بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی

موضوع

قضایای کلاسیک نظریه گروهها برای زیرگروههای فازی یک گروه

استاد راهنما

دکتر سید احمد موسوی

نگارش

شیرویه پیروی چشناسر

شهریور ۱۳۷۲

تشکر وقدردانی

بنام آنکه جان را فکرت آموخت

چراغ روشنی در دل بر افروخت

با حمدوسپاس به درگاه خداوند بزرگ که به ما توان خواندن ونوشتن وفکر کردن عطا فرمود تا بتوانیم در راه او و به بندگان او خدمت کنیم. اکنون که به لطف وعنایت پروردگار رساله کارشناسی ارشدریاضی تهیه شده ،لازم می دانم از همه مربیانی که به نحوی حق تربیت و تعلیم به گردن بنده دارند تشکروسپاسگزاری کنم .

نخست وظیفه خود می دانم که مراتب سپاس وتشکررا از استاد ارجمند جناب آقای دکترسیداحمد موسوی که مقام راهنمایی اینجانب را همواره درطول انجام این رساله عهده دار بوده اند اعلام داشته و به پاس لطف سرشار ایشان از خدای بزرگ بخواهم تا درتمام مراحل زندگی ایشان را موردعنایت و لطف خویش قرار دهد .

واجب است تا از دیگراستادان بزرگوار بخش ریاضی دانشگاه تربیت مدرس آقایان دکترمحمدحسینی علی آبادی (معاونت محترم پژوهشی دانشکده علوم پایه) و دکتر سیدمحمد باقر کاشانی (مدیرمحترم گروه ریاضی دانشگاه) صمیمانه قدردانی و تشکرنمایم . همچنین از استادان بزرگوار جناب آقای دکتر عبدالجواد طاهری زاده (ریاست محترم دانشگاه تربیت معلم اراک) و جناب آقای دکتر علی وحیدیان کامیاد (عضو محترم گروه ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد) که حضورشان در جلسه دفاعیه به عنوان اساتید ناظر مغتنم وگرامی است ، تشکرنمایم وبه پاس این بزرگواری ازخداوند بزرگ آرزوی بهروزیشان راداشته باشم .

و نیز از مرکز تحقیقات فیزیک نظری وریاضیات ، کتابخانه دانشگاه تربیت مدرس که دشواری تهیه مقالات را به آسانی هموار نموده اند صمیمانه سپاسگزارم . .

در پایان از کلیه دوستانی که همواره مشوق بنده درتکمیل این رساله بوده اند . تقدیر می نمایم . .

شیرویه پیروی چشناسر

"فهرست مطالب"

عنوان	صفحه

چکیـــــــــده :

آنچه در پی می آید شامل مباحثی پیرامون زیرگروههای فازی وهمدسته‌های فازی و همومرفیسم فازی می باشد که براساس آن نتایج جدیدی بدست آمده است . که به ضمیمه می باشد .

در سال ۱۹۶۵ دکتر لطف علی عسگری زاده تعریفی از زیرمجموعه‌های فازی به عنوان تابعی از یک مجموعه مفروض‌به‌فاصله[۰,۱] بیان نموده ونظریه مجموعه‌های فازی را بنا نهاد . سپس گوگن Goguen با استفاده از شبکه کامل Complete Lattice به جای [۰,۱] این نظریه راتوسعه داد .پس از آن نظریه مجموعه‌های فازی مورد علاقه بسیاری از محققین درشاخه‌های مختلف ریاضی ، ازجمله جبروآنالیز ، توپولوژی ، کامپیوتر ، .... قرار گرفت و مقالات زیادی دراین زمینه منتشر شده است .

در سال ۱۹۷۱ رزنفلد Rosenfeld با چاپ مقاله‌ای (۱۷) جبر فازی را برای اولین بار مطرح نمود . آنگاه ریاضی دانان دیگری نه تنها مفهوم ومطالب زیرگروههای فازی راتوسعه داده بلکه ایده آل های فازی مدول های فازی ، فضا های برداری فازی و .... مطرح و مقالات متعددی به چاپ رسانده‌اند که بعضی از این مقالات در فهرست مراجع این رساله آمده است وعلاقه‌مندان برای آشنایی بیشترمی توانند به مجلات بین المللی زیر بخصوص سالهای بعد از ۱۹۷۱ مراجعه نمایند .

1- Journal of mathematical Analysis and Application .

2- Information Science .

3- fuzzy sets and systems .

