دانشکده علوم ریاضی

دانشگاه فردوسی مشهد

پایان‌نامه جهت اخذ درجهٔ کارشناسی ارشد در رشتهٔ ریاضی محض

عنوان:

گراف مقسوم‌علیه صفر مسطح و گراف‌های r−بخشی کامل

استاد راهنما:

دکتر کاظم خشیارمنش

استاد مشاور:

دکتر مژگان افخمی گلی

به نگارش:

فاطمه مرادپور شورباخورلو

مهر ماه ۱۳۹۰

فهرست مندرجات

چکیده

یکی از شاخه‌های جدید جبر، جبر ترکیبیاتی است که به ارتباط میان جبر و گراف پرداخته و خواص میان آن‌ها را بررسی می‌کند. در این پایان‌نامه، به ارتباط میان عناصر مقسوم‌علیه صفر حلقه و گرافی که می‌توان به آن‌ها متناظر کرد، می‌پردازیم و بیان می‌کنیم که در چه صورت این گراف، مسطح است. هم‌چنین دسته خاصی از گراف‌ها، که r−بخشی هستند را معرفی کرده و نشان می‌دهیم که اگر گراف متناظر با حلقه، مسطح باشد،آ نگاه r، توانی از یک عدد اول است. سرانجام ارتباط میان گراف‌ها و عدد گونا بیان می‌شود که نشان می‌دهد برای هر عدد صحیح مثبت داده شده، حلقه‌ای موجود است که عدد گونای گراف مقسوم‌علیه صفر آن، برابر با همان عدد داده شده است.

مقدمه

در این پایان‌نامه که بر پایه مراجع [?]، [?]، [?] و [?] است، به ارتباط میان عناصر مقسوم‌علیه صفر حلقه و گراف متناظر با آن‌ها پرداخته‌ایم. این تحقیقات اولین بار توسط بک [۱] در سال ۱۹۸۸ پایه‌گذاری شد و سپس توسط اندرسون [۲]، نصیر [۳] و لیوینگستون [۴] ادامه یافت. برای این منظور نیاز به مقدماتی از جبر جابه‌جایی و گراف می‌باشد که در فصل اول به مقدمات و پیش‌نیازهای جبر جابه‌جایی که از [?] و [?] جمع‌آوری شده است، می‌پردازیم.

در بخش اول از فصل دوم، پیش‌نیازها و مفاهیم اولیه در نظریه گراف را مطرح می‌نماییم. در بخش دوم، مفهوم نشاندن یک گراف در صفحه و ارتباط آن را با مسطح بودن بیان کرده و نیز مشخصه اصلی گراف‌های مسطح که به قضیه کوراتوفسکی معروف است را مطرح می‌کنیم. هم‌چنین فرمول اویلر که ارتباط میان رئوس، یال‌ها و وجه‌های گراف مسطح است را بیان می‌نماییم.

در فصل سوم که شامل سه بخش است و از مقاله [?] برگرفته شده است، به معرفی گراف مقسوم‌علیه صفر می‌پردازیم. در بخش اول مثال‌هایی از چند حلقه و گراف مقسوم‌علیه صفر آن‌ها آورده شده و نشان می‌دهد دو حلقه غیریکریخت، ممکن است

[۱] Beck
[۲] Anderson
[۳] Naseer
[۴] Livingston

گراف مقسوم‌علیه صفر یکریخت داشته باشند. در بخش دوم از فصل سوم، خواص گراف مقسوم‌علیه صفر بررسی شده و در بخش آخر ارتباط میان گراف مقسوم‌علیه صفر با حوزه صحیح و همبندی آن نیز مورد مطالعه قرار گرفته است.

فصل چهارم که از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و از مقاله‌های [?] و [?] جمع‌آوری شده، شامل ۴ بخش است. در بخش اول، به بررسی مسطح یا نامسطح بودن گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌های متناهی، به‌ویژه حلقه‌های موضعی، می‌پردازیم. در بخش دوم، ارتباط میان کمر گراف مقسوم‌علیه صفر و ایده‌آل‌های اول وابسته به حلقه را بیان کرده و در این رابطه قضایایی اثبات می‌کنیم. در بخش سوم، به گراف r−بخشی کامل پرداخته و نشان می‌دهیم که اگر R حلقه متناهی و گراف مقسوم‌علیه صفر آن، r−بخشی کامل باشد، آنگاه r توانی از یک عدد اول است. در بخش چهارم، ۲۲ رده از حلقه‌های ۳۲ عضوی که گراف مقسوم‌علیه صفر آن‌ها نامسطح است را بیان می‌کنیم.

