دانشگاه شیخ بهایی

دانشکده تحصیلات تکمیلی
گروه ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی ، گرایش ریاضی مالی

عنوان

مقایسه‌ی روش‌های مونت‌کارلو و شبکه‌های عصبی برای ارزش‌گذاری اختیارمعاملات آمریکایی

استاد راهنما

دکتر محمد تقی جهاندیده

استاد مشاور

دکتر امیر نادری

پژوهشگر

فرزانه یزدانی نیا

۱۳۹۱

نام خانوادگی دانشجو: یزدانی‌نیا نام: فرزانه

عنوان: مقایسه‌ی روش‌های مونت‌کارلو و شبکه‌های عصبی برای ارزش‌گذاری اختیارمعاملات آمریکایی

استاد راهنما: دکتر محمد تقی جهاندیده

استاد مشاور: دکتر امیر نادری

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی گرایش: ریاضی مالی

دانشگاه: دانشگاه شیخ بهایی دانشکده تحصیلات تکمیلی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۱ تعداد صفحات: ۱۱۵

واژگان کلیدی: شبیه‌سازی مونت‌کارلو،اختیارمعامله امریکایی،شبکه‌های عصبی،ارزش‌گذاری اختیارمعامله،اجرای زودرس

چکیده

نظر به افزایش و تنوع خطرهایی که واحدهای اقتصادی با آن روبه‌رو هستند، امروزه ابزارهای مشتقه‌ی مالی اهمیت بسیاری یافته و حجم معامله‌گری این مشتقات به مقدار قابل توجهی افزایش یافته است. هم‌چنین، در طول دهه‌های اخیر تکنیک‌های محاسباتی و ریاضی خیره‌کننده‌ای برای تحلیل بازارهای مالی گسترش یافته‌اند. اکنون به سطحی از نوآوری‌های مالی رسیده‌ایم که ضروری است همه‌ی متخصصین علوم مالی از چگونگی کارکرد این بازارها، نحوه‌ی استفاده از آن‌ها و هم‌چنین سازوکار تعیین قیمت در این بازارها آگاه باشند. در این رساله به مسأله‌ی ارزش‌گذاری نوعی از این ابزار، یعنی اختیارمعاملات آمریکایی می‌پردازیم. به این منظور روش‌های مونت‌کارلو را مورد بررسی قرار می‌دهیم که ثابت شده است برای مثال با ابعاد بالا عملکرد بهتری نسبت به سایر روش‌های عددی دارند. در این‌جا به بیان نقاط قوت و ضعف بعضی از روش‌هایی که تا کنون معرفی شده است می‌پردازیم و از میان آن‌ها، برای ارزش‌گذاری اختیارمعاملات آمریکایی، الگوریتم دسته‌بندی را تشریح و استفاده می‌کنیم. هم‌چنین به‌منظور کاهش خطای موجود در روش مونت‌کارلو از تکنیک کاهش واریانس استفاده می‌کنیم که تأثیر زیادی بر کیفیت جواب‌های ارائه شده دارد. شبکه‌های عصبی تکنیک دیگری است که با تقلید از عملکرد سلول‌های عصبی بیولوژیکی، در علوم مختلف کاربرد دارد. در این‌جا از این تکنیک به‌منظور ارزش‌گذاری اختیارمعاملات آمریکایی استفاده می‌کنیم. مقایسه نتایج نشان می‌دهد که روش‌ها شبکه‌های عصبی در این زمینه عملکرد بسیار بهتری دارند.

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ی ایثار و از خودگذشتگی

به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند

و به پاس وجود نازنین شان.

بسم الله الرحمن الرحیم

سپاس گزاری...

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ جناب آقای دکتر جهاندیده در سمت استاد راهنما، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر نادری که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

همچنین تشکر می‌کنم از جناب آقای دکتر رجالی، سرکار خانم دکتر ذکری و خانم علیخانی که قسمت مهمی از دانسته‌هایم را مدیون ایشان هستم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از خانواده عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

