بسم الله الرحمن الرحیم

تعهدنامه‌ی اصالت اثر و رعایت حقوق دانشگاه

تمامی حقوق مادی و معنوی مترتب بر نتایج، ابتکارات، اختراعات و نوآوری‌های ناشی از انجام این پژوهش، متعلق به **دانشگاه محقق اردبیلی** می‌باشد. نقل مطلب از این اثر، با رعایت مقررات مربوطه و با ذکر نام دانشگاه محقق اردبیلی، نام استاد راهنما و دانشجو بلامانع است.

اینجانب اعظم شکاری دانش‌آموخته مقطع کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیزدانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه محقق اردبیلی به شماره‌ی دانشجویی ۹۰۲۲۴۰۳۱۲۲ که در تاریخ ۹۲/۰۶/۱۰ از پایان‌نامه‌ی تحصیلی خود تحت عنوان "برخی از برابری ها و نابرابری ها برای قاب ها و g – قابهای پیوسته " دفاع نموده‌ام، متعهد می‌شوم که:

۱) این پایان‌نامه را قبلاً برای دریافت هیچ‌گونه مدرک تحصیلی یا به عنوان هرگونه فعالیت پژوهشی در سایر دانشگاه‌ها و مؤسسات آموزشی و پژوهشی داخل و خارج از کشور ارائه ننموده‌ام.

۲) مسئولیت صحّت و سقم تمامی مندرجات پایان‌نامه‌ی تحصیلی خود را بر عهده می‌گیرم.

۳) این پایان‌نامه، حاصل پژوهش انجام شده توسط اینجانب می‌باشد.

٤) در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران استفاده نموده‌ام، مطابق ضوابط و مقرّرات مربوطه و با رعایت اصل امانتداری علمی، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در متن و فهرست منابع و مآخذ ذکر نموده‌ام.

۵) چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده یا هر گونه بهره‌برداری اعم از نشر کتاب، ثبت اختراع و ... از این پایان‌نامه را داشته باشم، از حوزه‌ی معاونت پژوهشی و فنّاوری دانشگاه محقق اردبیلی، مجوزهای لازم را اخذ نمایم.

٦) در صورت ارائه‌ی مقاله‌ی مستخرج از این پایان‌نامه در همایش‌ها، کنفرانس‌ها، سمینارها، گردهمایی‌ها و انواع مجلات، نام دانشگاه محقق اردبیلی را در کنار نام نویسندگان (دانشجو و اساتید راهنما و مشاور) ذکر نمایم.

۷) چنانچه در هر مقطع زمانی، خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن (منجمله ابطال مدرک تحصیلی، طرح شکایت توسط دانشگاه و ...) را می‌پذیرم و دانشگاه محقق اردبیلی را مجاز می‌دانم با اینجانب مطابق ضوابط و مقرّرات مربوطه رفتار نماید.

نام و نام خانوادگی دانشجو: اعظم شکاری

امضا

تاریخ

دانشکده‌ی علوم ریاضی
گروه ریاضیات و کاربردها

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان:

برخی از برابری‌ها و نابرابری‌ها برای قاب‌ها $g-$ قاب‌های پیوسته

استاد راهنما:

دکتر محمد رضا عبداله پور

استاد مشاور:

دکتر عباس نجاتی

پژوهشگر:

اعظم شکاری

شهریور ۱۳۹۲

۱۳۵۷
دانشگاه محقق اردبیلی

دانشکده‌ی علوم ریاضی

گروه آموزشی ریاضی و کاربردها

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد
در رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان:

برخی از برابری ها و نابرابری ها برای قاب ها و g-قاب های پیوسته

پژوهشگر:

اعظم شکاری

ارزیابی و تصویب شده‌ی کمیته‌ی داوران پایان‌نامه با درجه‌ی خوب

نام و نام خانوادگی	مرتبه‌ی علمی	سمت	امضاء
محمدرضا عبداله پور	استادیار	استاد راهنما و رییس کمیته‌ی داوران	
عباس نجاتی	دانشیار	استاد مشاور	
کاظم حق نژاد آذر	استادیار	داور	

شهریور ۱۳۹۲

تقدیم به عزیز از دست رفته........

