دانشکده علوم، گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی — آنالیز عددی

موضوع:

حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی از مرتبه کسری

نگارش:

مهرداد زندی

استاد راهنما:

آقای دکتر عظیم امین عطایی

استاد مشاور:

آقای دکتر علی ذاکری

شهریور ۱۳۸۹

اظهارنامه دانشجو

موضوع پا یان نامه: حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی از مرتبه کسری .

استاد راهنما: آقای دکترعظیم امین عطایی .

نام دانشجو: مهرداد زندی .

شماره دانشجویی: ۸۷۰۴۸۳۴.

اینجانب مهرداد زندی دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشکده علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارائه شده در این پایان‌نامه توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش شده مورد تأیید می‌باشد و در مورد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده است. همچنین گواهی می‌نمایم که مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگری در هیچ جا ارائه نشده است و در تدوین متن پایان‌نامه آئین نامه مصوب دانشگاه را به طور کامل رعایت کرده‌ام.

امضاء دانشجو:

تاریخ:

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتایج

تشکر و قدردانی

شکر خداوند متعال را به جای آورده که توفیق نصیب من کرد تا این پایان‌نامه را به پایان برسانم. نگارنده بر خود فرض می‌داند که از زحمات بی‌دریغ، تلاش‌های بی‌وقفه و راهنمایی‌های ارزشمند استاد گرامی جناب آقای دکتر عظیم امین عطایی در راستای انجام این پروژه در طول این مدت تشکر و قدردانی نماید. از آقایان دکتر احمد گل بابایی (داور خارجی)، دکتر سید مقتدی هاشمی پرست (داور داخلی) و دکتر علی ذاکری (استاد مشاور)، نیز به جهت خواندن این رساله و پیشنهادات ارزنده‌شان تشکر می‌کنم.

در پایان از کلیه کسانی که در طول دورهٔ کارشناسی ارشد و نیز دورهٔ کارشناسی راهنمای علمی اینجانب بوده‌اند و مرا در این راه یاری کرده‌اند صمیمانه تشکر می‌نمایم، بخصوص از پدر و مادر دلسوزم که در جهت تحصیل اینجانب از هیچ کوششی دریغ نورزیدند و همواره مشوق من بودند تشکر و قدردانی می‌نمایم و امیدوارم با تقدیم این رساله به آنها توانسته باشم قسمت کوچکی از زحمات آنها را پاسخ دهم.

چکیده رساله

محاسبات کسری در چند سال اخیر بازتاب خوبی در علوم و مهندسی داشته است و کارهای قابل ملاحظه ای در زمینه کاربردها و حل عددی معادلات شامل مشتق از مرتبه کسری انجام شده است.
از جمله این معادلات، معادلات دیفرانسیل جزئی از مرتبه کسری می باشد که در زمینه مکانیک، viscoelasticity، زیست شناسی، فیزیک و ... دارای کاربردهای زیادی می باشند.
در این پایان نامه سعی بر آن است که‌علاوه بر ذکر تاریخچه مختصری از محاسبات کسری، دو روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی از مرتبه کسری مورد بررسی قرار می‌گیرند.سپس به بررسی و تحلیل همگرایی پرداخته ودر آخر دو مثال با استفاده از این روش ها حل شده است.

منابع اصلی مطالعات و عملیات تحقیقاتی در این پایان نامه مبتنی بر [٦] و [٧] و [٢١] می باشد.

مقدمه:

در پایان نامه حاضر از روش تکرار تغییراتی [1] و روش تجزیه آدومیان [2] برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی از مرتبه کسری استفاده شده است. در حل این معادلات با استفاده از روش تکرار تغییراتی نیازی به خطی سازی، اختلال یا فرض های محدود کننده نمی باشد و جوابهای بدست آمده از به کار بردن این روش به صورت دنباله ای همگرا می‌باشند و روش تجزیه آدومیان به صورت جملاتی از سری همگرا با جملاتی قابل محاسبه می باشند.

