دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (گرایش جبر)

موضوع:

$*-$ مدولها و مدولهای تیلتینگ با بعد همولوژیکی متناهی

نگارش:

هادی امرائی

استاد راهنما:

دکتر محمد جواد نیک مهر

شهریور ماه ۹۰

اظهار نامه دانشجو

موضوع پایان‌نامه: $*$–مدولها و مدولهای تیلتینگ با بعد هومولوژیکی متناهی

استاد راهنما: دکتر محمد جواد نیک مهر

نام دانشجو: هادی امرائی

شماره دانشجویی: ۸۸۰۳۲۷۴

اینجانب هادی امرائی دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی محض گرایش جبر دانشکده علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارائه شده در این پایان‌نامه توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش شده مورد تأیید می‌باشد و در مورد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده است. همچنین گواهی می‌نمایم که مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگر در هیچ جا ارائه نشده است و در تدوین متن پایان‌نامه آئین‌نامه مصوب دانشگاه را به طور کامل رعایت کرده‌ام.

امضاء دانشجو:

تاریخ:

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتا یج

تقدیم به

روح بزرگوار پدرم،

قلب مهربان مادرم

چکیده

در این پایان نامه ابتدا مفهوم $*-$ مدول را تعریف می‌کنیم. سپس $*-$ مدولها را به $*^n-$مدولها تعمیم داده و نشان می‌دهیم که مدولهای تیلتینگ از بعد پروژکتیو کوچکتر مساوی n همان $*^n-$مدولها هستند، که $n-$نمایش آنها شامل همه مدولهای انژکتیو است. در ادامه نشان می‌دهیم اگر R یک حلقه نوتری چپ، S یک حلقه نوتری راست و $_RU$ یک مدول تیلتینگ تعمیم‌یافته با $S = End(_RU)$ باشد، آنگاه بعد انژکتیو $_RU$ و U_S با هم برابر است به شرطی که هر دو متناهی باشند.

کلمات کلیدی : $*-$مدول، مدول تیلتینگ، مدول تیلتینگ تعمیم‌یافته، بعد $U-$حدی

فهرست مندرجات

مقدمه

موضوع اصلی که در این پایان‌نامه مورد بحث قرار می‌گیرد بررسی ویژگیهای $*$—مدولها و مدولهای تیلتینگ است که برگرفته از[۸] و [۲۳] است. در فصل اول برخی تعاریف و قضایای مقدماتی را ارائه می‌دهیم. در سال ۱۹۸۹ منینی و اورستی در [۱۵] هم ارزی رسته‌ای موریتا را به این صورت تعمیم دادند فرض کنید S یک حلقه و U یک S—مدول راست با $R = \mathrm{End}(U_S)$. همچنین فرض کنید Q_S یک هم‌مولد از S- مدولها باشد و $K_R = \mathrm{Hom}_S(U,Q)$. در این صورت مدول U_S توسط تابعگونهای $- \otimes_R U$ و $\mathrm{Hom}_S(U,-)$ یک هم ارزی میان $\mathrm{Gen}(U_S)$ و $\mathrm{Cogen}(K_R)$ تعریف می‌کند و آن را $*$—مدول نامیدند. در فصل دوم $*$—مدولها را به $*^n$—مدولها تعمیم داده و ویژگی های اساسی $*^n$—مدولها را بررسی می‌کنیم و نتایج آنها که در [۴] بدست آمده است را ارائه می‌کنیم. همچنین نشان می‌دهیم که مدولهای تیلتینگ از بعد پروژکتیو کوچکتر مساوی n، $*^n$—مدول هستند و در انتهای فصل دوم ارتباط میان $*^n$—مدولها و مدولهای تیلتینگ از بعد پروژکتیو کوچکتر مساوی n را بررسی می‌کنیم. واکاماتسو در [۲۲] ثابت کرده است که اگر R و S جبرهای آرتینی باشند و ${}_RU$ یک مدول تیلتینگ تعمیم‌یافته با $S = \mathrm{End}({}_RU)$ باشد، آنگاه بعد پروژکتیو (انژکتیو) ${}_RU$ و U_S به شرطی که هر دو عبارت متناهی باشند برابر هستند.