در فصل پنجم که از مقاله [?] برگرفته شده، به معرفی عدد گونا می‌پردازیم که به گونه‌ای با مسطح بودن یا نبودن گراف‌ها در ارتباط می‌باشد. به‌این‌صورت که اگر عدد گونای گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه برابر صفر باشد آنگاه گراف مسطح و در غیر این‌صورت نامسطح است. اگر عدد گونای گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه برابر یک باشد به آن گراف، ترویدال گوییم. برای این منظور فرمول‌هایی بیان می‌شود. سرانجام قضیه اصلی فصل را مطرح می‌کنیم که بیان می‌کند: برای هر عدد صحیح مثبت داده شده g، فقط تعداد متناهی حلقه متناهی با عدد گونای g موجود است. البته این قضیه برای هر دو سطح جهت‌پذیر و جهت‌ناپذیر برقرار است که فقط برهان سطوح جهت‌پذیر در پایان‌نامه آورده شده است.

فصل ۱

پیش‌نیازهای جبرجابه‌جایی

۱.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

در سرتاسر این پایان‌نامه فرض بر این است که حلقه‌ها جابه‌جایی، یکدار و ناصفر هستند. در این بخش به ارائه مطالبی از جبر جابه‌جایی که در فصل‌های بعد مورد نیاز است پرداخته و از این رو از بیان برهان آن‌ها اجتناب می‌کنیم. خوانندگان می‌توانند به [?] و [?] مراجعه کنند.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید R حلقه جابه‌جایی و یکدار باشد. عنصر $x \in R$ را مقسوم‌علیه صفر گوییم هرگاه عضو ناصفر $y \in R$ موجود باشد به‌طوری‌که $xy = 0$. مجموعه تمام مقسوم‌علیه‌های صفر R را با $Z(R)$ نمایش می دهیم.

از گزاره زیر به طور مکرر استفاده می‌کنیم.

گزاره ۲.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه و $Z(R)$ مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر آن باشد. دراین‌صورت $|R| \leq |Z(R)|^2$.

برهان. به قضیه ۱ از [?] رجوع کنید. □

تعریف ۳.۱.۱ حلقه R را حوزه صحیح گوییم هرگاه شامل مقسوم‌علیه صفر غیر بدیهی نباشد. به عبارت دیگر اگر $xy = 0$ آنگاه $x = 0$ یا $y = 0$.

گزاره ۴.۱.۱ هر حوزه صحیح متناهی میدان است.

برهان. به گزاره ۲۷.۱ از [?] رجوع کنید. □

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنید R حلقه جابه‌جایی و یکدار باشد. ایده‌آل سره $\mathfrak{p}$ از R را اول گوییم هرگاه به ازای هر x و y در R که $xy \in \mathfrak{p}$ نتیجه دهد $x \in \mathfrak{p}$ یا $y \in \mathfrak{p}$.
مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول R را با $Spec(R)$ نمایش می‌دهیم و به آن طیف R گوییم.

لم ٦.۱.۱ ایده‌آل $\mathfrak{p}$ از R اول است اگر و تنها اگر $\frac{R}{\mathfrak{p}}$ حوزه صحیح باشد.

برهان. به لم ۲۳.۳ از [?] رجوع کنید. □

تعریف ۷.۱.۱ ایده‌آل سره Q از R را اولیه گوییم اگر برای هر $x, y \in R$ که $xy \in Q$ و $x \notin Q$، آنگاه عدد طبیعی n موجود باشد به‌طوری‌که $y^n \in Q$. بوضوح هر ایده‌آل اول، اولیه است اما عکس مطلب در حالت کلی برقرار نمی‌باشد.

