بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه پیام نور

دانشگاه پیام نور مرکز تبریز

پایاننامه
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

عنوان

تعمیم روشهای خطی عمومی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی

استادراهنما:
دکتر غلامرضا حجتی

مولف:
محمد جعفری

دیماه ۱۳۸۵

دانشگاه پیام نور مرکز تبریز

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

عنوان

تعمیم روشهای خطی عمومی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی

استادراهنما:
دکتر غلامرضا حجتی

مولف:
محمد جعفری

دیماه ۱۳۸۵

مهوری اسلامی ایران
ت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام نور

تاریخ ....
شماره ....
پیوست ....

باسمه تعالی

تصویب نامه پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان: تعمیم روش های خطی عمومی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی.

که توسط محمد جعفری **تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تأئید می باشد.**

تاریخ دفاع: ۸۵/۱۰/۲۰ **نمره :** ۱۶٫۵ شانزده و نیم **درجه ارزشیابی:** عالی

اعضای هیأت داوران:

نام و نام خانوادگی	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱- دکتر غلامرضا حجتی	استاد راهنما	استادیار	
۲- ـــ ـــ	استاد راهنمای همکار یا مشاور	ـــ ـــ	
۳- دکتر حسین خیری	استاد ممتحن	استادیار	خیری
۴- دکتر مهدی صحت خواه	نماینده گروه آموزشی	استادیار	
۵- محمد ایمانی [illegible]	نماینده تحصیلات تکمیلی		

(نمونه تصویب نامه پایان نامه)

سپاسگزاری

شایشته است صمیمانه‌ترین تشکرات قلبی خودم را تقدیم اساتید گرامی نمایم که بنده را در تهیه و تدوین این پایان نامه همراهی نموده و بهترین راهنمای بنده در این راه بودند و زحمات بی‌شائبه‌ای متحمل شده و مرا همواره با اظهار نظراتشان یاری فرمودند.

مخصوصاً از استاد بسیار عالی قدر و بزرگوار جناب آقای دکتر غلامرضا حجتی نهایت سپاسگزاری را دارم که ایشان بدون وقفه بنده را راهنمایی و یاری نمودند.بر خود لازم می‌دانم از آقای دکتر حسین خیری (داور) و از جناب آقای دکتر ضحتی (مدیر گروه رشته علوم پایه) و از خانم سیار مسئول تحصیلات تکمیلی و کلیه اساتید محترمی که مشوق اینجانب بودند کمال تشکر وقدردانی داشته باشم.

قدردانی و تشکر مخصوصی می‌نمایم از خانواده عزیزم. که در این مدت متحمل زحمات زیادی شدند و همواره مشوق بنده بودند و در طی این مسیر یار و یاور بنده بودند. در پایان از کلیه دوستان که هر کدام به نحوی بنده را مورد لطف قرار دادند قدردانی خویش را ابراز می‌دارم.

تقدیم به: روان پاک پدر عزیزم:

و تقدیم به:

مادر عزیزم

و

برادران و خواهرانم

نام خانوادگی دانشجو : جعفری **نام :** محمد

عنوان پایان نامه: تعمیم روشهای خطی عمومی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی.

استاد راهنما : دکتر غلامرضا حجتی

مقطع تحصیلی : کارشناسی ارشد **رشته :** ریاضی کاربردی

گرایش : آنالیز عددی **دانشگاه :** پیام نور تبریز

دانشکده : علوم **تاریخ فارغ التحصیلی :** دی ماه ۱۳۸۵ **تعداد صفحه :** ۷۴

کلید واژه ها : معادلات دیفرانسیل معمولی ،حل عددی ، روشهای چندگامی ، مفاهیم پایداری ،
روشهای خطی عمومی ، روشهای رونگه- کوتا .

چکیده : روشهای متعارف حل عددی مساله مقدار اولیه $y'= f(x,y), y(x_0) = y_0$ ، در دو دسته روشهای رونگه _کوتا و روشهای چندگامی خطی معرفی شده اند .

در سال ۱۹۶۶ ، جان بوچر فرم یکتایی معرفی کرد که در آن روشهای چند مقداری(چندگامی خطی) و روشهای چندمرحله ای (رونگه-کوتا)، در یک قالب معرفی شدندو نیز با استفاده آن روشهای جدیدی ساخت، این دسته که به روشهای خطی عمومی (GLM) معروف می باشند، تاکنون از جهات مختلف مورد تعمیم قرار گرفته است.

