پایان‌نامه کارشناسی ارشد

مهندسی برق – کنترل

استفاده از رؤیتگر بهینه کالمن فیلتر Unscented (UKF) در سنکرون‌سازی سیستم‌های آشوبناک مرتبه صحیح و کسری به همراه کاربرد آن در مخابرات امن

نگارنده:

کمیل نصرتی

اساتید راهنما:

دکتر ناصر پریز　　دکتر اسد عازمی

گروه برق، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

بهار ۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحیم

تشکر و قدردانی:

بدینوسیله مراتب سپاس و قدردانی خود را از زحمات اساتید ارجمند آقایان **دکتر پریز** و **دکتر عازمی** در پیشنهاد موضوع رساله و راهنمایی‌های ارزنده‌شان بیان می‌دارم.

همچنین از اعضا هیات داوران، اساتید محترم آقایان **پروفسور اصغریان** و **پروفسور وحیدیان** که این رساله را مورد ارزیابی قرار داده‌اند نیز کمال تشکر را دارم.

تقدیم به

پدر و مادر مهربان و فداکارم،

به خاطر همه ی زحماتی که برایم کشیده اند.

بسمه تعالی

مشخصات رساله/پایان نامه تحصیلی دانشجویان

دانشگاه فردوسی مشهد

عنوان رساله/پایان نامه: استفاده از رؤیتگر بهینه فیلتر کالمن Unscented (UKF) در سنکرون‌سازی سیستم‌های آشوبناک مرتبه صحیح و کسری به همراه کاربرد آن در مخابرات امن

نام نویسنده: کمیل نصرتی

نام استاد(ان) راهنما: دکتر ناصر پریز – دکتر اسد عازمی

نام استاد(ان) مشاور: –

دانشکده : مهندسی	**گروه: برق**	**رشته تحصیلی: مهندسی برق - کنترل**
تاریخ تصویب:		**تاریخ دفاع: ۸۹/۴/۷**
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد ●	**دکتری ○**	**تعداد صفحات: ۱۰۸**

چکیده رساله/پایان نامه :

در سال‌های اخیر سنکرون‌سازی سیستم‌های آشوبی و مخابرات امن آشوبی مبتنی بر رؤیتگر توجهات زیادی را به سمت خود جلب نموده است. فیلتر کالمن توسعه یافته (EKF)، به عنوان یک رؤیتگر بهینه، به عنوان ابزاری مهم در تخمین حالت سیستم‌های غیرخطی مورد پذیرش قرار گرفته است. با این وجود، پیچیدگی محاسباتی و ناکارآمدی آن وقتی مشتقات تحلیلی آن (ژاکوبین و هسین) نمی‌توانند محاسبه شوند، بر کاربرد آن در بسیاری زمینه‌ها اثر می‌گذارد. در این پایان‌نامه، از فیلتر کالمن Unscented (UKF) برای تخمین متغیرهای حالت سیستم‌های دینامیکی آشوبی استفاده می‌شود. سنکرون‌سازی آشوبی در حضور نویز فرآیند و اندازه‌گیری با استفاده از UKF انجام شده است. نتایج شبیه‌سازی روی سیستم آشوبی لورنز مرتبه صحیح، سیستم راسلر مرتبه صحیح و سیستم دینامیکی لورنز مرتبه کسری با استفاده از UKF و مقایسه آن با EKF نشان می‌دهد که UKF دقت و کارایی بالاتری نسبت به EKF دارد. در این پایان‌نامه برای اولین بار، یک روش مخابرات امن آشوبی مرتبه صحیح و کسری با استفاده از UKF ارائه شده است. سنکرون‌سازی آشوبی با استفاده از UKF در حضور نویز جمع‌پذیر کانال و فرآیند پیاده‌سازی شده است. در سیستم پیشنهاد شده، امنیت آن بر اساس انتشار آن در حوزه فرکانس و رمزگشایی در حوزه زمان، تضمین می‌شود. در این پایان‌نامه فواید اصلی استفاده از سیستم‌های مرتبه کسری، افزایش خاصیت غیرخطی و انتشار طیف توان مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای تشریح اثر طرح پیشنهاد شده، مثال‌های عددی مبتنی بر سیستم دینامیکی آشوبی مرتبه صحیح و کسری ارائه شده است.

کلید واژه: ۱. آشوب ۲. سنکرون‌سازی ۳. فیلتر کالمن Unscented ۴. مخابرات امن ۵. سیستم‌های رمزنگاری آشوبی	**امضای استاد راهنما:** **تاریخ:**

فهرست مطالب

* * *

* * *

* * *

* * *

فهرست اشکال

* * *

فهرست جداول

« مقدمه »

سیستم‌های غیرخطی، که در دهه‌های اخیر مورد توجه بسیاری از دانشمندان قرار گرفته است، نقش حیاتی در مطالعه رویدادهای طبیعی بازی می‌کند. این توجه و گرایش به سمت سیستم‌های غیرخطی با کشف آشوب[1] افزایش یافت. یکی از اصول پایه‌ی علمی، در ارتباط با سیستم‌های قطعی[2]، این است که رفتار این سیستم‌ها قابل پیش‌بینی می‌باشد. با این حال کشف رویداد آشوب، اثبات کرد که این دیدگاه ممکن است همواره صحیح نباشد.