تعریف ۸.۱.۱ ایده‌آل سره $\mathfrak{m}$ از R را بیشین گوییم در صورتی که اگر ایده‌آل I از R موجود باشد که $\mathfrak{m} \subsetneqq I \subseteq R$، آنگاه $I = R$. مجموعه تمام ایده‌آل‌های بیشین حلقه R را با $Max(R)$ نمایش می‌دهیم. بنا به قضیه ۳.۱ از [?]، در هر حلقه جابه‌جایی، ایده‌آل بیشین موجود است.

لم ۹.۱.۱ $\mathfrak{m}$ ایده‌آل بیشین حلقه R است اگروتنها اگر $\frac{R}{\mathfrak{m}}$ میدان باشد.

برهان. به لم ۳.۳ از [?] رجوع کنید. □

از آنجایی که هر میدان حوزه صحیح است، از دو گزاره بالا نتیجه می‌شود که هر ایده‌آل بیشین، اول است اما عکس مطلب در حالت کلی برقرار نمی‌باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱ حلقه R را موضعی گوییم هرگاه شامل تنها یک ایده‌آل بیشین $\mathfrak{m}$ باشد و آن را با $(R, \mathfrak{m})$ نشان می‌دهیم. دراین‌صورت بنا به گزاره بالا، $K = \frac{R}{\mathfrak{m}}$ میدان است که به آن میدان مانده‌ها می‌گوییم. حلقه موضعی R را با $(R, \mathfrak{m}, K)$ نیز نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۱.۱ اشتراک تمام ایده‌آل‌های بیشین R را رادیکال جیکوبسن [۱] می‌گوییم و با $J(R)$ نشان می‌دهیم.

لم بعد به لم ناکایاما[۲] معروف است.

لم ۱۲.۱.۱ فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه R باشد به‌طوری‌که $I \subseteq J(R)$. دراین‌صورت برای هر $R-$مدول متناهیاً تولید شده مانند M که $IM = M$، داریم $M = \circ$.

برهان. به لم ۲۴.۸ از [?] رجوع کنید. □

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه و $x \in R$. دراین‌صورت پوچساز x را با $Ann(x)$ یا $\circ :_R x$ نمایش می‌دهیم و عبارت است از

$$Ann(x) = \{r \in R \mid rx = \circ\} \quad .$$

بوضوح $Ann(x)$ ایده‌آلی از R است که به آن ایده‌آل پوچساز x می‌گوییم.
اکنون فرض کنید M یک $R-$مدول باشد. دراین‌صورت قرار می‌دهیم

$$Ann(M) = \{r \in R \mid rM = \circ\} = \{r \in R \mid rm = \circ \quad \forall m \in M\} \quad .$$

تعریف ۱۴.۱.۱ عنصر x از R را پوچتوان گوییم هرگاه عدد طبیعی n موجود باشد به‌طوری‌که $x^n = \circ$. هم‌چنین $y \in R$ را خودتوان گوییم هرگاه $y^۲ = y$.

[۱] Jacobson radical
[۲] Nakayama's Lemma

تعریف ۱۵.۱.۱ حلقه R را کاهش‌یافته گوییم هرگاه شامل عنصر پوچتوان غیر بدیهی نباشد.

تعریف ۱۶.۱.۱ ایده‌آل $\mathfrak{a}$ از R را پوچ گوییم هرگاه عدد طبیعی n موجود باشد به‌طوری‌که $\mathfrak{a}^n = 0$. بوضوح به ازای هر $x \in \mathfrak{a}$، $x^n = 0$. لذا عناصر ایده‌آل پوچ، پوچتوان می‌باشند.

گزاره ۱۷.۱.۱ فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ حلقه موضعی و متناهی باشد. دراین‌صورت عدد اول p و اعداد صحیح و مثبت n و t و l موجودند به‌طوری‌که $|R| = p^n$ و $|\mathfrak{m}| = p^t$ و $|\frac{R}{\mathfrak{m}}| = p$. بعلاوه $char(R) = p^l$.

برهان. به گزاره ۱.۲ از [?] رجوع کنید. □

تعریف ۱۸.۱.۱ فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از R باشد. دراین‌صورت مجموعه

$$\{r \in R \mid \exists \quad n \in \mathbb{N} \quad ; r^n \in \mathfrak{a}\}$$

ایده‌آلی از R است که آن را رادیکال $\mathfrak{a}$ نامیده و با $\sqrt{\mathfrak{a}}$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۱۹.۱.۱ فرض کنید $Z(R)$ مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه R باشد. دراین‌صورت داریم $Z(R) = \cup_{0 \neq x \in R} \sqrt{0 :_R x}$.