روش تکرار تغییراتی اصلاح شده[3] مورد استفاده، تصحیحی از روش تکرار تغییراتی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی از مرتبه کسری می باشد.

این پایان نامه در ۵ فصل به شرح زیر تنظیم شده است.

فصل اول به ارائه برخی مفاهیم اولیه و تعاریف مورد نیاز برای فصلهای آتی می پردازد.

در فصل دوم به ارائه توضیح مختصری در مورد تاریخچه پیدایش محاسبات کسری و انواع خاصی از مشتق و انتگرال کسری می پردازیم.

فصل سوم را به ارائه و توصیف روش تکرار تغییراتی به همراه آنالیز همگرایی این روش اختصاص داده‌ایم. همچنین توصیف روش تکرار تغییراتی اصلاح شده و آنالیز همگرایی آن نیز در این فصل به طور مشروح آمده است.

در فصل چهارم به ارائه توصیف روش تجزیه آدومیان و آنالیز همگرایی آن می پردازیم.

درآخر در فصل پنجم به ارائه دو مثال و حل آنها توسط روش های توصیف شده در فصل های قبل و مقایسه عددی جواب های بدست آمده به ازای مراتب کسری مختلف می پردازیم .

---

[1] Variational Iteration

[2] Adomian decomposition

[3] Modified Variational iteration

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف اولیه

۱.۱ فضاهای توپولوژیک

۱.۱.۱ فضای باناخ

تعریف ۱.۱ : فضای خطی

مجموعه X همراه باعمل جمع برداری تعریف شده از $X \times X$ به X به‌صورت $(x,y) \longrightarrow x+y$ و عمل ضرب اسکالر تعریف شده از $F \times X$ به X به صورت $(\alpha,x) \longrightarrow \alpha x$ که در شرایط زیر صدق کند را فضای خطی یا فضای برداری روی میدان F گویند.

برای هر $x,y,z \in X$ و $\alpha,\beta \in F$ داریم

۱) $(x+y)+z = x+(y+z)$

۲) $x+y = y+x$

۳) بردار صفر در X وجود دارد که $x+\circ = x$

۴) برای هر $x \in X$ عنصر $-x \in X$ وجود دارد به نام معکوس جمعی از X که $x+(-x) = \circ$

۵) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

٦) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

۷) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

۸) $1.x = x$

تعریف ۲.۱ : فضای خطی نرم دار

فرض کنیم N یک فضای خطی حقیقی یا مختلط باشد. نرم روی N، تابعی است به صورت $\| . \| : N \to \mathbb{R}$ که به ازای هر $x,y \in N$ و $\alpha \in \mathbb{C}(or \mathbb{R})$ داریم

۱) $\| x \| \geq \circ \quad , \quad \| x \| = \circ \quad \Leftrightarrow \quad x = \circ$

۲) $\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$

۳) $\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$

فضای خطی با نرم $\| . \|$ تعریف شده روی آن را فضای خطی نرم دار گویند.

تعریف ۳.۱ : فضای خطی نرم دار کامل

فضای خطی نرم دار N را کامل گوییم اگر هر دنباله کشی در N همگرا به عنصری از N باشد. یعنی اگر $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in N$ و $\| x_m - x_n \| \to 0$ چنانچه $m, n \to \infty$ که $m \geq n$ آنگاه $x \in N$ وجود دارد که $\| x_n - x \| \to 0$ هرگاه $n \to \infty$

با توجه به تعاریف قبل:

یک فضای خطی نرم دار کامل را فضای باناخ می‌گوییم.