در این پایاننامه ضمن بررسی روشهای معرفی شده و تحلیل کارایی آنها نظیر مرتبه دقت و خواص پایداری، یکی از آخرین تعمیم های روش خطی عمومی که بکارگیری مشتق دوم جواب می باشد مورد بررسی قرار می گیرد و خواص پایداری آن مطالعه خواهد شد.

فهرست مطالب

مقدمه

روشهای حل معادلات دیفرانسیل، با استفاده از فنون تحلیلی مانند انتگرالگیری یا بسط به سری صورت می‌گیرد، و معمولاً تاکید بر یافتن عبارت دقیق جواب است. اما مسائل مهم متعددی در مهندسی و علوم وجود دارد، مخصوصاً مسائل غیرخطی، که این روشها برای آنها عملی نبوده یا استفاده از این روشها، پیچیدگی فراوانی بهمراه دارد.

اما استفاده از روشهای متغیر گسسته برای یافتن تقریب دقیقی از مسئله مقدار اولیه را می‌توان به راحتی روی کامپیوترهای شخصی و حتی بعضی ماشین حسابها اجرا کرد .

فرض می‌کنیم یک معادله دیفرانسیل فرمول بندی شده را به یک یا دو شکل نوشت، که شکل اول دارای ساختار غیر خودگردان [1] $y' = f(x, y(x))$، که متغیر x در مسائل فیزیک، متغیر بوده و $y(x)$ جواب مساله می‌باشد. شکل دوم که بفرم خودگردان [2] است دارای ساختار $y' = f(y(x))$ می‌باشد. شکل اولی قابل نمایش با شکل دومی است، که ما در بحث خود بیشتر از فرم دوم استفاده خواهیم کرد.

روشهای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی عموماً در دو دسته معرفی می‌گردند، دسته اول بنام روشهای تک گامی که از مشهورترین آنها، می‌توان به روشهای رونگه—کوتا اشاره داشت. دسته دوم بنام روشهای چندگامی که ~~از جمله اینها~~ می‌توان به روشهای آدامز، نیستروم و روش سیمپسون اشاره کرد.

ما در این پایان نامه روشهای تک گامی و چند گامی را در یک قالب، بنام روشهای خطی عمومی و به اختصار GLM[3] بحث خواهیم کرد. این روش اولین بار توسط بوچر [4] در سال ١٩٦٦ ارائه شده است. در ادامه مثالهائی که در شکل خطی عمومی نوشته شده است، ارائه خواهیم داد و در مبحث مربوط به پایداری این روش مطالعه خواهیم کرد.

اغلب روشهایی که در حل عددی معادلات دیفرانسیل مورد مطالعه و استفاده قرار می‌گیرند، فقط از مشتق اول جواب استفاده می‌کنند که در نوع خود روشهای خوبی معرفی شده‌اند. به ضرورت همین مطلب روشهای خطی عمومی، از این قاعده تبعیت خواهند کرد، یعنی

---

[1] Nonautonomous

[2] Autonomous

[3] .General Linear Methods

[4] Butcher

فقط از مشتق اول در نمایش روش استفاده خواهد شد. در ادامهٔ بحث تعمیمی از روشهای خطی عمومی، تحت عنوان روشهای خطی عمومی با مشتق دوم SGLM[5] ارائه می‌شود که از مشتق دوم جواب داده شده نیز استفاده می‌کند. روی همین روش بحث خواهیم داشت، و در خاصیت پایداری آن مطالبی ارائه خواهیم داد. در نهایت با ارائه مثالهائی سعی در درک بهتر و راحتتر مسئله خواهیم شد.

---

[5] Second derivative GLM

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی و پیشینهٔ پژوهش

مسأله مقدار اولیه

$$\begin{array}{l} y' = f(x,y), \quad y:\ [x_0\ ,\ b] \longrightarrow R^m, \quad f:\ [x_0\ ,\ b] \times R^m \longrightarrow R^m \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \qquad (۱.۱)$$

را در نظر بگیرید.