برهان. به گزاره ۱۵.۱ از [?] رجوع کنید. □

این بخش را با مفهوم واریته به پایان می‌رسانیم.

تعریف ۲۰.۱.۱ فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از R باشد. دراین‌صورت واریته $\mathfrak{a}$ را با نماد $V(\mathfrak{a})$ نشان می‌دهیم و عبارت است از

$$V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) \mid \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}\} \quad .$$

هم‌چنین مجموعه همه ایده‌آل‌های کمین شامل $\mathfrak{a}$ را با $Min(\mathfrak{a})$ نشان می‌دهیم.

لم ۲۱.۱.۱ فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از حلقه R باشد. دراین‌صورت $\sqrt{\mathfrak{a}} = \cap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}$. در نتیجه، $\sqrt{o}$ که به آن رادیکال پوچ حلقه R گوییم برابر است با $\cap_{\mathfrak{p} \in Spec(R)} \mathfrak{p}$ که با $Nil(R)$ نیز نمایش می‌دهیم.

برهان. به لم ۴۸.۳ از [?] رجوع کنید. □

نتیجه ۲۲.۱.۱ فرض کنید $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اولی از حلقه R باشد. دراین‌صورت به ازای هر عدد طبیعی n داریم $\sqrt{\mathfrak{p}^n} = \mathfrak{p}$.

برهان. به ۴۷.۳ از [?] رجوع کنید. □

۲.۱ تجزیه اولیه و ایده‌آل‌های وابسته

گزاره ۱.۲.۱ فرض کنید $\mathfrak{q}$ ایده‌آلی اولیه از R باشد. دراین‌صورت $\sqrt{\mathfrak{q}}$ کوچکترین ایده‌آل اول شامل $\mathfrak{q}$ است.

برهان. به گزاره ۵.۴ از [?] رجوع کنید. $\square$

اگر $\mathfrak{q}$ ایده‌آلی اولیه باشد به‌طوری‌که $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}$، آنگاه $\mathfrak{q}$ را ایده‌آل $\mathfrak{p}-$اولیه نامند. گزاره زیر به آسانی از تعریف ایده‌آل اولیه نتیجه می‌شود.

گزاره ۲.۲.۱ اگر $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ایده‌آل بیشین حلقه R باشد، آنگاه ایده‌آل $\mathfrak{a}$ اولیه است. به‌ویژه هر توانی از یک ایده‌آل بیشین $\mathfrak{m}$، $\mathfrak{m}-$اولیه است.

برهان. به گزاره ۹.۴ از [?] رجوع کنید. $\square$

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از حلقه R باشد. دراین‌صورت اگر بتوان ایده‌آل $\mathfrak{a}$ را برابر با اشتراک تعداد متناهی از ایده‌آل‌های اولیه به صورت $\mathfrak{a} = \cap_{i=1}^{n}\mathfrak{q}_i$ نوشت، آنگاه $\mathfrak{a}$ را یک ایده‌آل تجزیه‌پذیر گفته و $\mathfrak{a} = \cap_{i=1}^{n}\mathfrak{q}_i$ را یک تجزیه اولیه برای ایده‌آل $\mathfrak{a}$ در R نامیم. بعلاوه اگر به ازای هر i که $1 \leq i \leq n$، $\sqrt{\mathfrak{q}_i}$ها متمایز باشند و برای هر i داشته باشیم $\mathfrak{q}_i \not\supseteq \cap_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\mathfrak{q}_i$، آنگاه تجزیه اولیه $\mathfrak{a} = \cap_{i=1}^{n}\mathfrak{q}_i$ را یک تجزیه اولیه کمین گوییم.