فرزانه یزدانی نیا

۱۳۹۱

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

فصل ۱

مقدمه

ابزارهای مالی آمریکایی مشتقاتی مالی هستند که نه تنها در زمان سررسید اوراق بلکه در هر زمان قبل از آن نیز می‌توانند از طرف دارنده‌ی آن به اجرا گذاشته شوند. اگرچه این اوراق ویژگی‌های مشترکی با اوراق اروپایی دارند، اما فرایند ارزش‌گذاری آن‌ها معمولاً پیچیده است و تنها در بعضی از حالت‌ها یافتن جوابی تحلیلی برای آن‌ها مقدور است. از آن‌جایی که مشتقات آمریکایی انعطاف بیشتری برای دارنده‌ی خود دارند، طرفداران بسیاری داشته و به‌طور گسترده معامله می‌شوند. به همین جهت ارزش‌گذاری آن‌ها از طریق روش‌های عددی ضروری به‌نظر می‌رسد. در این زمینه روش‌های غیرشبیه سازی مانند درخت‌های دوجمله‌ای یا سه‌جمله‌ای یا روش‌های مطابق با مسائل مرزی PDE مانند روش‌های تفاضلات متناهی قبلاً ارائه شده‌اند. این روش‌ها هنگامی که ابعاد مسأله کوچک باشد نتایج خوبی به‌دست می‌دهند و حجم محاسباتی بالایی ندارند. مقایسه‌ی چنین روش‌هایی را می‌توان در کار انجام شده توسط برودی[۱] و دتمپل[۲] در [۷] مشاهده کرد. با بزرگ‌تر شدن ابعاد مسأله، پیچیده‌گی محاسباتی آن نیز بیشتر می‌شود و درنتیجه روشهای یادشده کارایی چندانی نخواهند داشت. به این جهت روش‌های شبیه‌سازی که می‌دانیم هزینه‌ی محاسباتی آن‌ها به ابعاد مسأله وابسته نیست، به میان می‌آیند. روش‌های مونت‌کارلو که روش‌هایی پیشرو هستند به سادگی و کاملاً سرراست برای ارزش‌گذاری اختیارمعاملات اروپایی به‌کار می‌روند اما به سادگی نمی‌توان این روش‌ها را برای اختیارمعاملات آمریکایی استفاده کرد چون در این حالت باید استدلال‌های پسرو را به‌کار گرفت.

در ابتدا از روش‌های شبیه‌سازی مونت‌کارلو تنها برای ارزش‌گذاری اختیارمعاملات اروپایی استفاده می‌شد و در این راستا هال[۳] در ویرایش دوم کتاب مشتقات مالی خود ادعا کرد که "روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو تنها برای اختیارمعاملات اروپایی قابل استفاده است" و به این دلیل بود که برنامه‌های شبیه‌سازی استاندارد، الگوریتم‌های پیشرو دارند، یعنی مسیرهای نمونه‌ای متغیرهای حالت به‌طور پیشرو در زمان شبیه‌سازی می‌شوند و این در حالی است که برای ارزش‌گذاری اختیارمعاملات با اجرای زودرس، مانند اختیارمعاملات آمریکایی، یک الگوریتم پسرو نیاز است که با شروع از زمان

[۱] Broadie
[۲] Detemple
[۳] Hall

انقضای اختیارمعامله، توسط برنامه‌ریزی پویا، استراتژی اجرای بهینه و سپس ارزش اختیارمعامله می‌تواند براورد شود. می‌دانیم چنان‌چه برای مسائلی که الگوریتم پسرو نیاز دارند از الگوریتم‌های پیشرو استفاده شود، ارزش اختیارمعامله دست بالا براورد می‌شود. پس از این ادعای هال مقالات زیادی این ادعا را رد کردند و هال خودش در ویرایش چهارم کتابش آن را این‌طور تعدیل کرد: "به‌راحتی نمی‌توان حالت‌هایی را یافت که در آن فرصت اجرای زودرس وجود داشته باشد."

روش‌های اولیه برای ارزش‌گذاری اختیارمعاملات آمریکایی درخت‌های دوجمله‌ای و دیگر روش‌های شبکه‌ای (مانند درخت‌های سه‌جمله‌ای) و روش‌های تفاضلات متناهی برای حل مقدار مرزی مربوط به معادلات دیفرانسیل جزئی هستند. ایراد اصلی این روش‌ها این است که با افزایش تعداد متغیرهای حالت، دفعات محاسبات به‌طور نمایی افزایش می‌یابد و این در حالی است که نرخ همگرایی روش‌های مونت‌کارلو معمولاً مستقل از تعداد متغیرهای حالت است.