بعنوان مثال فضای همه‌ی توابع پیوسته بر روی بازه‌ی $[a, b]$ که با $C[a, b]$ نمایش داده می‌شود نسبت به نرم ماکسیمم زیر یک فضای باناخ می‌باشد.

$$\|f - g\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$$

۲.۱.۱ فضای هیلبرت

تعریف ۴.۱ : فضای ضرب داخلی

فرض کنیم X فضای خطی بر میدان مختلط $\mathbb{C}$ باشد. ضرب داخلی روی X، تابعی است از $X \times X$ به $\mathbb{C}$ که در شرایط زیر صدق می‌کند،

برای هر $\alpha, \ \beta \in \mathbb{C}; x, \ y, \ z \in X$ داریم

۱) $(\alpha x + \beta y, \ z) = \alpha(x, \ z) + \beta(y, \ z)$

۲) $\overline{(x, \ y)} = (y, \ x)$

۳) $(x, \ x) \geq 0, \ (x, \ x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

فضای ضرب داخلی مختلط X یک فضای خطی بر $C(R)$ با ضرب داخلی تعریف شده روی آن می‌باشد.

تعریف ۵.۱ :

فضای ضرب داخلی کامل:

فضای ضرب داخلی را کامل گوییم هرگاه هر دنباله کشی در آن فضا با متریک ایجاد شده توسط ضرب داخلی به عنصری از آن فضا همگرا باشد.

با توجه به تعاریف قبل :

فضای ضرب داخلی کامل را فضای هیلبرت گوییم.

به عنوان مثال $L^2[a,b]$ یک فضای هیلبرت است که در آن ضرب داخلی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$(u,v)=\int_a^b w(x)|u(x)v(x)|dx$$

در تعریف فوق $w(x)>0$ تابع وزن نامیده می‌شود.

۳.۱.۱ فضاهای توابع پیوسته و مشتق پذیر پیوسته

۱) فضای توابع m بار مشتق پذیر پیوسته :

فضای همه توابع m بار مشتق پذیر پیوسته روی بازه حقیقی $[0,\infty)$، که $m\in N_0=\{0,1,2,...\}$ می‌باشد، را با $C^m[0,\infty)$ و نرم زیر نمایش می دهیم که $(m\in N_0)$

$$\| f \|_{C^m}=\sum_{k=0}^{k=m}\max_{x\in[0,\infty]}| f^{(k)}(x) |$$

۲) فضای $C[0,\infty)$:

فضای همه توابع پیوسته f روی بازه حقیقی $[0,\infty)$ را با نماد $C[0,\infty)$ و نرم زیر تعریف می‌کنیم

$$\| f \|_{C}=\max_{x\in[0,\infty)}| f(x) |$$

۳) فضای $C_\mu[0,\infty)$:

تابع حقیقی مقدار $f(x)$ به فضای $C_\mu[0,\infty)$ تعلق دارد، اگر عدد حقیقی $p(>\mu)$ وجود داشته باشد به طوری که $x^pf(x)\in C[0,\infty)$ باشد که $\mu\geq -1$ می‌باشد.

۴) فضای $C_\mu^m[0,\infty)$:

برای $m\in N$ فضای $C_\mu^m[0,\infty)$ را فضای باناخ توابع $f(x)$ که مشتق پذیر پیوسته روی $[0,\infty]$ تا مرتبه $m-1$ می‌باشند، تعریف می‌کنیم و مشتق $f^m(x)$ از مرتبه m به $C_\mu[0,\infty)$ تعلق دارد $(f^m(x)\in C_\mu[0,\infty))$.

۲.۱ معرفی برخی مفاهیم مقدماتی

۱.۲.۱ تابعی

نگاشتی از، مجموعه‌ای از توابع، به R را تابعی گویند.
تابعی نوعی تابع می‌باشد که متغیر مستقل آن، خود یک تابع می‌باشد.
به عنوان مثال، نگاشت J ازفضای $C[a,b]$ به R با رابطه زیر یک تابعی می‌باشد

$$J(y)=\int_a^b f(x,y,y')dx$$

که $x\in[a,b]$ و $y(x)\in C[a,b]$.

۲.۲.۱ تئوری تغییراتی

[1] این تئوری در محاسبه مقدار ماکسیمم یا مینیمم تابعی ها به کار میرود و به صورت زیر بیان می‌شود
بدست آوردن تابعی، که تحت آن، تابعی مورد نظر ماکسیمم یا مینیمم گردد.