تعریف ۱.۱ . یک تابع $f : R^m \longrightarrow R^m$ در شرط لیپ شیتز[1] صدق می‌کند اگر ثابتی مانند L و یک نرم $||.||$، وجود داشته باشد بطوریکه:

$$\forall\, Y, Z \in R^m \quad , \quad ||f(Y) - f(Z)|| \leq L||Y - Z||.$$

قضیه ۱.۱ . هرگاه در یک مسئله مقدار اولیه مانند (۱.۱)، که f تابع پیوسته‌ای از متغیر مستقل بوده و نسبت به مولفهٔ دوم در شرط لیپ شیتز صدق کند، آنگاه دارای جواب منحصر بفرد است.
اثبات: (ر.ک. [۱۵])

روشهای عددی برای حل دستگاههای معادلات دیفرانسیل با شرایط اولیه به شکل (۱.۱)، الگوریتم‌هائی هستند که دنباله‌ای از مقادیر تقریبی جواب $y(x)$ را در نقاط مشخصی از بازه $[x_0\ ,\ b]$ بنام گره تولید می‌کنند. هر نقطه گرهی از روی x_0 با رابطه زیر بدست می آید:

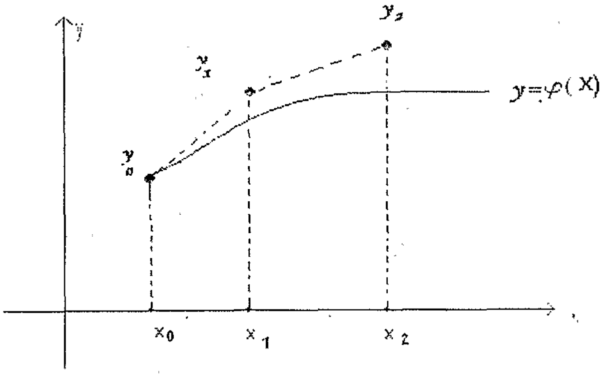
$$\begin{array}{l} x_n = x_0 + nh, \qquad n = 1, 2, \cdots, N. \\ x_N = b \end{array}$$

که در آن h طول گام نامیده می‌شود.

---

[1] Lipschitz condition

شکل (۱.۱) را ببینید.

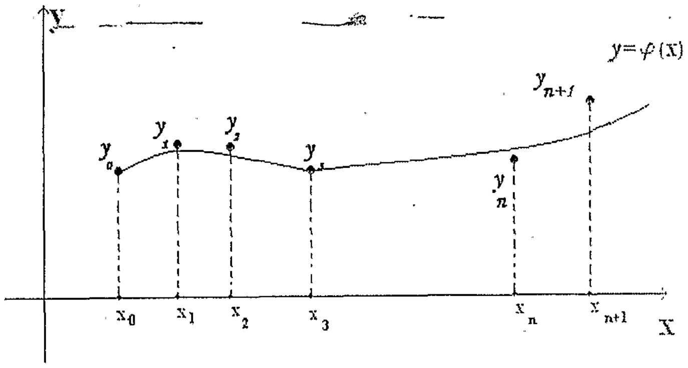


شکل ۱.۱: تقریب عددی جواب $y' = f(x,y)$ با $y(x_0) = y_0$

روش معروف اویلر[2] یا روش خط مماس، از اولین روشهای حل عددی مسائل مقدار اولیه می‌باشد که، نخستین بار توسط اویلر در سال ۱۷۶۸ برای حل عددی یک معادله دیفرانسیل مورد استفاده قرار گرفت.

برای حل عددی (۱.۱) به روش اویلر مقادیر تقریبی $y_1, y_2, y_3, \cdots$ از $y(x_1), y(x_2), y(x_3), \cdots$ با رابطه زیر بدست می‌آیند:

$$y_0 = y(x_0), \quad y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, \cdots.$$



شکل ۲.۱ تقریب اویلر یا خط مماس

---

[2] Euler

درفرمول روش اویلر می‌بینیم که :

- y_n تنها به y_{n-1} وابسته است و مقادیر $y_{n-2}, y_{n-3}, \cdots$ در محاسبه y_n نقشی ندارند.
- در هر گام تابع f فقط یکبار محاسبه می‌شود.
- فقط تابع f استفاده می‌شود نه مشتقات آن، یعنی $y''(x), y'''(x), \cdots$ شامل جمله نیستند.