در این زمینه براوردهای متفاوتی تا کنون ارائه شده است. ما این روش‌ها را به گروه‌های کوچک‌تری تقسیم می‌کنیم:

* **برنامه‌ریزی پویا؛** در این برنامه‌ریزی ارزش اختیارمعامله را در زمان سررسید پیدا می‌کنیم سپس به‌طور بازگشتی در زمان تا زمان شروع به عقب بازمی‌گردیم و در این زمینه روش‌های برنامه‌ریزی پویا و دسته‌بندی،که نخستین بار توسط تایلی در [٤٤] ارائه شد را به‌کار می‌گیریم. همچنین تقریب دیگری را توسط گرانت [٤]، وُرا [٥] و ویکز [٦] در ۱۹۹۶ و ۱۹۹۷ معرفی شد بررسی می‌کنیم که با استفاده از استقرای پسرو، مرز اجرای اختیارمعامله را از طریق قانون توقف تعریف می‌کند و سپس به‌طور مستقیم برای پیدا کردن ارزش اختیارمعامله از شبیه‌سازی مونت‌کارلو بهره می‌گیرد. زاپاترو [٧] و ایبانز [٨] در ۱۹۹۹ از یک الگوریتم نقطه‌ثابت برای یافتن نقاط بحرانی برای ارزش‌گذاری اختیارمعامله آمریکایی استفاده کردند.

* **روش‌های درخت و شبکه توری؛** این روش‌ها توسط برودی و گلسرمن[٩] در [١٠] ، [١١] ، [١٣] و [١٢] ارائه شد، برخلاف روش‌های دیگر از مسیرهای شبیه‌سازی شده استفاده نمی‌کنند بلکه درخت‌های و شبکه‌های شبیه‌سازی شده را به‌کار می‌گیرند که از ساختار آن براوردهای بالا و پایین برای ارزش درست به‌دست می‌آیند که همگرا به قیمت واقعی اختیارمعامله هستند. روش درخت نمی‌تواند برای تعداد گام‌های زمانی زیادی استفاده شود زیرا در این روش تعداد عملیات لازم به‌طور نمایی رشد می‌کند.

* **پارامتری کردن مرز اجرا؛** این روش شبیه روش گرانت و دیگران است اما در این‌جا به‌جای استفاده از برنامه‌ریزی پویا، مرز اجرای اختیارمعامله را پارامتری شده و سپس تحت اندازه‌ی مارتینگل جبرانی مورد انتظار

[٤] Grant
[٥] Vora
[٦] Weeks
[٧] Zapatero
[٨] Ibanez
[٩] Glasserman

حداقل می‌شود. مهم‌ترین کارها در این زمینه توسط فو[10] و هو[11] در [۲۰] و ایگلف[12] در [۱۶] انجام شده است.

در همه این الگوریتم‌ها زمان باقی مانده تا سررسید اختیارمعامله را تعدادی گام‌های زمانی تقسیم می‌کنیم. در حقیقت نوع متفاوتی از اختیارمعاملات را که برمودایی نامیده می‌شود ارزش‌گذاری می‌کنیم که تقریب خوبی برای اختیارمعاملات آمریکایی است زیرا هنگامی‌که گام‌های زمانی افزایش می‌یابند، ارزش مشتقات برمودایی همگرا به ارزش مشتقات نظیر آمریکایی است.

شبیه‌سازی‌های بر اساس مونت‌کارلو مانند هر روش دیگری دارای مقداری خطا است. در این‌جا برای نخستین بار و به عنوان نوآوری، از تکنیک متغیرهای متضاد به‌منظور کاهش واریانس در الگوریتم دسته‌بندی استفاده شده است. مقایسه‌ی نتایج نشان می‌دهد که این تکنیک به‌طور متوسط خطا را تا نصف کاهش می‌دهد که از اهمیت به‌سزایی برخوردار است.

روش دیگری که برای مقایسه‌ی با روش یاد شده آورده شده است، استفاده از شبکه‌های عصبی مصنوعی برای ارزش‌گذاری اختیارمعاملات آمریکایی است. این شبکه‌ها براساس عملکرد نورون‌های بیولوژیک بنا نهاده شده‌اند و در بسیاری از علوم کاربرد دارند. در این‌جا مدل‌های متفاتی را برای اختیارمعاملات خرید و فروش در نظر می‌گیریم و علاوه بر مقایسه‌ی آن‌ها با یگدیگر، عملکرد آن‌ها را در موضع ارزش‌گذاری با الگوریتم دسته‌بندی و الگوریتم دسته‌بندی با استفاده از تکنیک کاهش واریانس به آزمون می‌گذاریم.