قضیه ۴.۲.۱ فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی تجزیه‌پذیر از حلقه R باشد به‌طوری‌که $\mathfrak{a} = \cap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ تجزیه اولیه کمین $\mathfrak{a}$ و به ازای هر i که $1 \leq i \leq n$، $\mathfrak{q}_i$ یک ایده‌آل $\mathfrak{p}_i$−اولیه باشد. دراین‌صورت $\mathfrak{p}_i$−ها دقیقاً ایده‌آل‌های اولی هستند که برای $x \in R$ای، به شکل $\sqrt{\mathfrak{a} :_R x}$ می‌باشد. به عبارت دیگر

$$\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\} = Spec(R) \cap \{\sqrt{\mathfrak{a} :_R x} \mid x \in R\} \quad .$$

بنابراین $\mathfrak{p}_i$ ها از تجزیه اولیه $\mathfrak{a}$ مستقل می‌باشند.

برهان. به قضیه ۵.۴ از [?] رجوع کنید. □

تعریف ۵.۲.۱ فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی تجزیه‌پذیر باشد به‌طوری‌که $\mathfrak{a} = \cap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ تجزیه اولیه کمین برای $\mathfrak{a}$ و به ازای هر i که $1 \leq i \leq n$، $\mathfrak{q}_i$ یک ایده‌آل $\mathfrak{p}_i$−اولیه باشد. دراین‌صورت به ازای هر i، ایده‌آل اول $\mathfrak{p}_i$ را ایده‌آل اول وابسته به $\mathfrak{a}$ گوییم و قرار می‌دهیم

$$ass(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\} \quad .$$

هم‌چنین هر عضو کمین از $ass(\mathfrak{a})$ را یک ایده‌آل اول کمین $\mathfrak{a}$ می‌نامیم.

تعریف ۶.۲.۱ فرض کنید M یک R−مدول باشد. دراین‌صورت ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R را ایده‌آل اول وابسته به M گوییم هرگاه به ازای $x \in M$ای داشته باشیم $\mathfrak{p} = Ann(x)$. مجموعه همه ایده‌آل‌های وابسته به M را با $Ass(M)$ نشان می‌دهیم.

تبصره ۷.۲.۱ می‌توان نشان داد که اگر $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از حلقه R باشد آنگاه $ass(\mathfrak{a}) = Ass(\frac{R}{\mathfrak{a}})$.

برهان. به تبصره ۳۳.۹ از [?] رجوع کنید. □

۳.۱ حلقه‌های نوتری و آرتینی

تعریف ۱.۳.۱ حلقه R را نوتری (آرتینی) گوییم هرگاه هر زنجیر صعودی (نزولی) از ایده‌آل‌های آن ایستا باشد. به طور معادل، حلقه R را نوتری (آرتینی) گوییم هرگاه هر مجموعه ناتهی از ایده‌آل‌های آن، عضو بیشین (کمین) داشته باشد.

گزاره ۲.۳.۱ فرض کنید R حلقه‌ای آرتینی باشد. دراین‌صورت هر ایده‌آل اول حلقه R بیشین است.

برهان. به گزاره ۱.۸ از [?] رجوع کنید. □

گزاره ۳.۳.۱ تعداد ایده‌آل‌های بیشین هر حلقه آرتینی متناهی است.

برهان. به گزاره ۳.۸ از [?] رجوع کنید. □

گزاره ۴.۳.۱ رادیکال پوچ هر حلقه جابه‌جایی، یکدار و آرتینی، ایده‌آلی پوچتوان است.

برهان. به گزاره ۴.۸ از [?] رجوع کنید. □

قضیه ۵.۳.۱ در حلقه نوتری R، مدول M نوتری است اگروتنها اگر هر زیر مدول آن با تولید متناهی باشد.

برهان. به گزاره ۱۳.۷ از [?] رجوع کنید. □

در تعریف زیر به مفهوم بعد حلقه می‌پردازیم.

تعریف ۶.۳.۱ یک زنجیر از ایده‌آل‌های اول، دنباله اکیداً نزولی از ایده‌آل‌های اول به صورت $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n$ به طول n است. بعد حلقه R را کوچکترین کران بالا(سوپریمم) طول همه زنجیرهای اول آن تعریف می‌کنیم و با $dim(R)$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر

$$dim(R) = sup\{n \mid \exists \ \mathfrak{p}_0, \ldots, \mathfrak{p}_n \in Spec(R); \ \ \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n\} \quad .$$

بعد حلقه R همواره یک عدد حقیقی مثبت و یا بی‌نهایت است یعنی $0 \leq dim(R) \leq \infty$.

