌های فضایی یا فضایی-زمانی، مدل‌هایی هستند که همبستگی‌های فضایی یا فضایی-زمانی را از طریق یک متغیر کمکی وارد مدل می‌کنند (بنرجی و همکاران، ۲۰۰۸).

در این پایان‌نامه تحلیل بیز سلسله‌مراتبی مدل‌های گاوسی پنهان فضایی مورد نظر است. روش مرسوم برای تحلیل این مدل‌ها و یافتن کناری پسینی برای عناصر میدان پنهان استفاده از الگوریتم‌های مونت کارلوی زنجیر مارکوفی^۶ (MCMC) است. به دلیل وابستگی بین عناصر میدان پنهان و همبستگی بین عناصر میدان پنهان و بردار ابرپارامتر مخصوصاً زمانی که بعد میدان بزرگ باشد، الگوریتم‌های MCMC به کندی همگرا می‌شوند و این امر موجب افزایش زمان محاسبات می‌گردد. به منظور مرتفع ساختن این مشکل، رو و همکاران (۲۰۰۹) روش تقریب لاپلاس آشیانی جمع‌بسته را معرفی کردند. در این روش تقریب لاپلاس و روش‌های انتگرال‌گیری عددی به طریقی کارا ترکیب می‌شود به طوری که تقریبی دقیق و محاسباتی سریع را جایگزین شبیه‌سازی‌های سنگین می‌کند. مارتینو و همکاران (۲۰۱۱) استنباط بیزی تقریبی مدل‌های بقا^۷ را با استفاده از روش تقریب لاپلاس آشیانی جمع‌بسته مورد مطالعه قرار دادند. یو و رو (۲۰۱۱) ضمن مطالعه مدل‌های آمیخته جمع^۸ استنباط بیزی تقریبی را با دو روش تقریب لاپلاس آشیانی جمع‌بسته و الگوریتم MCMC برای این مدل‌ها انجام داده و نحوه کاربست مفاهیم بیان شده را در تحلیل داده‌های اجاره مسکن شهر مونیخ نشان دادند. مارتینز و رو (۲۰۱۲) روش تقریب لاپلاس آشیانی جمع‌بسته را با اختصاص توزیع پیشینی تقریباً گاوسی^۹ برای برخی از عناصر میدان پنهان، ارتقا دادند. مارتینز و همکاران (۲۰۱۲) با ارائه راهکارهای جدید نحوه محاسبه چگالی‌های پسینی عناصر میدان پنهان را در روش تقریب لاپلاس

Markove Chain Monte Carlo^۶

Survival Model^۷

Additive Mixed Model^۸

Near-Gaussian^۹