همچنین واکاماتسو نشان داد که برابری بعد پروژکتیو ${}_RU$ و U_S در حلقه‌های نوتری برقرار است و این سوال را مطرح کرده است که آیا در حلقه‌های نوتری بعد انژکتیو ${}_RU$ و U_S یکی هستند. در فصل سوم نشان می‌دهیم اگر R حلقه نوتری چپ و S حلقه نوتری راست باشد، آنگاه بعد انژکتیو ${}_RU$ و U_S یکی است به شرطی که هر دو عبارت متناهی باشند. در سال ۱۹۶۹ اوسلاندر نشان داد اگر R یک حلقه نوتری دو طرفه باشد جمعوند مستقیمی از یک مدول که عضو $\mathcal{E}_1(R_R)$ است هنوز در $\mathcal{E}_1(R_R)$ قرار دارد. او این سوال را مطرح کرد که آیا هر زیرمدول از $\mathcal{E}_1(R_R)$ هنوز در $\mathcal{E}_1(R_R)$ قرار دارد. در فصل سوم نشان می‌دهیم که با وجود شرط متناهی‌بودن بعد انژکتیو ${}_RU$ و U_S و برخی شرایط لازم و کافی رسته

$$\mathcal{E}_n(U_S) = \{M \in R-\mathrm{mod} \mid M = \mathrm{Ext}^n_S(N,U) \text{ موجود باشد بطوریکه، } N \in \mathrm{mod}-S\ \}$$

تحت زیرمدولهایش بسته است.

فصل ۱

مقدمات

دراین فصل به بیان چند مفهوم مقدماتی می‌پردازیم و علاوه بر آن چند قضیه ی مهم و کاربردی درباره‌ی این مفاهیم را بیان می‌کنیم. در این پایان‌نامه حلقه شرکت‌پذیر با عنصر یکانی است مگر در مواردی که خلاف آن ذکر شود.

۱.۱ رسته و تابعگون

تعریف ۱.۱ رسته ای[۱] مثل $\mathcal{C}$، خانواده‌ای است متشکل از اشیائی که معمولا با $A, B, C, D, \cdots$ نمایش می‌دهیم، با این ویژگی که

۱. به ازای هر دو شی مثل A, B، مجموعه ای متناظر می‌شود که با $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ نشان داده می‌شود و دارای این خاصیت است که به ازای هر چهار شی مثل A, B, C, D که $(A, B) \neq (C, D)$، $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \cap \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D) = \emptyset$،

[۱] category

۲. به ازای هر سه شی مثل C, B, A، تابع

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C)$$

$$(g,f) \longrightarrow gf$$

موجود است که

i) به ازای هر چهار شی مثل D, C, B, A، اگر $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$، $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C)$ و $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,D)$، آنگاه $h(gf) = (hg)f$،

ii) به ازای هر شی مثل A، عضوی از $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,A)$ مثل 1_A موجود است که به ازای هر عضو از $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ مثل f و هر عضو $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,A)$ مثل g، $f1_A = f$ و $1_A g = g$.

هر عضو از $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ را یک ریختار[2] از A به B می‌نامند. نماد $f : A \longrightarrow B$ هم یعنی این که f ریختار از A به B است.

لازم به ذکر است که در سراسر این پایان‌نامه برای حلقه R، رسته R−مدولهای راست (چپ) را با $\mathrm{Mod}-R$ ($R-\mathrm{Mod}$) نشان می‌دهیم و همچنین رسته R−مدولهای متناهی‌مولد راست (چپ) را با $\mathrm{mod}-R$ ($R-\mathrm{mod}$) نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱ در رسته ای مثل $\mathcal{C}$، یک ریختار مثل $f : A \longrightarrow B$ را هم ارزی می‌نامیم اگر ریختاری مثل $g : B \longrightarrow A$ از $\mathcal{C}$ موجود باشد که $fg = 1_B$ و $gf = 1_A$.

تعریف ۳.۱ فرض کنید $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته باشند. تابعگون[3] همورد از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$، زوجی متشکل از دو تابع است: یکی تابع شی که به هر شی از $\mathcal{C}$ مثل A، شی $T(A)$ از $\mathcal{D}$ را نسبت می‌دهد، و دیگری تابع

[2] morphism

[3] functor

ریختار، که آن را هم با T نشان می‌دهیم و به هر ریختار از $\mathcal{C}$ مثل $f : A \longrightarrow B$ ، ریختاری از $\mathcal{D}$ مثل $T(f) : T(A) \longrightarrow T(B)$ نسبت می‌دهد، با این ویژگی که

۱. به ازای هر شی از $\mathcal{C}$ مثل A، $T(1_A) : 1_{T(A)}$،

۲. به ازای هر دو ریختار از $\mathcal{C}$ مثل $f : A \longrightarrow B$ و $g : B \longrightarrow C$، $T(gf) = T(g)T(f)$.