مثال ۷.۳.۱ از آنجایی که میدان‌ها هیچ ایده‌آلی به جز خودشان و صفر ندارند، لذا بعد هر میدان صفر است.

مثال ۸.۳.۱ چون ایده‌آل‌های اول حلقه $\mathbb{Z}$، $(\circ)$ و $p\mathbb{Z}$ که p عددی اول است، می‌باشد لذا بعد حلقه $\mathbb{Z}$، یک است زیرا زنجیرهای اول آن به شکل $\circ \subset p\mathbb{Z}$ می‌باشد.

در قضیه زیر به ارتباط بین حلقه‌های نوتری و آرتینی اشاره می‌کنیم.

قضیه ۹.۳.۱ حلقه R آرتینی است اگروتنها اگر نوتری باشد و $dim(R) = \circ$.

برهان. به قضیه ۵.۸ از [?] رجوع کنید. □

قضیه بعدی به قضیه ساختاری حلقه‌های آرتینی معروف است.

قضیه ۱۰.۳.۱ هر حلقه آرتینی به طور یکتا(در حد یکریختی) به صورت حاصلضرب تعداد متناهی حلقه آرتینی و موضعی است.

برهان. به قضیه ۷.۸ از [?] رجوع کنید. □

گزاره ۱۱.۳.۱ فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ حلقه موضعی و آرتینی باشد. دراین‌صورت شرایط زیر معادلند:

۱) هر ایده‌آل R، اصلی است؛

۲) ایده‌آل بیشین $\mathfrak{m}$، اصلی است؛

۳) $dim_K \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2} \leq 1$ که $K = \frac{R}{\mathfrak{m}}$.

برهان. به گزاره ۸.۸ از [?] رجوع کنید. □

فصل ۲

آشنایی با نظریه گراف

در این فصل مقدماتی از نظریه گراف که از [?] جمع‌آوری شده است، بیان می‌شود.

۱.۲ گراف

تعریف ۱.۱.۲ فرض کنید V یک مجموعه ناتهی باشد. یک گراف ساده یا به اختصار گراف، زوج مرتب $G = (V, E)$ از مجموعه‌هاست که $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ را مجموعه رئوس و $E = \{\{x, y\} \mid x, y \in V\}$ را مجموعه یال‌های گراف G گوییم. بوضوح $E \subseteq V^2$. بنابراین اعضای مجموعه E زیر مجموعه‌هایی دو عضوی از مجموعه V هستند.

تعریف ۲.۱.۲ تعداد رئوس G را مرتبه گراف گوییم و با $|G|$ نمایش می‌دهیم. گراف G را متناهی گوییم هرگاه $|G| < \infty$.

تعریف ۳.۱.۲ دو رأس u و v از گراف G را همسایه یا مجاور گوییم هرگاه $\{u,v\}$ در $E(G)$ واقع شده باشد.

تعریف ۴.۱.۲ گراف G را کامل گوییم هرگاه هر دو رأس G مجاور باشند. گراف کامل n رأسی را با K_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۲ گراف $G' = (V', E')$ را زیرگراف $G = (V, E)$ گوییم و با $G' \subseteq G$ نشان می‌دهیم هرگاه $V' \subseteq V$ و $E' \subseteq E$.

فرض کنید G یک گراف و G' زیرگرافی از G باشد. دراین‌صورت G' را زیرگراف پدید آمده از G گوییم هرگاه $V(G') = V(G)$. بوضوح هر زیرگراف پدید آمده از G با حذف تعدادی از یال‌های گراف G حاصل می‌شود. بنابراین تعداد کل زیرگراف‌های پدید آمده از G برابر است با $۲^{|E(G)|}$. هم‌چنین زیرگراف G' از G را زیرگراف القا شده نامیم هرگاه G' با حذف تعدادی از رئوس G بدست آید. بنابراین تعداد کل زیرگراف‌های القا شده G برابر است با $۲^{|V(G)|}$.

تعریف ٦.۱.۲ گراف G را تهی گوییم هرگاه شامل هیچ یالی نباشد.