۳.۲.۱ توابع گاما و بتا

الف) تابع گاما:

تابع گاما که با نماد Γ نمایش داده میشود، به ازای عدد حقیقی α به صورت زیر تعریف میشود

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$$

و دارای خواص زیر میباشد

۱) $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$

۲) $\Gamma(\alpha+n)=\Gamma(\alpha)\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$

۳) $\Gamma(mz)=\frac{2^{mz-1}}{(2\pi)^{(m-1)/2}}\prod_{k=0}^{m-1}\Gamma(z+\frac{k}{m}) \quad , \quad (z\in C), \quad (m\in N\backslash\{1\})$

۴) $\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\pi^{\frac{1}{2}} \quad , \quad (2n-1)!!=1.3\cdots(2n-1) \quad , \quad n\in\mathbb{N}$

۵) $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad , \quad z\in Z_0 \quad , \quad 0<z<1$

۶) $\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} \quad , \quad n\in\mathbb{N} \quad , \quad z>-n, \quad , \quad z\notin Z_0^-:=\{0,-1,-2,\cdots\}$

---
[1] Variational Theory

ب) تابع بتا:

یکی از توابعی که در محاسبات کسری از آن استفاده زیادی می‌شود تابع بتا می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\beta(p,q)=\int_0^1 (1-t)^{p-1}t^{q-1}dt \quad , \quad p,q>0$$

برخی از خواص آن به صورت زیر می‌باشد

۱) $\beta(p,q)=\beta(q,p)$

۲) $\beta(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

۳) $\beta(p,q)\sim\sqrt{2\pi}\frac{p^{p-\frac{1}{2}}q^{q-\frac{1}{2}}}{(p+q)^{p+q-\frac{1}{2}}}$

۴) $\beta(p,q+1)=\frac{q}{p+q}\beta(p,q)$

۵) $\beta(p,q)=\int_0^\infty\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{2p-1}(\cos t)^{2q-1}dt \quad , \quad p,q>0$

فصل ۲

محاسبات کسری

۱.۲ مقدمه ای بر محاسبات کسری

۱.۱.۲ مقدمه

تاریخچه محاسبات کسری به عنوان حساب معمولی به سه قرن پیش باز میگردد، لیکن در میان جامعه مهندسی و علوم متداول نمی‌باشد. زیبایی موضوع در آن است که مشتق و انتگرال های کسری موضعی (نقطه ای) یا کمی نیستند. به عبارت دیگر شاید این موضوع واقعیت طبیعت را به شکل بهتری منتقل نماید. بنابراین برای به تصویر کشیدن کاربرد این موضوع و در دسترس قراردادن آن برای جامعه مهندسی و علوم رایج، بعدی دیگر برای درک یا توصیف ماهیت اصلی با شیوه‌ای بهتر اضافه می‌گردد. شاید حساب کسری آن چیزی است که طبیعت از عهده درک آن برآید و روش گفتگو با طبیعت باشد. لذا گفتگو با این زبان موثر و کارآمد است. بحث و مطالعه در خصوص این موضوع طی سه قرن گذشته در میان ریاضی دانان رایج بوده است و تنها در چند سال اخیر این مطلب به چندین زمینه(کاربردی) از علوم ، مهندسی، اقتصاد راه یافته است. در هر حال اخیرا تلاشی صورت گرفته تا مشتق کسری به صورت اپراتوری موضعی و خاص برای تئوری نظریه علم $fractal$ تعریف می‌گردد.