تعریف ۴.۱ فرض کنید $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته باشند. تابعگون پادورد از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$، زوجی متشکل از دو تابع است: یکی تابع شی که به هر شی از $\mathcal{C}$ مثل A، شی $T(A)$ از $\mathcal{D}$ را نسبت می‌دهد، و دیگری تابع ریختار، که آن را هم با T نشان می‌دهیم و به هر ریختار از $\mathcal{C}$ مثل $f : A \longrightarrow B$ ، ریختاری از $\mathcal{D}$ مثل $T(f) : T(B) \longrightarrow T(A)$ نسبت می‌دهد، با این ویژگی که

۱. به ازای هر شی از $\mathcal{C}$ مثل A، $T(1_A) = 1_{T(A)}$،

۲. به ازای هر دو ریختار از $\mathcal{C}$ مثل $f : A \longrightarrow B$ و $g : B \longrightarrow C$، $T(gf) = T(f)T(g)$.

۲.۱ ضرب تانسوری

ضرب تانسوری از مهمترین مفاهیم اساسی استفاده شده در این پایان‌نامه است. در این بخش به معرفی این مفهوم اساسی می‌پردازیم.

فرض کنید M, N دو مجموعه ناتهی باشند. $\mathbb{Z}^{(M\times N)}$ را مجموعه تمام حاصل‌جمع‌های صوری مثل $\sum_{i=1}^{t} n_i(x_i, y_i)$ در نظر می‌گیریم که در آن $t \geq 1$، $n_i \in \mathbb{Z}$ و $(x_i, y_i) \in M \times N$؛ یعنی $\mathbb{Z}^{(M\times N)} = \{\sum_{i=1}^{t} n_i(x_i, y_i) : t \geq 1, n_i \in \mathbb{Z}, (x_i, y_i) \in M \times N\}$. هر دو عضو دلخواه از $\mathbb{Z}^{(M\times N)}$ را می‌توانیم به صورت $\sum_{i=1}^{t} n_i(x_i, y_i)$ و $\sum_{i=1}^{t} n'_i(x_i, y_i)$ در نظر بگیریم. تساوی دو عضو از $\mathbb{Z}^{(M\times N)}$ را به طور طبیعی، تساوی ضرایب متناظر آنها تعریف می‌کنیم، یعنی دو

عضو دلخواه از $\mathbb{Z}^{(M\times N)}$ مثل $\sum_{i=1}^{t} n_i(x_i,y_i)$ و $\sum_{i=1}^{t} n'_i(x_i,y_i)$ را مساوی می‌نامیم و می‌نویسیم $\sum_{i=1}^{t} n_i(x_i,y_i) = \sum_{i=1}^{t} n'_i(x_i,y_i)$ اگر و فقط اگر برای هر i که $1 \leq i \leq t$، $n_i = n'_i$. اکنون می‌خواهیم عمل جمعی روی $\mathbb{Z}^{(M\times N)}$ تعریف کنیم که آن را به گروه آبلی آزاد ($\mathbb{Z}$–مدول) تبدیل کند. این کار نیز به صورت طبیعی انجام می‌شود: کافی است عمل $\mathbb{Z}^{(M\times N)} \times \mathbb{Z}^{(M\times N)} : +$ را به صورت

$$\sum_{i=1}^{t} n_i(x_i,y_i) + \sum_{i=1}^{t} n'_i(x_i,y_i) = \sum_{i=1}^{t} (n_i+n'_i)(x_i,y_i)$$

تعریف کنیم. به راحتی دیده می‌شود که $\mathbb{Z}^{(M\times N)}$ با این عمل جمع به گروه آبلی آزاد($\mathbb{Z}$–مدول) تبدیل می‌شود.