این رساله در زمینه جبر فازی است و از چهار فصل تشکیل شده است در فصل اول ضمن ارائه تعریف زیرمجموعه‌های فازی و چند قضیه مقدماتی زیرگروههای نرمال وهمدسته‌های فازی را تعریف کرده وبه بررسی خواص آنها می پردازیم . سپس زیرمجموعه‌های ترا ز زیرگروههای فازی را تعریف می کنیم .

فصل دوم از دو بخش تشکیل شده است در بخش اول قضیه کیلی را برای زیرگروههای فازی بیان می کنیم ومرتبه زیرگروه فازی از یک گروه متناهی، زیرگروه فازی ابلی،زیرگروه فازی حل پذیر را تعریف می کنیم . در بخش دوم زیرگروههای فازی را توسط زیرگروههای تراز بسته‌بندی می کنیم و زیرگروههای فازی گروههای متناهی را تعیین می کنیم .

فصل سوم نیز از دو بخش تشکیل شده است در بخش اول ضرب مستقیم زیرگروههای فازی را بیان می کنیم و در مورد رابطه بین زیرگروههای فازی از حاصلضرب گروهها و تصویر آنها بحث می کنیم . در بخش دوم ضرب مستقیم و ضرب نیم مستقیم زیرگروههای فازی را تعریف می کنیم وشرایطی را که لازم است تا ضرب نیم مستقیم زیرگروههای فازی ، یک زیرگروه فازی باشد بیان می کنیم و بالاخره مثالی ارائه می دهیم که درآن یک زیرگروه فازی از ضرب نیم مستقیم ، ضرب نیم مستقیم از زیرگروههای فازی است .

فصل چهارم از چهار بخش تشکیل شده است . شروع بخش اول از فصل چهارم با تعریف زیرگروههای فازی محض و بخش‌پذیر است . در بخش دوم سعی می کنیم شکل فازی قضایای سیلو را بیان کنیم و چند نتیجه اساسی از زیرگروههای P- سیلو را درنظرمی گیریم و آنها را به مدل فازی تعمیم می دهیم .

در بخش سوم زیرگروههای تراز واجتماع زیرگروههای فازی را بیان می کنیم وشرایطی را که‌تحت آن یک زیرگروه فازی را نمی توان بصورت اجتماع دوزیرگروه فازی تجزیه کردبررسی می کنیم . در بخش چهارم هومومرفیسم های فازی را تعریف می کنیم . و تاشیرآن را روی زیرگروههای فازی مورد مطالعه‌قرار می دهیم .

فصل اول

☜ زیرگروههای نرمال فازی و شکل فازی قضیه لاگرانژ

فصـــل اول

زیر گرو هها ی نرما ل فا زی و شکل فا زی قضیه لاگرا نژ

درا ین فصل مفا هیم زیرگروه نرما ل وهمدسته فا زی را تعریـــــــــف می‌کنیم وثا بت می کنیم که زیرگروه فا زی μ ا ز گروه G نرما ل است اگروفقط اگر μ روی کلاس ها ی مزدوج G ثا بت با شـد . وهمچنین نشا ن می دهیم که هرگا ه μ یک زیرگروه فا زی ا زگروه G با شد بطوریکه ا ندیس فا زی μ کوچکتریـــــن عددا ولی با شدکه مرتبه G را عا دکندآ نگا ه μ زیرگروه نرما ل فا زی ا ست . و علاوه برآ ن ثا بت می کنیم زیرگروهها ی ترا زیک زیرگروه فا زی نرما ل ،نرمال هستندونشا ن می دهیم یک تنا ظریکبیک بین همدسته‌ها ی (را ست)فا زی زیرگروه فا زی μ و همدسته‌ها ی (را ست) زیرگروه مشخص H ا ز G وجوددا رد ،ویک شکل فا زی ا زقضیه لاگر انژ را نیزثا بت می کنیم .

۱-۱- تعاریف وقضایای مقدماتی

<u>تعریف ۱-۱-۱</u>: فرض کنید S یک مجموعه باشد نگاشت $\mu : S \longrightarrow [0,1]$ یک زیرمجموعه فازی S نامیده می شود.