تعمیم‌های مهم روش اویلر :

۱) استفاده از روشهائی که در آنها y_n علاوه بر y_{n-1} به مقادیر $y_{n-2}, \cdots y_{n-k} (k \geq 2)$ نیز وابسته باشد. بعنوان مثال

$$y_n = y_{n-1} + \frac{1}{12}h(23f(x_n, y_n) - 16f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 5f(x_{n-2}, y_{n-2}))$$

این چنین روشها به روشهای چندگامی[3] خطی معروف هستند.

۲) استفاده از روشهائی که در آنها تابع f بیش از یک بار محاسبه شود. یک مثال ساده از این دسته روشها بصورت زیر است:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n + \frac{1}{2}hf(x_n, y_n)).$$

این روشها به روشهای رونگه-کوتا[4] معروف هستند.

۳) استفاده از روشهائی که در آنها علاوه بر $y'(x)$، از عبارات $y''(x), y'''(x), \cdots$ نیز استفاده شود. روش سری تیلر[5] از جملهٔ این روشها می‌باشد.

بنابراین در یک رده‌بندی اولیه روشها، دو دسته روش را می‌توان در نظر گرفت:
۱) روشهای چندگامی،
۲) روشهای تک گامی.

در روشهای تک گامی مقدار تقریبی در هر گره با استفاده ازاطلاعات در گره قبلی یا نقاط داخلی بین گرههای قبلی بدست می‌آید، در حالیکه در یک روش چندگامی، مثلاً k $(k \geq 1)$ – گامی،

---

[3] Multistep

[4] Runge-Kutta

[5] Taylor

مقدار تقریبی در هر گره با استفاده از مقادیر موجود در k گره قبلی تعیین می‌شود.
قبل از وارد شدن به بحث اصلی، تعاریف و مفاهیمی از روشهای حل عددی ارائه می دهیم .
دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۱) را در نظر بگیرید و فرض کنید مقادیر تقریبی جواب $y(x)$ را در n نقطه $x_m = x_0 + mh$ ، $(m = 1, 2, \cdots, n)$ محاسبه نموده‌ایم:

$$y_m \approx y(x_m) \quad m = 1, 2, \cdots, n$$

یک روش k- گامی برای حل (۱.۱) در حالت کلی بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = h\phi(x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+k}; y'_n, y'_{n+1}, \cdots, y'_{n+k}),$$

که در آن h طول گام و α_i ها مقادیر ثابت و معلوم هستند.
اگر ϕ مستقل از y'_{n+k} باشد، روش را صریح[6]، و در غیر اینصورت روش را ضمنی[7] می‌نامیم.
تعداد $k-1$ مقدار $y_1, y_2, \cdots, y_{k-1}$ مورد نیاز برای شروع یک روش k—گامی را می‌توان با استفاده از یک روش تک گامی بدست آورد.

۱.۱ روشهای چندگامی خطی

شکل کلی این روشها بصورت زیر است :

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n+i} \tag{۲.۱}$$

که در آن α_iها و β_iها اعداد حقیقی ثابتی هستند. رابطه (۲.۱) را می‌توان با استفاده از عملگر انتقال E بصورت زیر نوشت:

$$\rho(E)y_n - h\sigma(E)y'_n = 0$$

که ρ و σ را به ترتیب چند جمله‌ایهای مشخصهٔ اول و دوم، به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\rho(\xi) = \alpha_k \xi^k + \alpha_{k-1}\xi^{k-1} + \cdots + \alpha_1 \xi + \alpha_0$$

---

[6] Explicit

[7] Implicit

$$\sigma(\xi) = \beta_k\xi^k + \beta_{k-1}\xi^{k-1} + \cdots + \beta_1\xi + \beta_0$$

اگر $\beta_k = 0$ روش صریح نامیده می‌شود، بعبارتی y_{n+k} تنها در سمت چپ معادله (۲.۱) ظاهر شده و می‌توان با استفاده از جایگذاری مقادیر معلوم، مستقیماً بدست آورد. اگر $\beta_k \neq 0$ روش را ضمنی گوئیم. در اینصورت y_{n+k} در هر دو طرف معادله ظاهر شده و مستقیماً قابل محاسبه نمی‌باشد.