تعریف ۵.۱ فرض کنید M، R–مدول راست و N یک R–مدول چپ و F نیز گروه آبلی آزاد $\mathbb{Z}^{(M\times N)}$ باشد. گیریم K زیر گروهی از F باشد که توسط اعضای

$$(x+x',y)-(x,y)-(x',y),$$

$$(x,y+y')-(x,y)-(x,y'),$$

$$(xr,y)-(x,ry),$$

تولید می‌شود که در آن $x,x' \in M$، $y,y' \in N$ و $r \in R$. در این صورت، گروه آبلی ($\mathbb{Z}$–مدول) F/K را حاصل ضرب تانسوری M و N می‌نامیم و آن را با $M \otimes_R N$ نشان می‌دهیم.

اگر M، R–مدول راست و N، R–مدول چپ باشد، عضو $(x,y)+K$ از گروه آبلی ($\mathbb{Z}$–مدول) $M \otimes_R N = F/K$ را با $x \otimes y$ نشان می‌دهیم.

۳.۱ دستگاه‌های مستقیم و حدهای مستقیم

تعریف ۶.۱ فرض کنید R یک حلقه و $(M_i)_{i\in I}$ خانواده‌ی ناتهی از $R-$مدولهای چپ باشند. جمع مستقیم[۴] $\oplus_{i\in I}M_i$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\oplus_{i\in I}M_i = \{(x_i) \mid x_i \in M_i,\ x_i = \circ \text{ ، بجز تعداد متناهی } i\in I \text{ برای هر } \}$$

جمع و ضرب اسکالر را نیز به صورت

$$(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i),$$

$$r(x_i) = (rx_i),$$

تعریف می‌کنیم. بسادگی دیده می‌شود که $\oplus_{i\in I}M_i$ به همراه این جمع و ضرب در اسکالر به R-مدول تبدیل می‌شود.

تعریف ۷.۱ زیر مدول N از $R-$مدول M را یک جمعوند مستقیم[۵] از M می‌نامیم هرگاه زیرمدول K از M وجود داشته باشد بطوریکه $M = N \oplus K$

تعریف ۸.۱ فرض کنید R یک حلقه و $(M_i)_{i\in I}$ یک خانواده‌ی ناتهی از $R-$مدولهای چپ باشند. ضرب مستقیم[۶] $\prod_{i\in I} M_i$ عبارتست از حاصلضرب دکارتی این خانواده یعنی

$$\prod_{i\in I} M_i = \{(x_i) \mid x_i \in M_i, i \in I \text{ برای هر}\}$$

جمع و ضرب اسکالر را نیز به صورت

$$(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i),$$

---

[۴] direct sum

[۵] direct summand

[۶] direct product

$$r(x_i) = (rx_i),$$

تعریف می‌کنیم، برای هر i، $x_i, y_i \in M_i$ هستند. بسادگی دیده می‌شود که $\prod_{i\in I} M_i$ به همراه این جمع و ضرب در اسکالر به R-مدول تبدیل می‌شود.

تعریف ۹.۱ مجموعه ی جزئا مرتب[۷] I و یک رسته مانند $\mathcal{C}$ را در نظر می‌گیریم. یک دستگاه‌مستقیم [۸] در $\mathcal{C}$ را یک زوج مرتب مانند $((M_i)_{i\in I}, (\phi_j^i)_{i\preceq j})$ در نظر می‌گیریم، که می‌توانیم بطور خلاصه بنویسیم $\{M_i, \phi_j^i\}$. در تعریف بالا $(M_i)_{i\in I}$ یک خانواده‌ی اندیس گذاری[۹] از اشیاء در $\mathcal{C}$ هستند. $(\phi_j^i : M_i \longrightarrow M_j)_{i\preceq j}$ نیز یک خانواده اندیس‌گذاری از ریختارها هستند بطوریکه در آن برای هر i، $\phi_i^i = 1_{M_i}$ و در هر دیاگرامی به شکل زیر به ازای هر $i \preceq j \preceq k$، تساوی $\phi_k^j \phi_j^i = \phi_k^i$ برقرار می‌شود.

$$\begin{array}{ccccc} & & \phi_k^i & & \\ M_i & & ----\longrightarrow & & M_k \\ & \phi_j^i \searrow & & \nearrow \phi_k^j & \\ & & M_j & & \end{array}$$