<u>تعریف ۱-۱-۲</u>: فرض کنید S یک زیرگروه واره باشد، مجموعه‌ای که تحت یک رابطه دوتایی که با ضرب نشان داده می شود بسته باشد، نگاشت $\mu : S \longrightarrow [0,1]$ یک زیرگروه واره فازی نامیده می شود هرگاه $\forall x,y$ در S

$$\mu(xy) \geq \min(\mu(x), \mu(y))$$

<u>توضیح</u>: اگر $x_1, \dots, x_n \in S$ و μ یک زیرگروه‌واره فازی باشد آنگاه $\mu(x_1 \cdot \dots \cdot x_n) \geq \min\{\mu(x_i) : 1 \leq i \leq n\}$

برای $n=2$ طبق تعریف ۱-۱-۲ رابطه فوق برقرار است و فرض کنید به طریقی رابطه فوق را برای $n \geq 2$ ثابت کرده باشیم می خواهیم برای $n+1$ حکم را ثابت کنیم.

$$\mu(x_1 \cdot \dots \cdot x_{n+1}) = \mu((x_1 \cdot \dots \cdot x_n) x_{n+1})$$

$$\geq \min(\mu(x_1 \dots x_n), \mu(x_{n+1})) \geq \min(\min\{\mu(x_i) : 1 \leq i \leq n\}, \mu(x_{n+1})) = \min\{\mu(x_i) : 1 \leq i \leq n+1\}$$

<u>تعریف ۱-۱-۳</u>: فرض کنید G یک گروه باشد نگاشت $\mu : G \longrightarrow [0,1]$ یک زیرگروه فازی نامیده می شود هرگاه

$$(i) \quad \mu(xy) \geq \min(\mu(x), \mu(y)) \qquad \forall x,y \in G$$

$$(ii) \quad \mu(x^{-1}) = \mu(x) \qquad \forall x \in G$$

<u>تعریف ۱-۱-۴</u>: اگر μ یک زیرمجموعه فازی از مجموعه S باشد آنگاه برای هر $t \in [0,1]$ $\mu_t = \{x \in G : \mu(x) \geq t\}$ یک زیرمجموعه تراز μ نامیده میشود.

اگر μ یک زیرگروه فازی از گروه G با عنصر همانی e باشد آنگاه برای هر $x \in G$ داریم:

(۱) $\mu(x) \leq \mu(e)$. برای هر $x \in G$ ، $xx^{-1}=e$ و

$$\mu(e) = \mu(xx^{-1}) \geqslant \min(\mu(x), \mu(x^{-1})) = \min(\mu(x), \mu(x)) = \mu(x)$$

$$\Rightarrow \forall x \in G \qquad \mu(x) \leq \mu(e)$$

لم ۱ – ۱– ۵ – اگر μ یک زیرگروه فازی از گروه G باشد انگاه برای هر $t \in [0 , 1]$ با شرط $\mu(e) \geqslant t$ مجموعه تراز μ_t یک زیرگروه G است .

برهان : ثابت می کنیم μ_t تحت ضرب بسته است وهرعنصرش در μ_t وارون دارد .

$$\forall x, y \in \mu_t \quad , \quad \mu(x) \geqslant t \ , \ \mu(y) \geqslant t$$

$$\mu(xy) \geqslant \min(\mu(x), \mu(y)) \geqslant \min(t, t) = t \Rightarrow xy \in \mu_t$$

$$\forall x \in \mu_t \qquad \mu(x^{-1}) = \mu(x) \geqslant t \Rightarrow x^{-1} \in \mu_t$$

بنابراین μ_t یک زیرگروه G است . دراین حالت مجموعه تراز μ_t زیرگروه تراز μ نامیده می شود .

قضیه ۱ – ۱ – ۶ : فرض کنید G یک گروه و μ زیرگروه فازی G باشد دوزیرگروه تراز μ_{t_1} و μ_{t_2} $(t_1 < t_2)$ از μ مساویند اگر وفقط اگر هیچ $x \in G$ وجود نداشته باشد بطوریکه $t_1 \leq \mu(x) < t_2$.

برهان : فرض کنید $\mu_{t_1} = \mu_{t_2}$ وفرض کنید $x \in G$ موجود باشد بطوریکه $t_1 \leq \mu(x) < t_2$ آنگاه $\mu_{t_1} \subsetneqq \mu_{t_2}$ چون $x \in \mu_{t_1}$ و $x \notin \mu_{t_2}$ واین متناقض با فرض $\mu_{t_1} = \mu_{t_2}$ است .