آشوب نظریه‌ای نسبتاً جدید می‌باشد، که کاربردهای نامحدودی در همه زمینه‌های علمی و تکنولوژی از قبیل ریاضیات، فیزیک، بیولوژی، شیمی و نیز مهندسی دارد. آشوب رفتاری نامنظم را در یک بازه معین تشریح می‌کند. نوع رفتار، که در دهه‌های اخیر رفتار آشوبناک[3] نامیده می‌شود [۱] نامنظم و تقریبا تصادفی می‌باشد، و کاملاً مشابه رفتار سیستمی است که شدیداً تحت تاثیر نویز تصادفی قرار گرفته است. سیستم‌های آشوبناک، تعریف‌شده با سیستم‌های دینامیکی که دارای این‌گونه رفتارهای نویز مانند می‌باشند، گاهی سیستم‌های بسیار ساده‌ای می‌باشند و تقریباً آزاد از نویز هستند. در حقیقت، این سیستم‌ها کاملاً قطعی می‌باشند، یعنی با مشخص بودن شرایط اولیه و معادلات تشریحی یک سیستم، رفتار آینده سیستم می‌تواند برای همه زمان‌ها پیش‌بینی شود.

یکی از مهم‌ترین خصوصیات سیستم‌های دینامیکی آشوبناک پیش‌بینی‌ناپذیری آن می‌باشد، که به دلیل حساسیت بالای آن به شرایط اولیه و پارامترهای سیستم به وجود می‌آید. این موضوع در دنیا به نام ″ اثر پروانه‌ای ″ مطرح می‌باشد [۲]. این مفهوم بدین معنی است که در یک سیستم آشوبی غیرخطی، حتی تغییرات کوچک در شرایط اولیه یا پارامترهای کنترل، خروجی‌های کاملاً متفاوتی را نتیجه می‌دهد. این موضوع باعث می‌شود که سیستم‌های آشوبی غیرخطی با گذشت زمان کاملاً پیش‌بینی‌ناپذیر باشند [۲] و [۳].

از خصوصیات مهم دیگر سیستم‌های آشوبناک، قابلیت آنها به سنکرون‌شدن با یکدیگر تحت شرایطی خاص می‌باشد. از آنجایی که رفتار دراز مدت سیستم‌های دینامیکی آشوبناک، قابل پیش‌بینی نمی‌باشد، بنابراین سنکرون‌سازی غیر ممکن به نظر می‌رسد. با این وجود، اثبات شده است که تحت فرضیات خاص دو یا چند سیستم

[1] Chaos
[2] Deterministic
[3] Chaotic

آشوبی، که با یکدیگر تزویج شده و از شرایط اولیه متفاوتی آغاز می‌شوند، می‌توانند دستخوش حرکت یکسانی گردند [۴] و [۵].

در سال‌های اخیر با رویکرد جدید استفاده از مفهوم مشتقات کسری، به مطالعه سیستم‌های دینامیکی آشوبی پرداخته شده است. با توجه به رشد روزافزون کاربرد اپراتورهای مرتبه کسری و اهمیت آنها در مدل‌سازی سیستم‌های فیزیکی، شیمیایی، پدیده‌های بیولوژیکی، مکانیک ذرات و... ، مطالعه رفتارهای معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری، امری ضروری به نظر می‌رسد [۶] و [۷]. به طور کلی محاسبات مرتبه کسری، در مدل‌سازی سیستم‌هایی که رفتار میکروسکوپی اجزاء آن، بر روی رفتار ماکروسکپی سیستم تاثیرگذار است، کاربرد دارد.

پاسخ یک معادله دیفرانسیل که توصیف‌گر دینامیک سیستم می‌باشد به ازاء ورودی و شرایط اولیه مختلف رفتارهای حالت دائم متفاوتی را به نمایش می‌گذارد. این معادله دیفرانسیل می‌تواند با دیدگاهی کلی‌تر شامل مشتقات کسری باشد، که به آن معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری می‌گوییم. آنچه در یک سیستم دینامیکی چه در حالت خاص با مشتقات مرتبه صحیح و چه با مشتقات مرتبه کسری مهم است نوع رفتار، پایداری، محدوده پاسخ و ... می‌باشد. بعضی از سیستم‌های مرتبه کسری می‌توانند رفتار آشوبی از خود نشان دهند و بنابراین تمام خصوصیاتی را که در یک سیستم آشوبی مرتبه صحیح وجود دارد، شامل می‌شود. در نتیجه مسئله سنکرون‌سازی این سیستم‌ها نیز حائز اهمیت است [۸] و [۹] و [۱۰].