تعریف ۲.۱. عملگر تفاضلی L، متناظر با روش (۲.۱)، بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$L[y(x);h] = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i y(x_{n+i}) - h\sum_{i=0}^{k} \beta_i y'(x_{n+i}). \qquad (۳.۱)$$

با استفاده از بسط تیلر می‌توان نوشت:

$$L[y(x);h] = c_0 y(x) + c_1 h y'(x) + c_2 h^2 y''(x) + \cdots + c_q h^q y^{(q)}(x) + \cdots,$$

که در آن

$$c_0 = \textstyle\sum_{i=0}^{k} \alpha_i,$$

$$c_1 = \textstyle\sum_{i=0}^{k} i\alpha_i - \sum_{i=0}^{k} \beta_i,$$

$$c_q = (\tfrac{1}{q!})\textstyle\sum_{i=0}^{q} i^q\alpha_i - (\tfrac{1}{(q-1)!})\sum_{i=0}^{q} i^{q-1}\beta_i, \quad q = 2, 3, \cdots.$$

تعریف ۳.۱. روش چندگامی خطی (۲.۱) و عملگر تفاضلی نظیر آن، (۳.۱) را از مرتبه p گوئیم هرگاه:

$$c_0 = c_1 = \cdots = c_p = 0, \quad c_{p+1} \neq 0.$$

پس برای هر روش چند گامی خطی که در آن $y(x) \in C^{p+2}$ باشد و ثابت غیر صفر c_{p+1} , می‌توان نوشت:

$$L[y(x);h] = c_{p+1}h^{p+1}y^{p+1}(x) + O(h^{p+2})$$

که c_{p+1} را ثابت خطا[8] می‌نامند.

تعریف ۴.۱. روش چندگامی خطی (۲.۱) را همگرا گوئیم هرگاه برای مساله مقدار اولیه (۱.۱) داشته باشیم:

$$\begin{array}{l} \lim y_n = y(x_n) \\ h \to 0 \\ nh = x - x_0 \end{array}$$

۱.۱.۱ سازگاری و صفرپایداری

تعریف ۵.۱. روش چندگامی خطی (۲.۱) را سازگار[9] گوئیم هرگاه از مرتبه $p \geq 1$ باشد.

بنابراین روش (۲.۱) سازگار است اگر و تنها اگر

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0, \qquad \sum_{i=0}^{k} i\alpha_i = \sum_{i=0}^{k} \beta_i,$$

و یا بعبارتی با استفاده از چندجمله‌ایهای ρ و σ، روش سازگار است اگر و تنها اگر

$$\rho(1) = 0, \qquad \rho'(1) = \sigma(1).$$

بنابراین در یک روش سازگار چندجمله‌ای مشخصهٔ اول $\rho(\xi)$, همواره یک ریشه ساده در ۱+ دارد که این ریشه را ریشه اصلی[10] می‌نامیم و با ξ_1 نشان می‌دهیم. بقیهٔ ریشه‌ها ξ_s , $s = 2, 3, \cdots, k$, را ریشه‌های کاذب یا فرعی [11] می‌نامیم. این ریشه‌ها زمانی ظاهر می‌شوند که تعداد گامهای روش بیشتر از ۱ باشد.

قضیه ۲.۱ . اگر روش چندگامی خطی (۲.۱) همگرا باشد آنگاه سازگار است.

---

[8] Error constant

[9] Consistence

[10] Principle root

[11] Spurious roots

اثبات. (ر.ک. [۱۶]).□
با توجه به شرط سازگاری که

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0, \qquad \sum_{i=0}^{k} i\alpha_i = \sum_{i=0}^{k} \beta_i,$$

متوجه می‌شویم که سازگاری فقط موقعیت ریشهٔ اصلی را کنترل می‌کند ولی در مورد ریشه‌های فرعی اطلاعاتی به ما نمی‌دهد. بنابراین مثالی ارائه می‌دهیم که نشان می‌دهد یک روش سازگار، لزوماً همگرا نیست.