که رفت تا بداند آن سوی، هستی قصه چیست!

و تقدیم به مادر مهربانم:

کوه استواری که عظمت قله اش چشمانم را خیره می کند

سپاس گزاری...

مهربانا، تو در کویر بی‌آب و گیاه زندگی، چشمه‌ی آبی، و در بیابان خشک و طاقت‌فرسا، نسیمی خنک و جان‌بخش. تو چراغ شب تار یتیمی و دستگیر درماندگان و سیاه‌روزان، دستم بگیر و از ظلمت و گمراهی نجاتم ده.
اکنون که در سایه الطاف الهی و استعانت پروردگار متعال پژوهش و نگارش این رساله به اتمام رسید، بر خویشتن واجب می‌دانم که مراتب شکر و قدردانی خود را به تمامی خوبانی که در این امر یاریم نمودند به جای آورم.
از استاد صبور و مهربانم که با راهنمایی‌ها و کمک‌های دلسوزانه‌شان همواره امید و کوشش را در من زنده کرده‌اند نهایت سپاس و قدردانی را دارم، هرچند یقین دارم که خداوند متعال خود پاداش زحمات ایشان را به بهترین نحو عطا خواهد کرد.
از مادر مهربان و فداکارم که در تمام لحظات زندگانیم همچون کوهی استوار، امکان هرگونه هراس در پیچ و تاب بی‌رحم زندگی را از من دور گردانیده و خوب بودن و نیک عمل کردن را به من آموخته بی‌نهایت سپاسگذار بوده و دستان پر مهرش را بوسه میزنم.
از تمام برادران و خواهر عزیزم و خانواده خوبم بابت بودنشان صمیمانه سپاسگذاری می‌کنم و قدردان مهربانیهایشان هستم.
از استاد مشاور محترم، جناب آقای دکتر نجاتی نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

اعظم شکاری
شهریور ۱۳۹۲

نام خانوادگی: شکاری نام: اعظم

عنوان پایان‌نامه:

برخی از برابری‌ها و نابرابری‌ها برای قاب‌ها و gـ قاب‌های پیوسته

استاد راهنما: دکتر محمدرضا عبداله‌پور

استاد مشاور: دکتر عباس نجاتی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد

رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز

دانشگاه: محقق‌اردبیلی دانشکده: علوم ریاضی

تاریخ دفاع: ۹۲/۰۶/۱۰ تعداد صفحات: ۷۲

چکیده

در این پایان‌نامه، برخی از برابری‌ها و نابرابری‌ها را برای قاب‌ها و قاب‌های دوگان در فضای هیلبرت معرفی می‌کنیم. همچنین، اندیس بالایی و پایینی را برای قاب معرفی کرده و خواص آنها را بررسی می‌کنیم. از طرف دیگر، برخی از برابری‌ها و نابرابری‌ها را برای gـ قاب‌های پیوسته به دست می‌آوریم. نهایتا، نتایجی را درباره‌ی پایداری gـ قاب‌های پیوسته تحت آشفتگی بدست می‌آوریم.

کلیدواژه‌ها: اختلال، اتحاد، قاب دوگان، قاب، قاب پارسوال، gـ قاب پیوسته.

فهرست مطالب

مقدمه

مفهوم قاب‌های گسسته برای فضای هیلبرت[۱]، برای اولین بار توسط دافین[۲] و شیفر[۳] (۱۹۵۲) برای مطالعه‌ی مسائلی در زمینه‌ی سریهای فوریه‌ی[۴] غیرهارمونیک تعریف شده است.

قاب‌ها در سال ۱۹۸۶، توسط دابیشیز[۵] و همکارانش مجددا مورد مطالعه قرار گرفتند. دابیشیز قاب‌ها را برای فضای $L^{2}(\mathbb{R})$، بر پایه‌ی یک زمان - فرکانس یا انتقال زمان توابع در نظر می‌گیرد.