امروزه، همراه با پیشرفت سریع تکنولوژی اطلاعات، کامپیوتر به عنوان اصلی‌ترین مؤلفه برای انواع کاربردها از قبیل مخابرات، ارسال نامه‌های الکترونیکی، فعالیت‌های آن‌لاین و غیره مورد استفاده قرار می‌گیرد. به‌علاوه، اینترنت و سیستم‌های مخابراتی به عنوان مهم‌ترین مؤلفه‌های تکنولوژی اطلاعات برای ایجاد اتصال در سطوح محلی و عمومی، برای به اشتراک گذاردن اطلاعات و داده مورد استفاده قرار می‌گیرند. این باعث افزایش وسیع در انتقال پیام‌هایی شامل اطلاعات مفید، از طریق روش‌های مختلف می‌شود. بنابراین ایجاد و برقرای امنیت و پوشش اطلاعات در این قبیل انتقال‌ها، پیش‌زمینه‌ای برای محافظت اطلاعات و همچنین سیستم‌های دخیل در انتقال به حساب می‌آید. رمزنگاری به دلیل نیاز به امنیت و محافظت بیشتر مخصوصاً زمانی که پیام روی یک واسط ناامن ارسال می‌شد، بسیار ضروری به نظر می‌رسید. یکی از مهمترین ویژگی‌های سیگنال‌های ناشی از سیستم‌های آشوبی – مرتبه صحیح و کسری – ، رفتاری بسیار شبیه به نویز می‌باشد. لذا از این ویژگی برای رمزکردن اطلاعات استفاده زیادی می‌شود [۱۱] و [۱۲].

پتانسیل کاربرد سیستم‌های آشوب در زمینه‌های متعدد باعث گسترش روز افزون آنها گردیده است. از این سیستم‌ها می‌توان در پنهان کردن اطلاعات، صوت و تصویر استفاده کرد. همچنین این سیستم‌ها در امنیت لایه‌های شبکه‌های سوییچینگ داده قابل استفاده هستند. آشوب نه تنها طیف اطلاعات را می‌گستراند، بلکه به عنوان یک سیستم رمزنگاری عمل می‌کند. بنابراین بدون دانستن نوع دینامیک آشوبناک که ارسال بر اساس آن صورت

می‌گیرد، برای کاربر غیر مجاز آگاه از ارسال، بسیار مشکل است تا به اطلاعات دسترسی پیدا کند. علاوه بر این، چنین سیگنال‌هایی، در برابر کاستی‌های کانال مانند پدیده تارکنندگی، انتشار چند مسیره و جمینگ مقاوم می‌باشند. با توجه به حساسیت شدید سیستم‌های آشوبناک به شرایط اولیه و پارامترها، مجموعه بسیار بزرگتری از سیگنال‌های ناهمبسته قابل تولید بوده و همچنین طول رشته‌های آشوبناک مانند رشته‌های مرسوم شبه نویز محدود نیست. کارایی رشته‌های آشوبناک در مخابرات دسترسی چندگانه، تقریباً مشابه کارایی رشته‌های مرسوم می‌باشد. علاوه بر این، به خاطر ظاهر شبه نویز، رشته‌های آشوبناک از لحاظ امنیت دارای برتری می‌باشند. مزیت دیگر استفاده از رشته‌های آشوبناک در سیستم‌های مخابرات طیف گسترده، ارزانی و سادگی تولید آنها است.

نمای کلی این پایان‌نامه به شرح زیر می‌باشد: در فصل اول، نگاهی کلی و گذرا بر آشوب و سیستم‌های آشوبناک خواهیم داشت. تعریف، انواع و خصوصیات آشوب و سیستم‌های آشوبناک از مباحث این فصل می‌باشد. همچنین کنترل آشوب که چگونگی برخورد با سیستم‌های آشوبی را بیان می‌کند، مطالبی به میان خواهیم آورد. فصل دوم سیستم‌های مرتبه کسری و سیستم‌های آشوبی مرتبه کسری را مورد بررسی قرار می‌دهد. اصول و تعاریف پایه مربوط به سیستم‌های مرتبه کسری و اوپراتورهای مرتبه کسری مانند مشتق و انتگرال مرتبه کسری را بیان می‌کنیم. در ادامه توصیف هندسی از مشتقات مرتبه کسری برای یافتن تفکری هندسی از مشتقات مرتبه کسری را مطرح می‌کنیم. معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری و روش‌های حل موجود، از دیگر مباحث این فصل می‌باشد. در نهایت آشوب در سیستم‌های مرتبه کسری مورد بررسی می‌گردد. فصل سوم به معرفی روش‌های سنکرون‌سازی آشوب اختصاص دارد. دو طرح اصلی برای تزویج و سنکرون‌سازی سیستم‌های آشوبی یکسان وجود دارد که به صورت کامل مورد بررسی قرار می‌گیرند. یکی از این روش‌ها سنکرون‌سازی مبتنی بر رؤیت‌گر نام دارد که در تئوری کنترل شناخته شده می‌باشد. علاوه بر این کاربرد سنکرون‌سازی آشوب در مخابرات امن در پایان این فصل مورد بررسی قرار می‌گیرد. اما مهم‌ترین بخش این پایان‌نامه فصل چهارم می‌باشد که به فیلتر کالمن Unscented و سنکرون‌سازی با استفاده از آن اختصاص دارد. در این فصل ضمن بیان مفاهیم و روابط موجود در فیلتر کالمن توسعه یافته و Unscented، از آنها برای سنکرون‌سازی سیستم‌های آشوبی مرتبه صحیح و کسری استفاده کرده و نتایج حاصل را در قالب خطای سنکرون‌سازی با هم مقایسه می‌کنیم. در نهایت از این نتایج استفاده کرده، و از آن در مخابرات امن با ارائه یک طرح پیشنهادی بهره می‌گیریم. در نهایت نتایج این رساله و پیشنهادات در راستای آن در فصل پنجم خلاصه می‌شود.