مثال ۱.۱ . معادلهٔ دیفرانسیل دو گامی و صریح زیر را در نظر بگیرید:[۱۶]

$$y_{n+2} - (1+a)y_{n+1} + ay_n = \frac{1}{2}h[(3-a)f_{n+1} - (1+a)f_n]$$

جواب عددی مساله مقدار اولیهٔ $y' = 4x\sqrt{y}, \quad y(0) = 1$ را در بازهٔ $0 \leq x \leq 2$ برای دو حالت زیر بررسی می‌کنیم:

$$(i)a = 0 \quad , \qquad (ii)a = -5.$$

چند جمله‌ای مشخصهٔ اول این روش به‌صورت زیر است :

$$\rho(\xi) = \xi^2 - (1+a)\xi + a = (\xi - 1)(\xi - a)$$

اگر $a \neq -5$ باشد آنگاه روش از مرتبهٔ ۲ می‌باشد و اگر $a = -5$ باشد آنگاه روش از مرتبهٔ ۳ خواهد بود. یعنی در هر دو حالت روش سازگار هست.
امّا با مشاهدهٔ جدول (۱.۱) برای $h = 0.1$ دیده می‌شود که به ازای $a = 0$ روش همگراست ولی برای $a = -5$، روش واگراست. بنابراین نتیجه می‌گیریم که عکس قضیهٔ ۱.۱ بر قرار نیست.

جدول (۱.۱)

x	Exact solution	solution in a=0	solution in a=-5
0	1	1	1
0.1	1.0201	1.0201	1.0201
0.2	1.0861	1.0807	1.0812
⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	4.0	3.9406903	−68.639804
1.1	4.8841	4.8082197	+367.26392
⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	25.0	24.632457	$-6.96E8$

تعریف ۶.۱. روش چندگامی خطی (۲.۱) را صفر – پایدار[12] می‌نامیم هرگاه ریشه‌های $\rho(\xi) = 0$ داخل و روی دایره واحد بوده و ریشه‌های از چندگانگی بیش از ۱ داخل دایره واحد قرار گیرند.

چند قضیه مهم برای روشهای چندگامی خطی که در زیر آورده می‌شود رابطه بین مفاهیم فوق را نشان می‌دهد. اثبات آنها را می‌توان در [۱۶] دید.

قضیه ۳.۱ . اگر روش چندگامی خطی (۲.۱) همگرا باشد آنگاه صفر – پایدار است.

قضیه ۴.۱ . سازگاری و صفر – پایداری با هم شرط لازم و کافی برای همگرائی روش هستند.

---

[12] Zero-stable

بررسی مرتبه روش

روش k- گامی خطی (۲.۱) تعداد $2k+2$ ضریب α_i و β_i دارد که با فرض $\alpha_k = 1$، تعداد $2k+1$ پارامتر آزاد داریم. لذا انتظار می رود برای یک روش k- گامی ضمنی مرتبه روش $2k$ و برای روش صریح $2k-1$ باشد. اما برای داشتن صفر — پایداری قضیه زیر، محدودیت مرتبه را مشخص می‌کند.

قضیه ۵.۱ . در یک روش k- گامی خطی صفر — پایدار مرتبه روش برای مقادیر فرد k، حداکثر $k+1$ و برای مقادیر زوج k، حداکثر $k+2$ است.

اثبات. (ر.ک. [۱۰]).□

درنتیجه برای داشتن روش k- گامی خطی صفر — پایدار، حداکثر مرتبه روش $k+2$ می باشد.

تعریف ۷.۱ . روش k- گامی خطی صفر — پایدار، از مرتبهٔ $k+2$ را روش بهینه[13] گویند. برای این گونه روشها، ریشه‌های $\rho(\xi)$، همگی روی دایره واحد قرار دارند. اثبات این مطلب، در [۱٦] آمده است.

روش دوگامی ضمنی خطی زیر، که به روش سیمپسون مشهور است، در نظر می‌گیریم:

$$y_{n+2} - y_n = \frac{h}{3}(f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n).$$

در اینجا $k=2$ و ضمناً مرتبه روش ۴ است، طبق توضیح بالا ماکزیمم مرتبه را دارد زیرا طبق بحث بالائی مرتبهٔ روش $2k$ است، و از طرفی بنابر قضیه فوق، مرتبه $k+2$ را دارد که حداکثر مرتبه است. تنها روش چندگامی است که دارای چنین خاصیت است. در ضمن ریشه‌های $\rho(\xi) = 0$ که برابر با ۱+ و ۱− می‌باشند، هردو روی دایره هستند.

---

[13] Optimal Method