در این پایان‌نامه که براساس مقالات [۳۵] و [۴۶] تهیه و تنظیم شده است، به بررسی نقاط قوت و ضعف برخی از الگوریتم‌ها، برپایه‌ی شبیه‌سازی با ابعاد گوناگون و پیچیدگی‌های مضاعف می‌پردازیم. به ویژه از میان روش‌های برپایه شبیه‌سازی مونت‌کارلو به بررسی دقیق الگوریتم دسته‌بندی می‌پردازیم که برای نخستین بار در سال ۱۹۹۳ توسط تایلی ارائه شد[۴۴] . برای مشاهده‌ی جزئیات شبیه‌سازی مونت‌کارلو جهت ارزش‌گذاری مشتقات مالی به بویل (۱۹۷۷) در [۴] و بویل و گلسرمن (۱۹۹۷) در [۲۵] و برای یادآوری همه‌ی روش‌های عددی به بویل و دیتمپل (b۱۹۹۷) در [۸] رجوع کنید. هم‌چنین مقایسه‌ی برخی شبیه‌سازی‌های براساس روش‌های عددی در لاپریس و دیگران در [۳۵] ارائه شده است.

بقیه این پایان‌نامه به‌صورت زیر سازمان یافته است. در فصل ۲ تعاریف و مفاهیم پایه‌ای لازم ارائه شده است. در فصل ۳ به نظریه‌ی بازارهای مالی می‌پردازیم که در آن فرض‌های اساسی و چگونگی ارزش‌گذاری و مدل‌های اساسی برای دارایی‌هایی بنیادین بیان شده است. در فصل ۴ روش‌های مونت‌کارلو و در فصل ۵ تکنیک شبکه‌های عصبی برای

[10] Fu
[11] Hu
[12] Eglof

ارزش‌گذاری اختیارمعاملات آمریکایی تشریح شده‌اند و سرانجام در فصل ۶ داده‌های واقعی بازار و نتایج مقایسه‌ی روش‌های یاد شده آمده است.

فصل ۲

تعاریف و مفاهیم پایه

در این فصل تعاریفی را ارائه می‌دهیم که برای درک مطلب ضروری هستند. مطالب آمده در این فصل برگرفته از مراجع [۴۵] ، [۲] ، [۴۰] ، [۲۷] ، [۲۸] ، [۳] است.

۱.۲ تعاریف و مفاهیم پایه

۱.۱.۲ σ -جبر

اگر Ω یک مجموعه‌ی غیرتهی باشد، σ -جبر $\mathcal{F}$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های Ω است،که

الف)مجموعه‌ی تهی متعلق به $\mathcal{F}$ باشد.

ب)اگر $A \in \mathcal{F}$ ،آن‌گاه $A^c \in \mathcal{F}$ است.

ج)اگر $A_1, A_2, \dots$ دنباله‌ای از مجموعه‌ها در $\mathcal{F}$ باشند،آن‌گاه اجتماعشان یعنی $A_1 \cup A_2 \cup \dots$ نیز متعلق به $\mathcal{F}$ باشد.

۲.۱.۲ σ -جبر تولید شده

اگر $\mathcal{A}$ یک کلاس از زیرمجموعه‌های Ω باشد کوچکترین σ-جبر تولید شده توسط $\mathcal{A}$ با

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap_{\mathcal{F}\in\mathcal{L}(\mathcal{A})} \mathcal{F}$$

تعریف می‌شود که در آن $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ مجموعه‌ای از همه‌ی σ -جبرهای شامل کلاس $\mathcal{A}$ است.

۳.۱.۲ مجموعه بورل

کوچکترین σ -جبر تولیدشده توسط خانواده‌ی مجموعه‌های باز داخل $\mathbb{R}$ را مجموعه‌های بورل حقیقی می‌نامند. (به‌طور کلی اگر τ یک توپولوژی باشد آن‌گاه عناصر $\sigma(\tau)$ را مجموعه‌های بورل می‌نامند.)

۴.۱.۲ فضای اندازه‌پذیر

یک زوج مرتب $(\Omega, \mathcal{F})$ که Ω یک مجموعه‌ی دلخواه و $\mathcal{F}$ یک σ -جبر از زیرمجموعه‌های Ω است، یک فضای اندازه‌پذیر نامیده می‌شود.