تعریف ۱۰.۱ فرض کنید I یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب و $\mathcal{C}$ یک رسته باشد. زوج مرتب‌های $\{M_i, \phi_j^i\}$ را به عنوان یک دستگاه‌مستقیم در $\mathcal{C}$ بر روی I در نظر می‌گیریم. یک حدمستقیم[۱۰] عبارتست از یک شی $lim_{\rightarrow} M_i$ و ریختار های القایی $(\alpha_i : M_i \longrightarrow lim_{\rightarrow} M_i)_{i\in I}$، بطوریکه

(i) برای هر $i \preceq j$ داشته باشیم $\alpha_j \phi_j^i = \alpha_i$،

---

[۷] partial ordered set

[۸] directed system

[۹] indexed family

[۱۰] direct limit

(ii) اگر A یک شی از $\mathcal{C}$ باشد و اگر ریختارهایی به شکل $f_i : M_i \longrightarrow A$ باشند که به ازای هر $i \preceq j$ در شرط $f_j\phi_j^i = f_i$ صدق می‌کنند، آنگاه یک ریختار یکتا مانند $\theta : lim_{\rightarrow}M_i \longrightarrow A$ وجود داشته باشد که در روابط $\theta\alpha_i = f_i$ و $\theta\alpha_j = f_j$ صدق کند.

۴.۱ دنباله‌های دقیق

تعریف ۱۱.۱ فرض کنید برای هر n، M_n یک R−مدول و f_n یک R−همریختی باشد. آنگاه دنباله متناهی یا نامتناهی

$$\cdots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

را یک دنباله دقیق[۱۱] گوییم هرگاه برای هر n، $\mathrm{Im} f_{n+1} = \mathrm{Ker} f_n$.

تعریف ۱۲.۱ فرض کنید M،N و K، R-مدول‌های دلخواهی باشند. دراینصورت اگر دنباله‌ی

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0$$

دقیق باشد، آنگاه آن را دنباله‌ی دقیق کوتاه می‌نامیم.

تعریف ۱۳.۱ اگر دنباله‌ی

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0$$

[۱۱] exact

یک دنباله ی دقیق کوتاه باشد، آنگاه آن را یک دنباله‌ی شکافته‌شده[۱۲] می‌گوییم اگر و تنها اگر یکی از شرط‌های سه‌گانه‌ی زیر برقرار باشد:

۱) نگاشت j از K به N وجود داشته باشد که $gj = 1_K$.

۲) نگاشت i از N به M وجود داشته باشد که $if = 1_M$.

۳) مدول N جمع مستقیمی از دو مدول M و K باشد.

تعریف ۱.۱۴ گوییم نمودار

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & K & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow\alpha & & \downarrow\beta & & \downarrow\gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f'} & N' & \xrightarrow{g'} & K' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

دیاگرام جابجایی از R-مدول‌ها و همریختی‌هاست هر گاه $f'\alpha = \beta f$ و $g'\beta = \gamma g$. و جابجایی بودن نمودار

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \Psi\downarrow & \beta\swarrow & \\ K & & \end{array}$$

یعنی $\beta f = \Psi$.

گزاره ۱.۱ فرض کنید

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \longrightarrow & M_2 & \to & M_3 & \to & M_4 & \longrightarrow & M_5 \\ \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_3 & & \downarrow h_4 & & \downarrow h_5 \\ N_1 & \longrightarrow & N_2 & \to & N_3 & \to & N_4 & \longrightarrow & N_5 \end{array}$$

---
[۱۲] split

نموداری جابجایی از R-مدول‌ها و همریختی‌ها باشد، با این ویژگی که هر دو سطر آن دقیق باشند. در اینصورت،

۱) اگر $h_۲$ و $h_۴$ پوشا و $h_۵$ یک به یک باشد، آنگاه $h_۳$ نیز پوشا است.

۲) اگر $h_۲$ و $h_۴$ یک به یک و $h_۱$ پوشا باشد، آنگاه $h_۳$ نیز یک به یک است.

۳) اگر $h_۱$، $h_۲$، $h_۴$ و $h_۵$ یکریختی باشند، آنگاه $h_۳$ نیز یکریختی است.

برهان : رجوع شود به گزاره ۲. ۷۲ مرجع [۱۶]. □

گزاره ۱.۲ اگر یک دیاگرام جایجایی با سطرهای دقیق به شکل زیر داشته باشیم

$$
\begin{array}{ccccccc}
M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & K & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & & & \\
M' & \xrightarrow{f'} & N' & \xrightarrow{g'} & K' & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

آنگاه نگاشت یکتایی مانند $\gamma : K \longrightarrow K'$ وجود دارد که باعث جابجایی‌شدن دیاگرام بالا می‌شود. همچنین، اگر α, β دو یکریختی باشند، آنگاه γ نیز یک یکریختی است.