قاب‌ها به دلیل خاصیت انعطاف‌پذیری به کوانتیزه شدن در فرایند سیگنال (گویال[۶] و همکاران، ۱۹۹۸)، خاصیت ارتجاعی در حذف صدای اضافی و پایداری عددی در بازسازی (دابیشیز، ۱۹۹۲) و آزادی بیشتر در بدست آوردن ویژگی‌های یک سیگنال (بنیدتو[۷]، کولئلا[۸]، ۱۹۹۵؛ بنیدتو، پی فاندر[۹]، ۱۹۹۸) نقش مهمی ایفا می‌کنند. همچنین قاب‌ها در نظریه‌ی نمونه‌گیری (بنیدتو، هلر[۱۰]، ۱۹۹۰)، بازسازی کامل چند بار نمونه‌گیری شده‌ی فیلتر بانک[۱۱] (سوتکویچ[۱۲]، وترلی[۱۳]، ۱۹۹۸)، مدل‌سازی دستگاه (دودی[۱۴]، پارتینگتون[۱۵]، ۱۹۹۸) شبکه‌های عصبی (کاندش[۱۶] ، ۱۹۹۹)، پردازش تصویر

[۱] Hilbert
[۲] Duffin
[۳] Schaeffer
[۴] Fourier
[۵] Daubechies
[۶] Goyal
[۷] Benedetto
[۸] Colella
[۹] Pfander
[۱۰] Heller
[۱۱] Filter banks
[۱۲] Cvetkovi
[۱۳] Vetterli
[۱۴] Dudey
[۱۵] Partington
[۱۶] Cands

(چان[1] و همکاران، ۲۰۰۴)، اندازه‌گیری‌های کوانتوم (الدار[2]، فورنی[3]، ۲۰۰۲)، کدگذاری و ارتباطات (هولمز[4]، پائلسن[5]، ۲۰۰۴؛ استروهمر[6]، هیت[7]، ۲۰۰۳) و مواردی دیگر استفاده شده‌اند.

بالان و همکارانش (۲۰۰۷) درباره‌ی ساختار قاب‌های پارسوال[8] بحث کردند که بعد از آنها گاوروتا[9] (۲۰۰۶) برخی نامساوی‌های قاب‌های گسسته را به این قاب‌ها تعمیم داد.

بعد از آن، مفهوم قاب‌های گسسته توسط کایسر [10] (۱۹۹۴) و مستقلا علی و همکارانش (علی و همکاران، ۱۹۹۳؛ علی و همکاران، ۲۰۰۰)، به یک خانواده‌ی اندیس‌گذاری شده بوسیله‌ی یک فضای موضعا فشرده‌ی دارای متر رادون [11] تعمیم پیدا کردند و بدین ترتیب به مفهوم قاب‌های پیوسته هدایت شدند.

قاب‌های پیوسته به طور وسیع در تبدیل موجک پیوسته (علی و همکاران، ۲۰۰۰؛ گراسمن[12] و همکاران، ۱۹۸۶) و تبدیل کوتاه مدت فوریه (گروچنیگ[13]، ۲۰۰۱) استفاده شده‌اند.

توجه داریم که قاب‌های پیوسته، قاب‌های مرتبط با فضاهای اندازه‌پذیر (گاباردو[14]، هان[15]، ۲۰۰۳)، قاب‌های تعمیم‌یافته (اصغری همت و همکاران، ۲۰۰۰) و حالت همدوس (علی و همکاران، ۲۰۰۰) نیز نامیده می‌شوند.