برعکس فرض کنیم هیچ $x \in G$ موجود نباشد که $t_1 \leq \mu(x) < t_2$ چون $t_1 < t_2$ داریم $\mu_{t_2} \subseteq \mu_{t_1}$ فرض کنید $x \in \mu_{t_1}$ آنگاه $\mu(x) \geqslant t_1$ و $\mu(x) \geqslant t_2$ چون درغیراین صورت $t_1 \leq \mu(x) < t_2$ واین با فرض این قسمت تناقض دارد لذا $x \in \mu_{t_2}$ ودرنتیجه $\mu_{t_1} \subseteq \mu_{t_2}$ واز آنجا $\mu_{t_1} = \mu_{t_2}$.

قضیه ۱ – ۱ – ۷ : فرض کنید که G گروهی متناهی از مرتبه n و μ یک زیرگروه فازی از G باشد وفرض کنید $Im\mu = \{ t_i : \mu(x) = t_i \quad \exists x \in G \}$

آنگاه $\{\mu_{t_i}\}$ کلیه‌زیرگروههای تراز μ هستند. .

برهان : فرض‌کنید $t\in[0,1]$ و $\mu(e)>t$ و $t\notin Im\mu$ درنتیجه t_i و t_j در $Im\mu$ هستند بطوریکه $t_i<t<t_j$ آنگاه طبق قضیه ۱ ـ ۱ ـ ۶ چون هیچ $x\in G$ وجود ندارد که $t\leq\mu(x)<t_j$ پس $\mu_{t_j}=\mu_t$ واگر $t<t_r$ که درآن t_r کوچکترین عنصر $Im\mu$ است آنگاه $\mu_{t_r}=\mu_t=G$ بنابراین برای هر $t\in[0,1]$ که $\mu(e)>t$ و $t\notin Im\mu$ زیرگروه تراز μ_t یکی از μ_{t_i} هاست که در آن $t_i\in Im\mu$.

بنابراین اگر تصویر μ ($Im\mu$) برابر $\{t_0,t_1,\dots,t_r\}$ باشد آنگاه خانواده زیرگروههای تراز $\{\mu_{t_i}:\ 0\leq i\leq r\}$ مجموعه کامل زیرگروههای تراز μ را تشکیل می دهد .

اگر تصویر زیرگروه فازی μ از گروه متناهی G برابر $\{t_0,t_1,\dots,t_n\}$ باشد که درآن $t_0>t_1>\dots>t_n$ ، $n\in\mathbb{N}$ آنگاه زیرگروههای تراز μ تشکیل زنجیر

(۲) $\mu_{t_0}<\mu_{t_1}<\dots<\mu_{t_n}=G$ را می دهند که درآن $\mu(e)=t_0$.

ثابت می کنیم هر گاه $t_j<t_i$ ، $1\leq i,j\leq n$ آنگاه $\mu_{t_i}\subsetneqq\mu_{t_j}$ فرض کنید $x\in\mu_{t_i}$. پس $\mu(x)\geqslant t_i$ و $\mu(x)\geqslant t_i>t_j$ لذا $x\in\mu_{t_j}$ و $\mu_{t_i}\subseteq\mu_{t_j}$ و $\mu_{t_i}\neq\mu_{t_j}$ چون x ای در G موجود است‌که $t_j\leq\mu(x)<t_i$ به این خاطر که $t_j\in Im\mu$ پس x ای در G هست‌که $t_j=\mu(x)<t_i$.

بعدا " زیرگروههای تراز یک زیرگروه فازی راتجزیه وتحلیل می کنیم وثابت‌خواهیم کرد که دوزیرگروه فازی با خانواده زیرگروههای تراز یکسان برابرند اگر وفقط اگر تصویر آنها مساوی باشد . ثابت می کنیم که برای هر زنجیر داده شده از زیرگروههای G که به G ختم می شود زیرگروه فازی μ از

G وجود دارد که زیرگروههای تراز آن دقیقا " همان اعضای زنجیر داده شده‌اند . .

لـــم : ۱ – ۱ – ۸ – اگر μ یک زیرگروه وارده فازی از گروه متناهی G باشد آنگاه μ یک زیرگروه فازی است.