« فصل اول »

آشوب و سیستم‌های آشوبناک

یکی از عظیم‌ترین کارهای انجام‌شده در تاریخ بشر، حساب دیفرانسیل و قوانین حرکت کشف‌شده توسط نیوتن در قرن هفدهم، نگاهی قطعی[1] به طبیعت را عرضه کرد و منجر به خوش‌بینی زیادی در مورد توانایی بشر برای پیش‌بینی رفتار سیستم‌های دینامیکی شد. یافته‌های بعدی دانشمندان حکایت از آن داشت که طبیعت سیستم‌های دینامیکی بسته به طبیعت نیروهای عمل‌کننده روی آن‌ها و همچنین حالت‌های اولیه آن‌ها، به‌صورت کامل قابل تعیین می‌باشند.

براساس قوانین نیوتن در فیزیک، فرض می‌شود که اگر شرایط اولیه مربوط به هر سیستم دینامیکی به‌صورت دقیق قابل اندازه‌گیری باشد، رفتار سیستم دینامیکی به‌صورت دقیق قابل پیش‌بینی می‌باشد. هر چه دقت اندازه‌گیری در شرایط اولیه افزایش یابد، در نتیجه دقت پیش‌بینی ممکن است افزایش یابد. با این حال، در اوایل قرن بیستم، پوانکاره[2]، یکی از بزرگترین ریاضیدانان فرانسوی، متوجه شد که در بعضی از سیستم‌های بزرگ[3]، خاصیتی پیش‌بینی‌ناپذیر در سیر تکاملی سیستم وجود دارد. به این معنی که حتی یک خطای کوچک در اندازه‌گیری شرایط اولیه ممکن است پیش‌بینی موقعیت آینده سیستم را غیرممکن سازد. در واقعیت این پیش‌بینی‌ناپذیری اکنون آشوب[4] نامیده می‌شود. هر چند پوانکاره نتوانست واژه آشوب را برای توصیف پیش‌بینی‌ناپذیری در آن زمان استفاده کند، او به صورت ریاضی ثابت کرد که حتی اگر اندازه‌گیری با دقت زیاد انجام شود، خاصیت پیش‌بینی‌ناپذیری برای خروجی‌ها در امتداد اندازه‌گیری غیردقیق، نه تنها کاهش نمی‌یابد بلکه بزرگ نیز می‌شود [۱۳].

نیم قرن بعد، یک هواشناس در دانشگاه ام.آی.تی به نام ادوارد لورنز[5]، بر روی پروژه شبیه‌سازی الگوهای آب و هوا روی کامپیوتر کار کرد. او به‌صورت تصادفی رویداد عجیبی را شناسایی کرد که با بعضی پارامترهای خاص، سیستم قطعی توصیف شده توسط معادلات دیفرانسیل معمولی که به صورت تئوریکی برای مدل کردن حرکت جریان جو هوا استفاده می‌شود، غیر قابل پیش‌بینی می‌باشد [۱۴]. این رویداد به‌عنوان پدیده آشوب شناخته شد. بعد

[1] Deterministic
[2] Poincare
[3] Astronomical systems
[4] Chaos
[5] Edward Lorenz

از آزمایشات متعدد، لورنز مکانیزم تحت آشوب را فاش کرد: سیستم‌های دینامیکی با معادلات ساده و با تنها تعداد کمی متغیر رفتار بسیار پیچیده‌ای را از خود بروز می‌دهند که غیر قابل پیش‌بینی می‌باشند. با این کشف دوره جدیدی در درک بشر از طبیعت آغاز گردید و میل و اشتیاق زیادی در دانشمندان برای مطالعه پدیده آشوب ایجاد کرد.