سان[16] (۲۰۰۶، ۲۰۰۷)، مفهوم g - قاب‌ها در فضای هیلبرت را معرفی کرد و نشان داد که این قاب‌ها به عنوان تعمیمی از قاب‌های گسسته، دارای شباهت‌ها و تفاوت‌هایی با یکدیگر می‌باشد. از جمله شباهت‌های آنها این است که عملگر ترکیب هر دوی آنها کراندار می‌باشد و یک تفاوت عمده‌ی آنها در این است که اعضای قاب‌های گسسته، بردار می‌باشند

[1] Chan
[2] Eldar
[3] Forney
[4] Holmes
[5] Paulsen
[6] Strohmer
[7] Heath
[8] Parseval
[9] Găvruta
[10] Kaiser
[11] Radon
[12] Grossmann
[13] Grchenig
[14] Gabardo
[15] Han
[16] Sun

ولی عناصر g - قاب‌ها، عملگر هستند.

مفهوم g - قاب‌های پیوسته، نخستین بار توسط عبداله‌پور و فاروقی (۲۰۰۸) و مستقلا توسط دهقان و حسن‌خانی فرد (۲۰۰۸) معرفی شدند که توسیعی از g - قاب‌ها و قاب‌های پیوسته می‌باشند.

این پایان نامه بر اساس مقالات (گاوروتا، ۲۰۰۶؛ خیائو[۱]، زنگ[۲]، ۲۰۱۰) در چهار فصل به صورت زیر تدوین شده است:

در فصل اول تعاریف و مفاهیم مقدماتی را یادآوری می‌کنیم که در فصل‌های بعدی استفاده خواهند شد.

در فصل دوم برخی از برابری‌ها و نابرابری‌های قاب‌ها در فضاهای هیلبرت را مطرح می‌کنیم.

در فصل سوم خواص g ـ قاب‌های پیوسته را مطالعه می‌کنیم.

در فصل چهارم برخی از برابری‌ها و نابرابری‌های g ـ قاب‌های پیوسته را بررسی می‌کنیم.

[۱] Xiao
[۲] Zeng

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف مقدماتی

۱.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم $\mathbb{F}$ یک میدان باشد. مجموعه‌ی X را یک فضای برداری روی $\mathbb{F}$ می‌نامند هرگاه برای هر $(x,y) \in X \times X$ ، یک بردار مانند $x+y \in X$ نظیر شود که دارای خواص زیر باشد

(۱) به ازای هر $x,y \in X$ ، $x+y=y+x$ ؛

(۲) به ازای هر $x,y,z \in X$ ، $x+(y+z)=(x+y)+z$ ؛

(۳) به ازای هر $x \in X$ ، وجود دارد عضو یکتایی مانند $۰ \in X$ به‌طوری‌که

$$x+۰=۰+x=x ؛$$

(۴) به ازای هر $x \in X$ ، وجود دارد عضو یکتایی مانند $-x \in X$ به‌طوری‌که

$$x+(-x)=(-x)+x=۰ ؛$$

(۵) به هر زوج (α,x) که در آن $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{F}$ ، بردار $\alpha x \in X$ نظیر می‌شود به‌طوری‌که $۱.x = x$ و $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$ و دو قانون پخش‌پذیری زیر به ازای هر $x,y \in X$ و $\alpha,\beta \in \mathbb{F}$ برقرار باشد.

$$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y \quad , \quad (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x.$$

اگر $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ ، X را فضای برداری مختلط، و اگر $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ ، X را فضای برداری حقیقی گوییم.

مثال ۱.۱.۱. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^k$ ، نمونه‌ای از یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی می‌باشد.

نگاشت Λ از فضای برداری X به فضای برداری Y را خطی می نامیم، هرگاه

$$\Lambda(\alpha x+\beta y)=\alpha\Lambda x+\beta\Lambda y, \quad \forall x,y \in X, \forall \alpha,\beta \in \mathbb{F}.$$

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری حقیقی یا مختلط باشد. یک نرم روی X ، نگاشتی مانند $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ است که دارای خواص زیر باشد

(۱) به ازای هر $x,y \in X$ ، $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$ ؛

(۲) به ازای هر $x \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{F}$ ، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ ؛

(۳) به ازای هر $x \in X$ ، $\|x\| \geqslant ۰$ و $\|x\| = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$.