۲.۱.۲ پیداش محاسبات کسری

سوال اصلی که باعث پیدایش محاسبات کسری شد این بود که، آیا مفهوم مشتق مرتبه صحیح $\frac{d^n y}{dx^n}$ می تواند به مراتب کسری بسط داده شود مفهومی بسط داده شود؟ سوال بعدی آن است که آیا n می تواند هر عدد کسری، مختلط یا اصم باشد؟ چون سوال دوم به طور مثبت جواب داده شد، اسم محاسبات کسری یک اسم غلط و بی مسمی شد و به اسم بهتر مشتق و انتگرال کسری تغییر یافت. $liebniz$ نماد $\frac{d^n y}{dx^n}$ را ارائه داد و شاید آن یک بازی ساده با نمادها بود که سریعا در تاریخ ۳۰ سپتامبر ۱۶۹۵ $L.hopital$ نامه ای به $Liebniz$ نوشت و از او پرسید که اگر $n = ۱/۲$ باشد چه میشود؟ $Liebniz$پاسخ داد؛ جناب آقای $L.hopital$ همانگونه که می توانید از روی آن مشاهده کنید، حتی یک سری نامتناهی را می توان با کمیتی نظیر $d^{۱/۲}\overline{xy}$ یا $d^{۱:۲}\overline{xy}$ بیان کرد. اگر چه سری های نامتناهی و هندسی روابط مجزایی هستند، سری های نامتناهی از توانهای مثبت و منفی صحیح می تواند استفاده کند و هنوز استفاده از توانهای کسری را نمی دانیم؛ بعدا در نامه ای مشابه، $Liebniz$ مبنی بر پیشگویی های قبل نوشت که؛ لذا در ادامه داریم که $d^{۱/۲}x$ هم ارز با$x\sqrt{dx : x}$ خواهد

بود این یک تناقض آشکار است که روزی نتایج مفیدی از آن بدست خواهد آمد؛ در این کلمات بود که محاسبات کسری متولد شد مطالعات انجام گرفته طی ۳۰۰ سال اخیر دست کم نیمی صحت خود را به اثبات رسانده اند واضح است که در قرن بیستم کاربردهای ویژه ای یافت شدند، این کاربردها و زمینه ریاضی، محاسبات کسری را از اینکه تناقض است دور نگه می دارد، مادامی که فهمیدن مفهوم فیزیکی سخت است تعاریف سخت تر از مرتبه صحیح نیست.

۳.۱.۲ محاسبات کسری تعمیمی از محاسبات مرتبه صحیح

n را یک عدد صحیح در نظر بگیرید، هنگامی که می‌گوییم x^n سریع در ذهن تجسم می‌کنیم که x، n بار در خودش ضرب می‌شود حال اگر n صحیح نباشد نمی‌توانیم تصور کنیم وضعیت و سرنوشت x را، زمانی که به توان عدد غیر صحیح می‌رسد. به عنوان مثال، تصور کردن 2^{π} سخت است یعنی نمی‌دانیم وضعیت ۲ چگونه است، اما وجود دارد، به طور مشابه مشتق کسری که ما ممکن است به صورت $\frac{d^{\pi}f(x)}{dx^{\pi}}$ بیان کنیم، تصور کردن آن به طور آنی مشکل می‌باشد. با توجه به این که اعداد حقیقی در بین اعداد صحیح قرار دارند، مشتق و انتگرال کسری نیز بین مشتق مرتبه صحیح و انتگرال n تایی (گانه) وجود دارند.