۱-۱ نمونه‌هایی از پدیده آشوب

درک بشر در مورد طبیعت و پدیده‌های جامعه در اصل از رویدادهای خاص ریشه می‌گیرد و کشف آشوب از این قاعده مستثنی نیست. در این بخش به‌صورت خلاصه پدیده آشوب را به کمک دو مثال از این‌گونه سیستم‌ها، معرفی می‌کنیم.

۱-۱-۱ نگاشت لجستیک[1]

مثال اول از سیستم‌های آشوبناک، مدل ریاضی بسیار ساده در زمینه بوم‌شناسی[2] می‌باشد و نگاشت لجستیک یا معادله لجستیک نامیده می‌شود، که اغلب برای توصیف رشد جمعیت زیستی مورد استفاده قرار می‌گیرد. به دلیل سادگی مدل ریاضی این سیستم، در مطالعه آشوب ابزاری مفید می‌باشد. معادله نگاشت لجستیک توسط معادله (۱-۱) بیان می‌شود [۱۵].

$$x_{k+1} = \mu x_k(1 - x_k) = f(x_k)\,, \qquad k = 1,2,\ldots \qquad (۱-۱)$$

μ پارامتر ثابتی است که به شرایط محیط بومی بستگی دارد و x_k جمعیت گونه‌های تولیدشده در یک محیط کنترل‌شده مربوط به نسل k را نشان می‌دهد. برای نگه داشتن تعداد در حالتی کنترل‌پذیر، فرض می‌کنیم که x_k درصد باند بالای قبلی برای جمعیت باشد، بنابراین $0 \le x_k \le 1$. بااستفاده از این معادله و با داشتن جمعیت اولیه x_0، ممکن است به نظر برسد که پیش‌بینی رفتار x_k ساده باشد. خواهیم دید که این جمله به ازاء مقادیر خاصی از پارامتر μ صحیح نمی‌باشد. برای مقادیر متفاوت از پارامتر μ، تحلیل‌های دینامیکی مدل معادله لجستیک می‌تواند به صورت ادامه بیان شود:

۱. برای $0 < \mu \le 1$ ، مشخصه‌های دینامیکی معادله لجستیک بسیار ساده بوده، و $x = 0$ تنها نقطه تعادل یا ایستا در محدوده x می‌باشد، که به این مفهوم است که جمعیت گونه‌ها کاهش یافته و سپس از بین می‌رود.

۲. برای $1 < \mu \le 3$ ، دو نقطه تعادل $x = 0$ و $x = 1 - {}^{1}\!/_{\mu}$ در سیستم دینامیکی معادله لجستیک وجود دارد. در نقطه تعادل $x = 0$، از آنجایی که مسیرهای آغاز شده در نزدیکی آن از آن دور می‌شوند، این نقطه را نقطه ایستای دفع‌کننده می‌نامند. همان‌طور که در شکل ۱-۱(الف) نشان داده شده است، این مسئله ایجاب می‌کند که جمعیت در آغاز افزایش یافته و سپس پایدار شود.

[1] Logistic Map
[2] Ecology

۳. برای $3 < \mu \leq 4$ ، معادله لجستیک همان‌طور که در شکل ۱-۱(ب و ج) نشان داده شده است یک رفتار دینامیکی پیچیده از خود نشان می‌دهد که مقادیر x بین دو مقدار، و سپس ۴ مقدار، سپس ۸، سپس ۱۶ و ... به جلو و عقب نوسان می‌کند. نهایتاً، با افزایش μ ، سیستم هیچ‌وقت به یک سیکل دوره‌ای نرسیده و در عوض رفتار درازمدت آن غیرپریودیک می‌شود و این همان خاصیت آشوب است که در شکل ۱-۱(د) نشان داده شده است.

در اینجا این نکته قابل توجه می‌باشد که مطابق با شکل ۱-۱(ب) سیستم به ازاء $\mu = 3.3$ رفتار پریودیک داشته و سپس وقتی مقدار پارامتر μ به $\mu = 3.53$ تغییر می‌کند، این خاصیت پریودیکی دو برابر حالت قبل خواهد شد. شکل ۱-۱(ج) رفتار سیستم در حالت $\mu = 3.53$ را نشان می‌دهد. این پدیده به Period-Doubling Bifurcation اشاره دارد که جزء مسیرهای آغازین به آشوب می‌باشد [۱۶].