اگر $\|.\|$ یک نرم روی X باشد، آنگاه $(X, \|.\|)$ را یک فضای نرمدار می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه‌ی غیرخالی باشد، نگاشت $d : X \times X \to \mathbb{R}$ را یک متر روی X می‌نامیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشند

(۱) به ازای هر $x, y \in X$ ، $۰ \leqslant d(x, y) < \infty$ و $d(x, y) = ۰$ اگر وتنها اگر $x = y$ ؛

(۲) به ازای هر $x, y \in X$ ، $d(x, y) = d(y, x)$ ؛

(۳) به ازای هر $x, y, z \in X$ ، $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

اگر d یک متر بر X باشد، (X, d) را یک فضای متری می‌نامیم.

مثال ۲.۱.۱. اگر X یک فضای برداری باشد و به ازای هر $x, y \in X$ ، قرار دهیم $d(x, y) = \|x - y\|$ ، در این صورت d یک متر روی X خواهد بود. لذا هر فضای نرمدار یک فضای متریک است. d را متر تولید شده توسط نرم می‌نامیم.

تعریف ۴.۱.۱. فضای نرمدار X را یک فضای باناخ[۱] گوییم هرگاه X نسبت به متر تولید شده توسط نرم، یک فضای کامل باشد. یعنی هر دنباله‌ی کشی در آن همگرا باشد.

مثال ۳.۱.۱. فرض کنید $۱ \leqslant p < \infty$. در این صورت فضای

$$\ell^p = \Big\{ \{x_i\}_{i=۱}^{\infty} \subseteq \mathbb{C} : \Big(\sum_{i=۱}^{\infty} |x_i|^p \Big)^{۱/p} < \infty \Big\}$$

با جمع و ضرب اسکالر مؤلفه‌وار، یک فضای باناخ است.

تعریف ۵.۱.۱. اگر X یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط باشد، یک ضرب داخلی روی X ، تابعی است مانند $\varphi : X \times X \to \mathbb{C}$ با ضابطه‌ی $\varphi(x, y) = \langle x, y \rangle$ ، که دارای خواص زیر است

[۱] Banach

(۱) به ازای هر $x, y \in X$ ، $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ ؛

(۲) به ازای هر $x, y, z \in X$ ، $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ ؛

(۳) به ازای هر $x \in X$ ، $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ و $\langle x, x\rangle = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$ ؛

(۴) به ازای هر $x \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$ ، $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$.

اگر $\langle .,.\rangle$ یک ضرب داخلی بر X باشد، آنگاه $(X, \langle .,.\rangle)$ را یک فضای ضرب داخلی می‌نامیم.

در فضای ضرب داخلی $(X, \langle .,.\rangle)$ ، می‌توان یک نرم برای هر $x \in X$ به صورت $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ تعریف کرد.

تعریف ۶.۱.۱. هرگاه فضای ضرب داخلی X، با نرم حاصل از ضرب داخلی، فضای نرمدار کامل باشد، یعنی هر دنباله‌ی کشی در آن همگرا گردد، آنگاه X را یک فضای هیلبرت می‌نامیم.

مثال ۴.۱.۱. فضای برداری $\mathbb{R}^n$ ، همراه با ضرب داخلی زیر یک فضای هیلبرت روی $\mathbb{R}$ می‌باشد.

$$A.B = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i\,, \qquad A = (a_1, ..., a_n), B = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n.$$

گزاره ۱.۱.۱. (رودین[1]، ۱۹۷۳، قضیه ۲.۱۲) هرگاه $\mathcal{H}$ یک فضای ضرب داخلی باشد و $x, y \in \mathcal{H}$ ، در این صورت

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|.\|y\| \tag{۱.۱}$$

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|. \tag{۲.۱}$$

نامساوی اول به نامساوی کشی ـ شوارتز[2] و نامساوی دوم به نامساوی مثلثی معروف است.