در زیر تعمیمی از عدد صحیح به عدد حقیقی را روی خط حقیقی می‌بینیم

۱) $x^n = \overbrace{x.x\cdots x}^{n} \quad , \; n \in Z$

۲) $x^n = e^{n\ln x} \quad , \; n \in R$

۳) $n! = 1.2.3\cdots(n-1).n \quad , \; n \in Z$

۴) $n! = \Gamma(n+1) \quad , \; n \in \mathbb{N}_0$

بنابراین، تعمیم بالا از عدد صحیح به غیر صحیح همان چیزی است که خط کلی اعداد را درست می کند، یعنی فقط به اعداد صحیح محدود نمی‌باشد. $heaviside$(۱۸۷۱) بیان می‌کند که دنیایی از ریاضیات بین مشتق و انتگرال گیری کامل قرار دارد و عملگرهای کسری گاهی خود را در این میان وارد می‌کنند در حالی که نظیر بقیه حقیقی هستند. ریاضیات هنر نسبت دادن نامهای فریب دهنده به اشیاء می‌باشد. اسم زیبای محاسبات کسری یکی از این نامهاست که ذات و ماهیت ریاضیات هستند، ما این اسامی را به نام اعداد حقیقی و اعداد طبیعی می‌شناسیم و بیشتر اوقات از آنها استفاده می‌کنیم. مفهوم عدد طبیعی خود یک اختلاس یا تجرد طبیعی است اما آیا یک عدد طبیعی خود به خود طبیعی است؟ مفهوم عدد حقیقی تعمیمی از مفهوم عدد طبیعی است. عدد طبیعی بر این تاکید می کند که آنها بازتاب کمیت های حقیقی هستند و نمی‌توانیم این حقیقت را تغییر دهیم که آنها وجود خارجی ندارند. اگر بخواهیم چیزهایی را حساب کنیم، در

این صورت فورا در می‌یابیم که جایی برای اعداد حقیقی در این جهان حقیقی وجود ندارد. روی یک کامپیوتر کسی می‌تواند با مجموعه‌ای متناهی از کسرهای متناهی کار کند که به عنوان تقریب هایی برای عدد حقیقی به کار می روند. محاسبات کسری به مفهوم محاسبات کسرها نیست و نه اینکه آن به مفهوم یک کسر از محاسبات مشتق، انتگرال یا حساب تغییرات است. محاسبات کسری نامی از تئوری مشتق و انتگرال گیری از مرتبه دلخواه است که مفهوم مشتق گیری مرتبه صحیح و انتگرال n گانه را تعمیم می‌دهد، بنابراین آن را مشتق و انتگرال های تعمیم یافته می‌نامیم.

۴.۱.۲ توسعه تاریخی محاسبات کسری

سیستم های مرتبه کسری یا سیستم های شامل مشتق و انتگرال های کسری توسط تعدادی از افراد در حوزه علوم و مهندسی مورد مطالعه قرار گرفتند، از جمله $Heaviside(۱۹۲۲)$، $Bush(۱۹۲۹)$، $Goldman(۱۹۴۹)$، $Holbrook(۱۹۶۶)$، $Starkey(۱۹۵۴)$، $Carslaw(۱۹۷۴) and jeager(۱۹۲۹)$، $Scott(۱۹۵۵)$، $Mikuniski(۱۹۵۹)$، $Oldham and Spanier(۱۹۷۴)$ و $Miller and ross(۱۹۹۳)$ بحث های قابل قبولی را ارائه کردند که به طور خاص به این موضوع تعلق دارند. باید توجه کرد که وجود دارند تعدادی از سیستم های فیزیکی در حال رشد که رفتار آنها را می توان به طور فشرده با استفاده از تئوری سیستم های کسری توصیف کرد. در خلال توسعه کاربردی محاسبات کسری در ۳۰۰ سال قبل، همکاریهایی از $N.Ya.Sonnin(۱۸۶۹)$، $A.V.Letnikov(۱۸۷۲)$، $H.Laurent(۱۸۸۴)$، $N.Nekrasov(۱۸۸۸)$، $K.Nishimoto(۱۹۸۷)$، $Igor Pdlubny(۲۰۰۳)$، $Miller and Ross(۱۹۹۳)$، $Mainardi(۱۹۹۱)$، $L.Debnath(۱۹۹۲)$، $Srivastava(۱۹۶۸, ۱۹۹۴)$، $R.K.Saxena(۲۰۰۲)$، $R.P.Agarwal(۱۹۵۳)$، $Tom Hartly(۱۹۹۸)$، $Oustaloup(۱۹۹۴)$، $Kolwankar and Gangal(۱۹۹۴)$، $S.Saha Ray and R.K.Bera(۲۰۰۵)$ و $Carl Lorenzo(۱۹۹۸)$ و چندی دیگر جالب توجه می باشد. پس از سال ۱۶۹۵ بعد از اینکه $L.Hopital$ در مورد مشتق کسری از $Liebniz$ سوال پرسید، خود $Liebniz$ ابتدا در این جهت شروع به کار کرد.$(۱۶۹۷ - ۱۶۹۵)Liebniz$ روندی ممکن را برای مشتق مرتبه کسری ذکر کرد با این مفهوم که برای n (غیر صحیح) تعریف به صورت زیر می‌تواند برقرار باشد. او این نامه را به $J.Wallis$ و $J.Bernulli$ نوشت