برهان : فرض‌کنید $x \in G$ چون G متناهی است x دارای مرتبه متناهی است فرض‌کنید مرتبه x ، n باشد آنگاه $x^n = e$ بنابراین $x^{-1} = x^{n-1}$ اگر $n = 2$ دراین صورت : $\mu(x^{-1}) = \mu(x^{2-1}) = \mu(x)$

فرض‌کنیم $n \geq 2$ وحکم برای $n - 1$ برقرار باشد . یعنی هرگاه برای هر $y \in G$ داشته باشیم $y^{n-1} = e$ آنگاه :

$$\mu(y^{-1}) = \mu(y^{n-2}) = \mu(y^{n-3} \cdot y) \geq min(\mu(y^{n-3}), \mu(y)) = \mu(y)$$

حالا حکم را برای n ثابت می‌کنیم

$$\mu(x^{-1}) = \mu(x^{n-1}) = \mu(x^{n-2} \cdot x) \geq min(\mu(x), \mu(x^{n-2})) \geq min(\mu(x), \mu(x)) = \mu(x)$$

و به همین طریق برای هر $x \in G$ داریم $\mu(x) = \mu((x^{-1})^{-1}) \geq \mu(x^{-1})$

بنابراین $\mu(x) = \mu(x^{-1})$ $\forall x \in G$ و μ یک زیرگروه فازی است .

لـــم: ۱ – ۱ – ۹– فرض‌کنید μ یک زیرگروه فازی از گروه G باشد وفـــرض کنید $x \in G$ آنگاه $\mu(xy) = \mu(y)$ $\forall y \in G \Longleftrightarrow \mu(x) = \mu(e)$

برهان : فرض‌کنید برای هر $y \in G$ $\mu(xy) = \mu(y)$ اگر قرار دهیم $y = e$ آنگاه

$$\mu(x) = \mu(x.e) = \mu(e)$$

برعکس فرض‌کنید $\mu(x) = \mu(e)$ آنگاه از (۱) داریم : $\forall y \in G$ $\mu(y) \leq \mu(e) = \mu(x)$

و بنابراین $\mu(xy) \geq min(\mu(x), \mu(y)) = \mu(y)$ $\forall y \in G$

ازطرفی $\mu(y) = \mu(x^{-1} \cdot xy) \geq min(\mu(x^{-1}), \mu(xy))$

و چون $\mu(y) \leq \mu(x)$ $\forall y \in G$ درنتیجه $\mu(y) \geq \mu(xy)$ $\forall y \in G$

وازدومطلب فوق بدست می آوریم . . $\mu(xy) = \mu(y)$ $\forall y \in G$.

توضیح : می توان ثابت کرد که اگر $\mu(x)=\mu(e)$ آنگاه برای هر $y\in G$ $\mu(xy)=\mu(yx)$ از لم ۱ – ۱ – ۹ داریم برای هر $y\in G$ $\mu(xy)=\mu(y)$ برای اثبات حکم کافیست نشان دهیم که برای هر $y\in G$ $\mu(yx)=\mu(y)$.

$$\forall y\in G \quad \mu(yx) \geq \min(\mu(y),\mu(x)) = \min(\mu(y),\mu(e)) = \mu(y)$$

$$\Rightarrow \forall y\in G \quad \mu(yx)\geq\mu(y)$$

$$\forall y\in G \quad \mu(y)=\mu(yx.x^{-1}) \geq \min(\mu(yx),\mu(x^{-1}))$$

$$= \min(\mu(yx),\mu(e)) = \mu(yx) \Rightarrow \forall y\in G \quad \mu(y)\geq\mu(yx)$$

از دو مطلب فوق داریم : $\forall y\in G \quad \mu(yx)=\mu(y)$

پس حکم ثابت شد .

تعریف ۱ – ۱ – ۱۰ – فرض کنید μ یک مجموعه فازی از S و f یک تابع روی مجموعه S باشد آنگاه μ یک مجموعه فازی مانند $f(\mu)$ روی $f(S)$ القا می کند که بصورت

$$\forall y\in f(S) \,,\; f(\mu)(y)=\begin{cases} \sup\limits_{x\in f^{-1}(y)} \mu(x) \\ 0 \quad \text{عوارنباشد} \end{cases}$$

تعریف می شود و $f(\mu)$ تصویر μ تحت f نامیده می شود .

قضیه ۱ – ۱ – ۱۱ : فرض کنید $f:G\to G'$ هومومورفیسم گروه باشد و μ زیرگروه فازی از گروه G باشد در این صورت $f(\mu)$ یک زیرگروه فازی G' است .

برهان : فرض کنید $y\in G'$ قرار می دهیم $X_y=f^{-1}(y)$ چون f هومومورفیسم است برای هر $y,y'\in G'$ ، $X_y X_{y'}\subset X_{yy'}$ حالا فرض کنید y و y' در G' دلخواه باشند اگر $yy'\notin Im f$ آنگاه طبق تعریف $f(\mu)(yy')=0$ و چون $yy'\notin Im f$ پس $X_{yy'}=\phi$ آنگاه $X_{y'}=\phi$ یا $X_y=\phi$