گزاره ۲.۱.۱. (رودین، ۱۹۸۶، قضیه ۱۲.۴) فرض کنید L یک تابعک خطی پیوسته روی $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه $y \in \mathcal{H}$ منحصر بفردی وجود دارد به‌طوری‌که

$$Lx = \langle x, y\rangle, \qquad x \in \mathcal{H}.$$

[1] Rudin
[2] Cauchy - schwartz

تعریف ۷.۱.۱. اگر $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد، خانواده‌ی $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ در $\mathcal{H}$، متعامد یکه نامیده می‌شود هرگاه $\langle u_\alpha, u_\beta\rangle = ۱$ وقتی $\alpha=\beta$ و $\langle u_\alpha, u_\beta\rangle = ۰$ وقتی $\alpha\neq\beta$.

تعریف ۸.۱.۱. در یک فضای هیلبرت، مجموعه‌ی متعامد یکه‌ی ماکزیمال را یک پایه‌ی متعامد یکه می‌نامیم.

گزاره ۳.۱.۱. (کریستنسن[۱]، ۲۰۰۳، قضیه ۲.۴.۳) فرض کنید $\{e_i\}_{i=۱}^{\infty}$ یک دنباله در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. دراین صورت شرایط زیر معادلند.

(۱) $\{e_i\}_{i=۱}^{\infty}$ یک پایه‌ی متعامد یکه برای $\mathcal{H}$ است؛

(۲) به ازای هر $x\in\mathcal{H}$، $x=\sum_{i=۱}^{\infty}\langle x, e_i\rangle e_i$ ؛

(۳) به ازای هر $x\in\mathcal{H}$، $\|x\|^۲=\sum_{i=۱}^{\infty}|\langle x, e_i\rangle|^۲$؛

(۴) $\overline{span}\{e_i\}_{i=۱}^{\infty}=\mathcal{H}$.

۲.۱ عملگرهای کراندار روی فضاهای هیلبرت

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ دو فضای هیلبرت باشند. برای عملگر $T:\mathcal{H}\to\mathcal{K}$ ، نرم T را با $\| T \|$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\| T \| = \sup\{\| T(x) \|:\ x\in\mathcal{H},\ \| x \| \leqslant ۱\}.$$

اگر $\| T \| < \infty$ ، آنگاه T را کراندار می‌نامیم.

تعریف ۲.۲.۱. مجموعه‌ی تمام عملگرهای خطی و کراندار از $\mathcal{H}$ به $\mathcal{K}$ را با $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ نمایش می‌دهیم. همچنین $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})$ را با $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ نمایش خواهیم داد.

تعریف ۳.۲.۱. اگر $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ آنگاه عملگر $T^*\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ که در شرط زیر صدق می‌کند

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle, \qquad x,y\in\mathcal{H},$$

[۱] Christensen

عملگر الحاقی T نامیده می‌شود.

در (رودین، ۱۹۷۳) ثابت شده است که اگر $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$، آنگاه $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ موجود و منحصر به فرد است و $\|T\| = \|T^*\|$.

تعریف ۴.۲.۱. عملگر $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ خود الحاق نامیده می‌شود هرگاه $T^* = T$.

تعریف ۵.۲.۱. عملگر $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ مثبت نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $x \in \mathcal{H}$ ، داشته باشیم $\langle Tx, x\rangle \geqslant 0$ و به صورت $T \geqslant 0$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۱.۲.۱. (رودین، ۱۹۷۳، قضیه ۳۳.۱۲) فرض کنید $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ و $T \geqslant 0$. در آنصورت عملگر مثبت و یکتایی مانند $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ وجود دارد به‌طوری‌که $S^2 = T$.

اگر T مثبت و وارون‌پذیر باشد، آنگاه ریشه‌ی دوم آن یعنی S نیز مثبت و وارون‌پذیر است.