$$\frac{d^n}{dx^n}e^{mx} = m^n e^{mx}$$

موضوع محاسبات کسری دور از توجه $Euler$ نماند. او در ۱۷۳۰ نوشت؛ زمانی که n یک عدد صحیح مثبت است و p تابعی از x باشد نسبت d^np به dx^n می تواند همیشه به طور جبری بیان شود، به طوری که اگر

$n = ۲$ و $p = x^۳$ باشد آنگاه نسبت $d^۲x^۳$ به $dx^۲$، نسبت $x۶$ به ۱ می باشد. حال سوالی که مطرح می‌شود این است که چه نوع نسبتی ساخته می شود اگر n کسری باشد ؟اشکال این مورد به آسانی فهمیده شد. اگر n یک عدد صحیح مثبت باشد، d^n با مشتق گیری پی درپی یافت می شود، اگر n کسری باشد این روند آشکار یا مشهود نیست. $J.L.Lagrange$ همکاریهایی در زمینه حساب کسری انجام داد. در سال ۱۷۷۲ او قانون توانها یا اندیسها را برای اپراتورهای دیفرانسیلی از مرتبه صحیح گسترش داد و نوشت:

$$\frac{d^m}{dx^m}\frac{d^n}{dx^n}(y(x)) = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}y(x)$$

و $dot(.)$ در نماد بالا حذف شده است، به این علت که ضرب نیست. سپس زمانی که تئوری محاسبات گسترش یافت ریاضیدانان هم عقیده شدند که محدودیتهایی را روی $y(x)$ اعمال کنند تا قائده‌ای درست و مشابه برای m و n دلخواه بدست آورند. $L.Euler(۱۷۳۰)$ استفاده از یک نسبت را برای مقادیر منفی یا غیر صحیح (کسری) پیشنهاد کرد. با در نظر گرفتن $m = ۱$ و $n = ۱/۲$ او روابط زیر را بدست آورد:

۱) $\frac{d^n x^m}{dx^n} = m(m-۱)\cdots(m-n+۱)x^{m-n}$

۲) $\Gamma(m+۱) = m(m+۱)\cdots(m-n+۱)\Gamma(m-n+۱)$

۳) $\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+۱)}{\Gamma(m-n+۱)}x^{m-n}$

۴) $\frac{d^{۱/۲}x}{dx^{۱/۲}} = \frac{۲}{\sqrt{\pi}}x^{۱/۲}$

گام اول در تعمیم مشتق گیری از مرتبه دلخواه توسط $J.B.j.Fourier(۱۸۲۰-۱۸۲۲)$ برداشته شد. بعد از معرفی تابع

$$f(x) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\int_{-\infty}^{\infty}\cos(px-pz)dpdz$$

و با استفاده از رابطه

$$\frac{d^n}{dx^n}\cos p(x-z) = p^n\cos[p(x-z)+\frac{n\pi}{۲}]$$

که n صحیح است، رابطه زیر را بدست آورد

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\int_{-\infty}^{\infty}p^n\cos(px-pz+\frac{n\pi}{۲})dpdz$$

با جایگذاری (دلخواه) u به جای n او به تعمیم زیر رسید

$$\frac{d^u}{dx^u}f(x) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\int_{-\infty}^{\infty}p^u\cos(px-pz+\frac{u\pi}{۲})dpdz$$

$Fourier$ بیان کرد که: عدد u که در بالا ظاهر شده است هر کمیتی اعم از مثبت یا منفی می‌تواند باشد. $N.H.Abel(۱۸۲۳-۱۸۲۶)$ انتگرالی به صورت $\int_{۰}^{x}\frac{s'(\eta)}{(x-\eta)^\alpha}d\eta = \psi(x)$ معرفی کرد. در حقیقت او انتگرال