برهان : رجوع شود به گزاره ۲. ۷۰ مرجع [۱۶]. □

گزاره ۱.۳ اگر یک دیاگرام جایجایی با سطرهای دقیق به شکل زیر داشته باشیم

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & K \\
& & & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\
0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f'} & N' & \xrightarrow{g'} & K'
\end{array}
$$

آنگاه نگاشت یکتایی مانند $\alpha : M \longrightarrow M'$ وجود دارد که باعث جابجایی‌شدن دیاگرام بالا می‌شود. همچنین، اگر β, γ دو یکریختی باشند، آنگاه α نیز یک یکریختی است.

برهان : رجوع شود به گزاره ۲. ۷۱ مرجع [۱۶]. □

۵.۱ تحلیل های پروژکتیو، انژکتیو و یکدست

در این بخش به بیان تعاریف مربوط به بعدهای همولوژیکی، مفهوم تحلیل پروژکتیو و تحلیل یکدست که تعاریف اساسی و کلیدی برای این پایان‌نامه هستند می‌پردازیم.

تعریف ۱۵.۱ R-مدول چپ مانند F را یک مدول آزاد[۱۳] می‌نامیم هرگاه این مدول یکریخت با یک جمع مستقیم از نسخه‌های R باشد، یعنی وجود داشته باشد یک مجموعه‌ی اندیس‌گذاری مانند I (که می‌تواند بی شمار هم باشد) که $F = \oplus_{i\in I} R_i$ و در آن به ازای هر $i \in I$، $R_i = \langle i\rangle \cong R$. به مجموعه‌ی I یک پایه[۱۴] برای مدول F می‌گویند.

تعریف ۱۶.۱ $R-$مدول چپ P را پروژکتیو[۱۵] می‌نامیم اگر برای هر دیاگرام به شکل زیر:

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & f\downarrow & & \\ M & \xrightarrow{\alpha} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

که سطر پایینی آن دقیق است، یک همریختی منحصربه‌فرد $g : P \longrightarrow M$ موجود باشد که دیاگرام را جابجا کند یعنی $\alpha g = f$.

گزاره ۴.۱ R-مدول چپ متناهی‌مولد P پروژکتیو است اگر و تنها اگر جمعوند مستقیمی از R^n برای یک n باشد.

---

[۱۳] free

[۱۴] basis

[۱۵] projective

برهان : رجوع شود به گزاره ۵.۳ مرجع [۱۶]. □

گزاره ۵.۱ R-مدول چپ P پروژکتیو است اگر و تنها اگر هر دنباله‌ی دقیق به صورت $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$ از R-مدول‌ها شکافته‌شده باشد.

برهان : رجوع شود به گزاره ۳. ۳ مرجع [۱۶]. □

تعریف ۱۷.۱ R−مدول E را انژکتیو[۱۶] می‌نامیم هر گاه برای هر دیاگرام به شکل :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha} & N \\ & & \downarrow f & & \\ & & E & & \end{array}$$

با سطر بالایی دقیق، یک همریختی منحصربه‌فرد $g : N \longrightarrow E$ وجود داشته باشد که دیاگرام بالا جابجایی باشد یعنی $g\alpha = f$.

گزاره ۶.۱ R-مدول چپ E انژکتیو است اگر و تنها اگر هر دنباله دقیق بصورت $0 \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ از R-مدول‌ها شکافته‌شده باشد.

برهان : رجوع شود به گزاره ۳. ۲۶ مرجع [۱۶]. □

تعریف ۱۸.۱ فرض کنید M و E، R−مدولهای چپ باشند. آنگاه E یک توسیع اساسی[۱۷] از M است اگر یک نگاشت یک به یک $\alpha : M \longrightarrow E$ وجود داشته باشد بطوریکه برای هر زیرمدول N از E، $N \cap \alpha(M) \neq \{0\}$. اگر $\alpha(M) \subsetneq E$، آنگاه E یک توسیع اساسی محض از M نامیده می‌شود.

---

[۱۶] injective

[۱۷] essential extension