تعریف ۶.۲.۱. عملگر $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ نرمال نامیده می‌شود هرگاه $TT^* = T^*T$

گزاره ۲.۲.۱. (کریستنسن، ۲۰۰۸، لم ۴.۳.۲) به ازای هر $x \in \mathcal{H}$ ،

$$\|x\| = \sup_{y\in\mathcal{H}, \|y\|=1} |\langle x, y\rangle|.$$

گزاره ۳.۲.۱. (رودین، ۱۹۷۳، قضیه ۲۵.۱۲) فرض کنیم $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ عملگری نرمال باشد، آنگاه

$$\|T\| = \sup\{\ |\langle Tx, x\rangle| :\ x \in X,\ \|x\| \leqslant 1\}.$$

گزاره ۴.۲.۱. (کانوی[1]، ۱۹۹۰، قضیه ۶.۲) اگر $S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ، آنگاه

(۱) $(S+T)^* = S^* + T^*$ ؛

(۲) $(TS)^* = S^*T^*$ ؛

(۳) به ازای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ ، $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$ ؛

(۴) $(T^*)^* = T$.

[1] Conway

گزاره ۵.۲.۱. (بالان و همکاران، ۲۰۰۷، گزاره ۲.۲) اگر S و T عملگرهایی روی $\mathcal{H}$ باشند به طوریکه $S+T=I$، آنگاه

$$S-T=S^{۲}-T^{۲}.$$

اثبات.

$$\begin{aligned} S-T=S-(I-S)&=۲S-I\\ &=S^{۲}-(I-۲S+S^{۲})\\ &=S^{۲}-(I-S)^{۲}\\ &=S^{۲}-T^{۲}. \end{aligned}$$

□

گزاره ۶.۲.۱. (رودین، ۱۹۷۳، قضیه ۷.۱۲) اگر $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ و به ازای هر $x\in\mathcal{H}$ داشته باشیم

$$\langle Tx,x\rangle=۰,\qquad x\in\mathcal{H},$$

آنگاه $T=۰$.

گزاره ۷.۲.۱. (رودین، ۱۹۷۳، نتیجه ۷.۱۲) اگر S و T عملگرهایی در $\mathcal{H}$ باشند و به ازای هر $x\in\mathcal{H}$ داشته باشیم

$$\langle Sx,x\rangle=\langle Tx,x\rangle,$$

آنگاه $S=T$.

گزاره ۸.۲.۱. (کریستنسن، ۲۰۰۸، قضیه ۲.۴.۲) فرض کنید $T_۱,T_۲,T_۳\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$، عملگرهای خودالحاقی باشند. فرض کنید $T_۱\leqslant T_۲$ و $T_۳\geqslant ۰$ و $T_۳$ با $T_۱$ و $T_۲$ جابجا شود، آنگاه $T_۱T_۳\leqslant T_۲T_۳$.

گزاره ۹.۲.۱. (کریستنسن، ۲۰۰۸، نتیجه ۳.۲.۲) فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. اگر $U : X \to X$ کراندار بوده و $\|I - U\| < ۱$ ، آنگاه U وارون‌پذیر است و

$$U^{-۱} = \sum_{k=۰}^{\infty} (۱ - U)^k.$$

گزاره ۱۰.۲.۱. (دینگ[1]، ۲۰۰۳) اگر X یک فضای باناخ باشد و $\lambda_۱, \lambda_۲ \in (-۱, ۱)$ و $T : X \to X$ عملگری خطی باشد که در شرط زیر صدق کند

$$\|x - Tx\| \leqslant \lambda_۱ \|x\| + \lambda_۲ \|Tx\|, \qquad \forall x \in X$$

آنگاه T کراندار و وارون‌پذیر است و برای هر $x \in X$

$$\frac{۱ - \lambda_۱}{۱ + \lambda_۲} \|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant \frac{۱ + \lambda_۱}{۱ - \lambda_۲} \|x\|, \tag{۳.۱}$$

و

$$\frac{۱ - \lambda_۲}{۱ + \lambda_۱} \|x\| \leqslant \|T^{-۱} x\| \leqslant \frac{۱ + \lambda_۲}{۱ - \lambda_۱} \|x\|. \tag{۴.۱}$$