۵.۱.۲ تابع اندازه‌پذیر

اگر $(\Omega, \mathcal{F})$ یک فضای اندازه‌پذیر و $f : \Omega \to \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی مقدار باشد، آن‌گاه تابع f را اندازه‌پذیر گویند هرگاه به‌ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f^{-1}\{(-\infty, \alpha)\} \in \mathcal{F}.$$

۶.۱.۲ متغیر تصادفی

یک متغیر تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ تابعی حقیقی و اندازه‌پذیر مثل $X : \Omega \to \mathbb{R}$ است که به‌ازای هر زیرمجموعه بورل $\mathcal{B} \in \mathbb{R}$

$$X^{-1}(\mathcal{B}) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \mathcal{B}\} \in \mathcal{F}.$$

متغیرهای تصادفی می‌توانند به صورت گسسته یا پیوسته مطرح گردند. یک متغیر تصادفی گسسته، متغیر تصادفی است که فقط می‌تواند تعداد متناهی و یا نامتناهی شمارش‌پذیری از مقادیر را اختیار کند.

علاوه‌بر متغیرهای تصادفی گسسته، متغیرهای تصادفی دیگری هم وجود دارند که مقادیر ممکن آن‌ها غیر قابل شمارش هستند. مانند طول عمر یک ترانزیستور. X یک متغیر تصادفی پیوسته است اگر یک تابع غیرمنفی f که به‌ازای همه‌ی مقادیر حقیقی x تعریف شده است، با خاصیت زیر به‌ازای هر زیرمجموعه B از اعداد حقیقی وجود داشته باشد :

$$P\{X \in \mathbb{R}\} = \int_B f(x)dx$$

آن‌گاه تابع f را تابع چگالی احتمال یا به‌طور خلاصه، چگالی احتمال متغیر تصادفی X می‌نامند.

۷.۱.۲ نمونه تصادفی

متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع $X_1, X_2, ..., X_n$ را که دارای توزیع مشترک F هستند، یک نمونه‌ی تصادفی nتایی از این توزیع می‌نامند.

۸.۱.۲ فرایند تصادفی

اگر $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ یک فضای احتمال و T یک مجموعه‌ی دلخواه باشد، یک فرایند تصادفی روی این فضا خانواده‌ای چون $\mathbb{X} = \{X_t\}_{t\in T}$ است که در آن به ازای هر t در مجموعه اندیس‌گذار T، X_t یک متغیر تصادفی روی $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$

باشد. اغلب t به زمان تعبیر می‌شود و X_t را حالت فرایند در زمان t می‌نامند. E فضای حالت است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$E = \{X_t(\omega) \; : \; \omega \in \Omega, t \in T\}.$$

گونه‌های متفاوتی از فرایندهای تصادفی موجود است. براساس شمارا و غیرشمارا بودن E و T چهار حالت دسته‌بندی برای فرایندهای تصادفی وجود دارد :

الف) اگر E و T هر دو شمارا باشند،آن‌گاه فرایند تصادفی گسسته‌زمان و گسسته‌حالت است.

ب) اگر E و T هر دو ناشمارا باشند، آن‌گاه فرایند تصادفی پیوسته‌زمان و پیوسته‌حالت است.

ج) اگر E شمارا و T ناشمارا باشد، آن‌گاه فرایند تصادفی پیوسته‌زمان و گسسته‌حالت است.

د) اگر E ناشمارا و T شمارا باشد، آن‌گاه فرایند تصادفی را گسسته‌زمان با فضای حالت پیوسته گویند.

۹.۱.۲ مسیر نمونه‌ای

هر فرایند تصادفی X را می‌توان تابعی از دو متغیر t و ω که $(t, \omega) \to X(t, \omega)$ در نظر گرفت. به‌ازای هر ثابت $t \in T$، $\Omega \to \mathbb{R} \; : \; X_t(\omega) \to \omega$ یک متغیر تصادفی است و به‌ازای $\omega \in \Omega$، تابع

$$t \to X_t(\omega) \; : \; T \to \mathbb{R}$$

را یک مسیر نمونه‌ای [۱] از فرایند X گویند.