تعریف ۷.۱.۲ فرض کنید G' زیرگرافی از G باشد. اگر G' گراف کامل باشد آنگاه G' را یک خوشه در G گوییم. بوضوح چنین زیرگرافی، زیرگراف القا شده می‌باشد. اندازه بزرگترین خوشه در G را با $\omega(G)$ نشان می‌دهیم و به آن عدد خوشه‌ای G گوییم.

تعریف ۸.۱.۲ گراف $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$ را متمم گراف $G = (V, E)$ گوییم هرگاه $\overline{V} = V$ و $\overline{E} = V^{۲} \backslash E$.

تعریف ۹.۱.۲ فرض کنید v رأسی از گراف G باشد. درجه رأس v را که با $deg_G(v)$ یا $deg(v)$ نشان می‌دهیم برابر است با تعداد همسایه‌های v در G.

تعریف ۱۰.۱.۲ عدد $\delta(G) = min\{deg(v) \mid v \in G\}$ را درجه کمین G و عدد $\Delta(G) = max\{deg(v) \mid v \in G\}$ را درجه بیشین G گوییم.

تعریف ۱۱.۱.۲ گشت در G دنباله ناتهی $W = v_{۰} e_{۱} v_{۱} e_{۲} v_{۲} \ldots e_k v_k$ است که جمله‌های آن متناوباً رأس‌ها و یال‌ها هستند، بقسمی که برای $۱ \leq i \leq k$، دو انتهای e_i، $v_{i-۱}$ و v_i هستند. دراین‌صورت W را گشتی از $v_{۰}$ به v_k، یا گشت $(v_{۰}, v_k)$ گوییم. رأس‌های $v_{۰}$ و v_k را به‌ترتیب ابتدا و انتهای W و $v_{k-۱}, \ldots, v_{۲}, v_{۱}$ را رأس‌های داخلی‌اش می‌نامیم. عدد صحیح k طول W است.

تعریف ۱۲.۱.۲ اگر $W = v_{۰} e_{۱} v_{۱} \ldots e_k v_k$ و $W' = v_k e_{k+۱} v_{k+۱} \ldots e_l v_l$ گشت باشند، گشت $v_k e_k v_{k-۱} \ldots e_{۱} v_{۰}$ را که از وارون کردن ترتیب W بدست می آید، با $W^{-۱}$ نشان می‌دهیم و گشت $v_{۰} e_{۱} v_{۱} \ldots e_l v_l$ را که از پیوند W و W' در v_k بدست می آید، با WW' نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۱.۲ اگر یال‌های e_1،e_2،...،e_kی گشت W مجزا باشند، W را گذر می‌نامیم. در این حالت طول W، درست برابر با $E(W)$ است. علاوه‌براین اگر رأس‌های v_0،v_1،...،v_k مجزا باشند، W را مسیر نامیم. تعداد یال‌های یک مسیر را طول آن مسیر گوییم.

تعریف ۱۴.۱.۲ یک دور مسیری با حداقل سه رأس است که ابتدای یال اول و انتهای یال آخر یکسان است.

مانند مسیرها، دورها را با دنباله طبیعی آن نشان می‌دهیم یعنی $C = v_0 e_1 v_1 \dots e_n v_0$. طول یک دور را تعداد یال‌های آن تعریف کرده و دور به طول n را با C_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۵.۱.۲ فرض کنید u و v دو رأس گراف G باشند. دراین‌صورت فاصله بین دو رأس u و v که آن را با $d(u, v)$ نشان می‌دهیم عبارت است از طول کوتاهترین مسیر بین u و v. اگر هیچ مسیری بین u و v موجود نباشد آنگاه می‌نویسیم $d(u, v) = \infty$.

تعریف ۱۶.۱.۲ قطر گراف G را که با $diam(G)$ نشان می‌دهیم عبارت است از

$$diam(G) = sup\{d(u, v) \mid u, v \in V(G)\} \quad .$$

تعریف ۱۷.۱.۲ طول کوتاهترین دور در گراف G را کمر گراف G گوییم و با $gr(G)$ نشان می‌دهیم. اگر گراف G فاقد دور باشد آنگاه می‌نویسیم $gr(G) = \infty$.