۳.۱ فضاهای اندازه‌پذیر

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید X یک مجموعه‌ی غیرخالی باشد، $\tau \subseteq P(X)$ را یک توپولوژی برای X می‌نامیم هرگاه

(۱) $X, \varnothing \in \tau$ ؛

(۲) اگر برای $i = ۱, ۲, \ldots, n$ ، $V_i \in \tau$ ، آنگاه $V_۱ \cap V_۲ \cap \ldots \cap V_n \in \tau$ ؛

(۳) اگر $\{V_\alpha\}$ خانواده‌ی دلخواهی از اعضای τ باشد (متناهی، شمارش‌پذیر یا ناشمارا)، آنگاه $\bigcup_\alpha V_\alpha \in \tau$.

اگر τ یک توپولوژی بر X باشد، آنگاه (X, τ) را یک فضای توپولوژیک می‌نامیم. عناصر τ مجموعه‌های باز نامیده می‌شوند.

[1] Ding

تعریف ۲.۳.۱. اگر τ یک توپولوژی روی X باشد و $x \in v \in \tau$ ، آنگاه v را یک همسایگی x می‌نامیم. $F \subseteq X$ را بسته می‌نامیم هرگاه $F^c \in \tau$. اگر $A \subseteq X$ ، آنگاه بستار A را اشتراک تمام مجموعه‌های بسته شامل A تعریف کرده و با نماد $\overline{A}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۳.۱. توپولوژی τ بر X را هاسدورف[۱] گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$ ، وجود داشته باشد همسایگی A از x و همسایگی B از y ، بطوریکه $A \cap B = \varnothing$.

هر فضای متریک یک فضای هاسدورف است.

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنیم X یک مجموعه‌ی غیرخالی باشد، $\mathbb{M} \subseteq P(X)$ را یک σ- جبر در X گوییم هرگاه

(۱) $X \in \mathbb{M}$ ؛

(۲) اگر $A \in \mathbb{M}$ ، آنگاه $A^c \in \mathbb{M}$ ؛

(۳) اگر $A = \bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n$ برای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$ و $A_n \in \mathbb{M}$ آنگاه $A \in \mathbb{M}$.

اگر $\mathbb{M}$ یک σ- جبر بر X باشد، آنگاه $(X, \mathbb{M})$ را یک فضای اندازه‌پذیر و اعضای $\mathbb{M}$ را مجموعه‌های اندازه‌پذیر در X می‌نامیم.

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنید $(X, \mathbb{M})$ یک فضای اندازه‌پذیر و Y یک فضای توپولوژیک باشد، تابع $f : (X, \mathbb{M}) \to Y$ را اندازه‌پذیر گوییم هرگاه به ازای هر زیرمجموعه‌ی باز G در Y ، $f^{-۱}(G)$ عضوی از $\mathbb{M}$ باشد.

گزاره ۱.۳.۱. (رودین، ۱۹۸۶، قضیه ۱۰.۱) فرض کنیم X یک مجموعه و $F \subseteq P(X)$. آنگاه کوچکترین σ- جبر حاوی F وجود دارد. یعنی کوچکترین σ- جبر مانند $\mathbb{M}^*$ وجود دارد به‌طوری‌که $F \subseteq \mathbb{M}^*$.

تعریف ۶.۳.۱. فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک باشد. چون $\tau \subseteq P(X)$ ، بنا بر گزاره‌ی ۶.۳.۱، کوچکترین σ- جبر حاوی τ وجود دارد. این σ- جبر را σ- جبر بورل و اعضای آن را مجموعه‌های بورل در X می‌نامیم.

تعریف ۷.۳.۱. تابع $s : X \to [۰, \infty)$ را یک تابع ساده‌ی مثبت گوییم، هرگاه برد آن مجموعه‌ی متناهی باشد.

[۱] Hausdorff