۱۰.۱.۲ حرکت براونی

در سال ۱۸۲۸ رابرت براون[۲] گیاه‌شناس اسکاتلندی مقاله‌ای نوشت که در آن مشاهداتش را از ذرات کوچکی که در مایعات شناور می‌شوند و به‌طور تصادفی در طول مسیرهای زیگزاگ حرکت می‌کنند، به منظور یافتن توجیح فیزیکی این پدیده ثبت کرد. او که در آغاز تنها علاقه‌مند به بررسی رفتار گرده‌ی گیاهان در مایعات به‌منظور تحقیق مسأله‌ی باردهی گیاهان بود، در مراحل اولیه‌ی تحقیقاتش متقاعد شد که یک فرم تجربی از زندگی که برای همه‌ی ذره‌ها متداول است را یافته‌است و بقیه‌ی توجیحات به نیروی کشش میان ذره‌ها، شرایط ناپایدار ذرات معلق درون مایعات، فعالیت‌های مویی و غیره برمی‌گردد که علی‌رغم پیوستگی، دارای حرکات میکروسکوپی زیگزاگ مانند نامنظمی هستند. این حرکت که تا قبل از آن کشف نشده بود، حرکت براونی [۳] نامیده شد.

نخستین تقریب‌ها به مدل‌سازی ریاضی حرکت براونی توسط بشلیر [۴] (۱۹۰۰) و انیشتین [۵] (۱۹۰۵) صورت گرفت و

[۱] Sample Path
[۲] Robert Brown
[۳] Brownian Motion
[۴] Bachelier
[۵] Einstein

هر دو توزیع نرمال را مدل مناسبی برای توضیح حرکت براونی دانستند و توجیحات فیزیکی پدیده‌ی مشاهده شده را به صورت زیر ارائه دادند: "حرکات بی‌نظم از ذرات به اندازه‌ی کافی کوچک در مایعات و گازها منجربه تعداد عظیمی از برخوردها با مولکول‌های مجاور، حتی در بازه‌های زمانی کوتاه، می‌شود (در شرایط فیزیکی متوسط حدود $۱۰^{۱۲}$ برخورد در هر ثانیه) که این برخوردها در جهات تصادفی و در زمان‌های تصادفی رخ می‌دهند". وینر[۶] در سال ۱۹۱۸ یک رفتار ریاضی کلی از حرکت براونی ارائه داد که تا کنون بهترین مدل ارائه شده برای حرکت براونی است. به همین جهت آن را فرایند وینر نیز می‌خوانند. امروزه حرکت براونی یکی از قدرتمندترین ابزارهای تئوری و کاربردی مدل‌سازی تصادفی است که نقش آن می‌تواند با نقش توزیع نرمال در تئوری احتمال مقایسه شود.

تعریف ۱.۱.۲. حرکت براونی

اگر $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$ یک فضای احتمال باشد و $T=[۰,\infty)$ و $E=(-\infty,\infty)$ ، در این صورت فرایند تصادفی $B=\{B_t\}$ را حرکت براونی می‌نامند، هرگاه شرایط زیر در مورد آن برقرار باشد :

الف) این حرکت از صفر شروع شود، یعنی $B_۰\equiv ۰$.

ب) نموهای آن ایستا و مستقل از یکدیگر باشند.

(یعنی به‌ازای هر $s,t\in T$ و هر $h\in\mathbb{R}$ ، $B_t-B_s=B_{t+h}-B_{s+h}$ و به‌ازای هر انتخاب $\{t_i\}_{i=۱}^{n}$ از T با $t_۱<t_۲<\ldots<t_n$ که $n\geq ۱$ ، متغیرهای تصادفی $B_{t_۲}-B_{t_۱},B_{t_۳}-B_{t_۲},\ldots,B_{t_n}-B_{t_{n-۱}}$ مستقل از یکدیگر باشند.)

ج) به‌ازای هر $t>۰$ ، B_t دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $\sigma^۲t$ باشد، یعنی $B_t\sim N(۰,\sigma^۲t)$.

د)به‌ازای هر $\omega\in\Omega$ ، $B_t(\omega)$ در سراسر T پیوسته باشد.

این شرایط نشان می‌دهد که

۱) به‌ازای هر $t,s\in T$ با $s>t$ ، $B_t-B_s\sim N(۰,\sigma^۲(s-t))$.

۲) حرکت براونی یک فرایند گاوسی است.

۳) به‌ازای هر $t,s\in T$ ، $cov(B_t,B_s)=\sigma^۲min(s,t)$ و $\mu_B(t)=۰$.

اگر $\sigma=۱$ ، در این صورت $\{B_t,t\geq ۰\}$ یک حرکت براونی استاندارد نامیده می‌شود.

همان‌طور که گفته شد حرکت براونی دارای خاصیت مارکوفی است که تعریف آن به‌شکل زیر است :

[۶] Wiener