۱-۱-۲ معادلات لورنز

مثال دوم ما از سیستم‌های آشوبناک مدل بسیار ساده‌شده از یک سیال هادی[1] می‌باشد که توسط لورنز در سال ۱۹۶۳ معرفی گردید [۲]. در این مدل نمونه لورنز نشان داد که حتی یک سیستم خیلی ساده ممکن است رفتار غیرعادی و پیش‌بینی‌ناپذیری از خود نشان دهد. سیستم لورنز می‌تواند به وسیله سه معادله دیفرانسیل همزمان مطابق با رابطه (۱-۲) بیان شود:

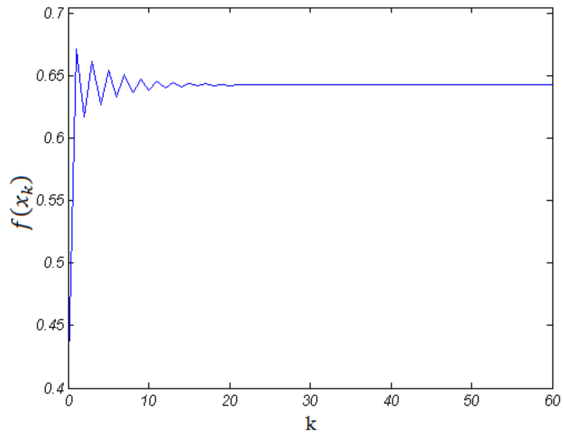
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma(x-y) \\ \frac{dy}{dt} = -xz + \rho x - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z \end{cases} \qquad (۱-۲)$$

متغیرهای حالت x، y و z مربوط به خصوصیات فیزیکی سیال هادی می‌باشند و σ عدد پراندتل[2] نامیده می‌شود که معمولا برابر با $\sigma = 10$ می‌باشد. پارامتر β مربوط به اندازه محیط نمایش داده شده به وسیله این مدل سیال هادی بوده و برابر با $\beta = 8/3$ می‌باشد. نهایتاً ρ عدد رایلی[3] بوده و پارامتر کنترل تنظیم‌پذیر نامیده می‌شود. این مدل، که سیستم لورنز نیز نامیده می‌شود، اگرچه بر اساس آنچه که به نظر می‌رسد مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل خیلی ساده است اما به ازاء مقادیر خاص از پارامترها رفتار پیچیده‌ای از خود نشان می‌دهد. در ادامه توضیح خواهیم داد که چرا این سیستم دینامیکی ساده ممکن است رفتار آشوبناک غیرعادی را از خود نشان دهد.

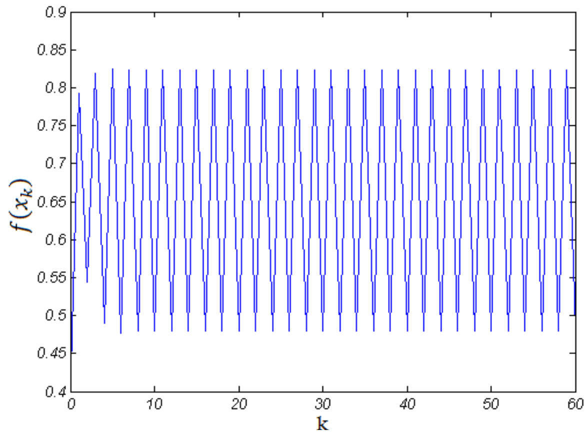
از معادله (۱-۲) می‌توان نشان داد که نقاط تعادل یا ثابت سیستم لورنز شرایط زیر را برآورده می‌کنند:

$$\begin{cases} x = y \\ x(\rho - 1 - z) = 0 \\ x = \pm\sqrt{\beta z} = \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)} \end{cases} \qquad (۱-۳)$$

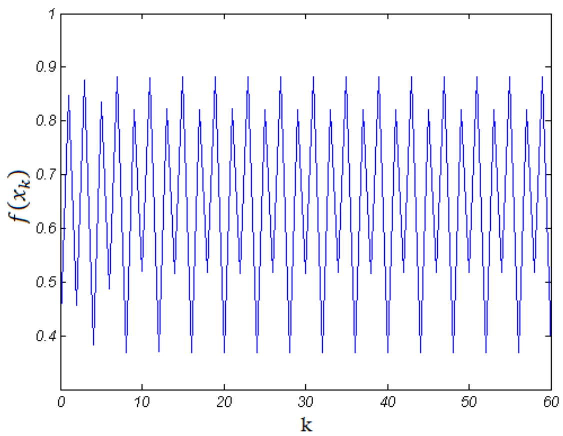
[1] Convecting Fluid
[2] Prandtl
[3] Rayleigh



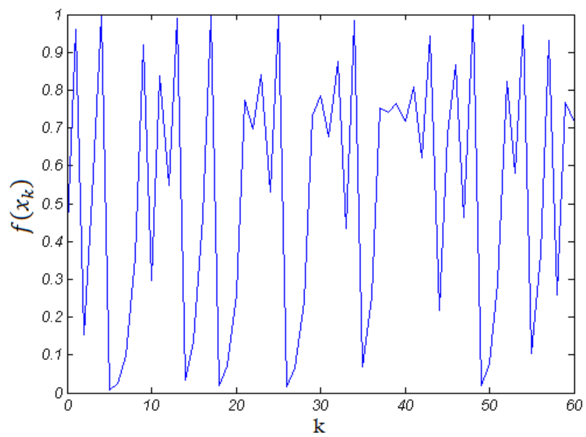
$\mu = 2.8$ (الف)



$\mu = 3.3$ (ب)



$\mu = 3.53$ (ج)



$\mu = 4.0$ (د)

شکل ۱-۱: نگاشت لجستیک با پارامترهای متفاوت

هنگامی که $\rho < 1$ باشد تنها یک نقطه ثابت وجود دارد: $O(0,0,0)$. وقتی $\rho > 1$ باشد سه نقطه ثابت متمایز به‌صورت زیر وجود دارد:

$$\begin{cases} O(0,0,0) \\ P^{+}\left(\sqrt{\beta(\rho-1)}, \sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1\right) \\ P^{-}\left(-\sqrt{\beta(\rho-1)}, -\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1\right) \end{cases} \tag{۴-۱}$$

در نقطه ثابت $O(0,0,0)$، به‌دست آوردن ماتریس ژاکوبی در این نقطه ساده بوده و به‌صورت زیر می‌باشد:

$$A = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} \tag{۵-۱}$$

معادله (۱-۶) معادله مقادیر ویژه آن را نشان می‌دهد.

$$(\beta+\lambda)\big((\sigma+\lambda)(1+\lambda)-\rho\sigma\big) = 0 \tag{۶-۱}$$

بنابراین مقادیر ویژه سیستم عبارتند از:

$$\lambda_1 = -\beta$$
$$\lambda_{2,3} = 0.5(-(\sigma+1) \pm \sqrt{(\sigma+1)^2 - 4\sigma(1-\rho)}) \tag{۷-۱}$$

همانطور که پیداست، به ازاء $\rho < 1$ هر سه مقدار ویژه منفی بوده و این یعنی نقطه ثابت $O(0,0,0)$ نقطه پایدار است (شکل ۱-۲(الف)). هنگامی‌که $\rho > 1$ باشد، از معادله (۱-۷) مشخص است که $\lambda_2 > 0$ بوده، در حالی‌که $\lambda_3 < 0$ می‌باشد. در این حالت نقطه ثابت $O(0,0,0)$ یک نقطه زینی[1] محسوب می‌شود (نقطه‌ی زینی نقطه‌ای است که مسیرها از یک طرف به آن جذب و از طرف دیگر از آن دفع می‌شوند).

برای نقاط ثابت P^+ و P^-، ماتریس ژاکوبی می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$A = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \sqrt{\beta(\rho-1)} & \beta(\rho-1) & -\beta \end{bmatrix} \tag{۸-۱}$$

معادله مقادیر ویژه آن عبارت است از:

$$\lambda^3 + (\sigma+\beta+1)\lambda^2 + \beta(\sigma+\rho)\lambda + 2\beta\sigma(\rho-1) = 0 \tag{۹-۱}$$

اکنون یک مقدار از پارامتر ρ را به صورت (۱-۱۰) نظر می‌گیریم

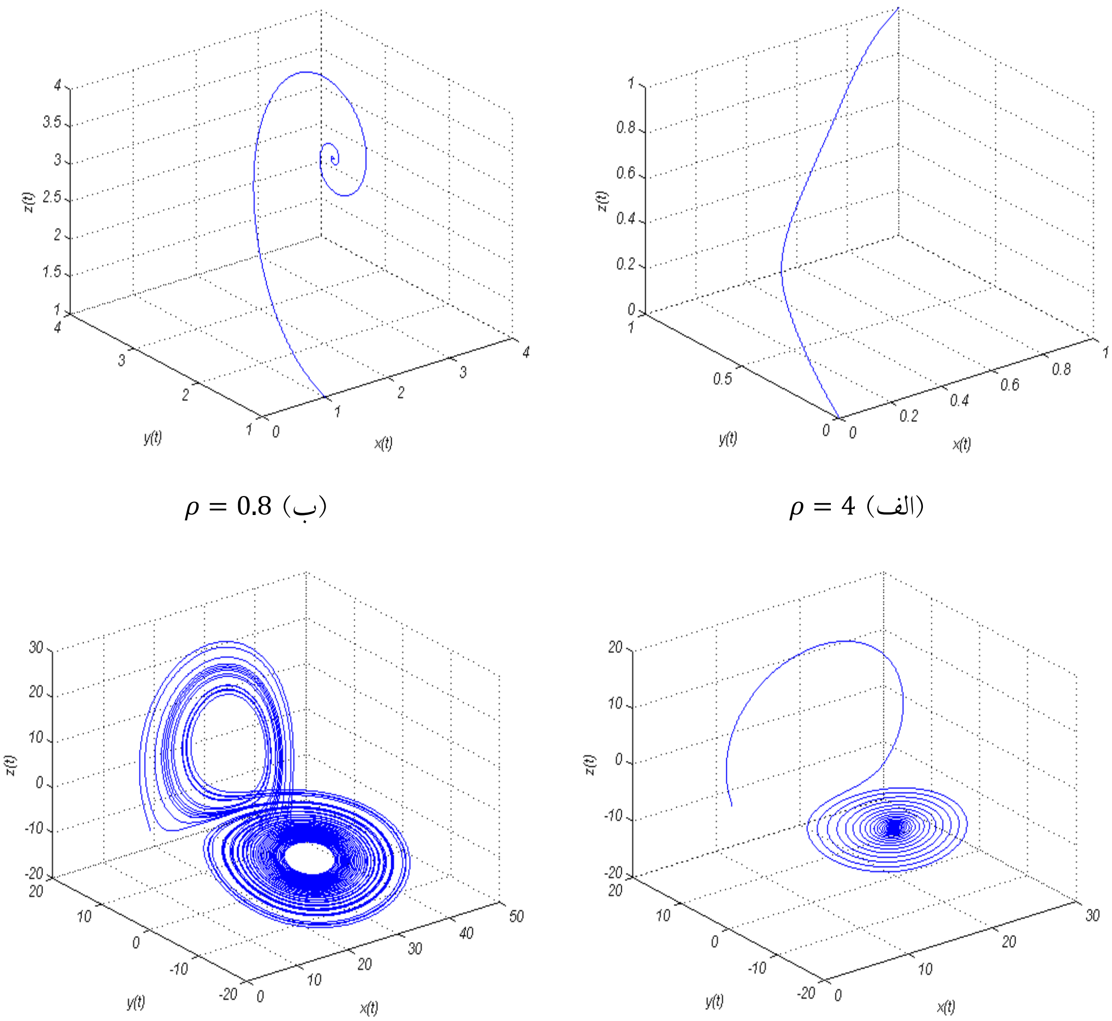
$$\rho_h = \frac{\sigma(\sigma+\beta+3)}{\sigma-\beta-1} \tag{۱۰-۱}$$

برای مثال با در نظر گرفتن مقادیر پارامترهایی که لورنز در نظر گرفت، یعنی $\sigma = 10$ و $\beta = 8/3$ آنگاه $\rho_h = 24.74$ می‌باشد. همان‌طور که دیده می‌شود اگر پارامتر ρ طوری انتخاب شود که داشته باشیم $\rho < \rho_h$ ، معادله (۱-۹) سه مقدار ویژه منفی حقیقی یا یک مقدار ویژه منفی حقیقی و دو مقدار ویژه مزدوج مختلط با بخش حقیقی منفی دارد. یعنی P^+ و P^- نقاط ثابت جاذب بوده و این ایجاب می‌کند که مسیرها به یکی از دو نقطه‌ی ثابت مانند شکل ۱-۲(ب و ج) جذب شوند. از طرف دیگر، اگر پارامتر ρ طوری انتخاب شود که $\rho > \rho_h$ باشد، معادله (۱-۹) یک مقدار ویژه منفی و دو مقدار ویژه مزدوج مختلط با بخش حقیقی مثبت دارد، یعنی نقاط ثابت P^+ و P^- نقاط زینی محسوب شده و رفتار آشوبناک را در سیستم سبب می‌شود. این رفتار در شکل ۱-۲(د) نشان داده شده است.

۱-۲ آشوب

با استفاده از مثال‌های تشریح شده در بالا اکنون درک روشنی از پدیده آشوب داریم. آشوب نوعی از رفتار دینامیکی بسیار پیچیده را نشان می‌دهد که پیچیده‌تر از الگوهای حالت دائمی و دوره‌ای آشنا که در یک سیستم ساده بدون هیچ نویز و آشفتگی خارجی اتفاق می‌افتد، می‌باشد. قبل از ورود به بحث‌های جدی‌تر درباره کاربردهای آشوب و سیستم‌های آشوبناک، مطالعه آن‌ها به‌صورت تئوری لازم و ضروری می‌باشد.

---
[1] Saddle Point



$\rho = 0.8$ (ب) $\rho = 4$ (الف)

$\rho = 25$ (د) $\rho = 17$ (ج)

شکل ۱-۲: رفتار سیستم لورنز به ازا مقادیر متفاوت پارامتر

۱-۲-۱ آشوب چیست؟

هنوز تعریف محکم و جامعی از آشوب در ادبیات دانشمندان کنونی وجود ندارد، با این وجود آشوب می‌تواند به صورت‌های مختلفی که بسیار به هم مرتبط می‌باشند توصیف شود.

وابستگی زیاد به شرایط اولیه، که «اثر پروانه‌ای[1]» نامیده می‌شود [۳]، به‌عنوان ماهیت آشوب به وسیله بسیاری از دانشمندان در نظر گرفته می‌شود. واژه آشوب اولین بار در مقاله مشهوری[2] که توسط تی. لی و جی. ای. یورک[3] منتشر شد و به نوعی از حرکت نامنظم و غیرعادی که بعضی از سیستم‌های دینامیکی از خود نشان می‌دهند، اشاره

[1] Butterfly Effect
[2] “Period Three Implies Chaos”
[3] T. Li & J. A. Yorke