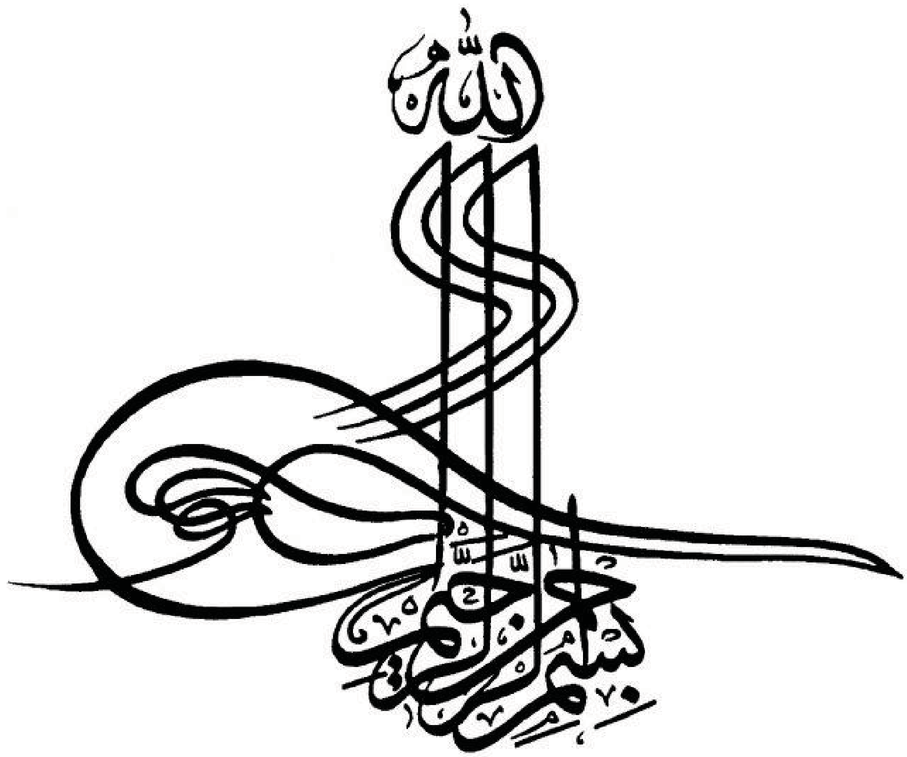
بسم الله الرحمن الرحيم

۱۳۵۷
دانشگاه محقق اردبیلی

دانشکده‌ی علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته‌ی ریاضی محض گرایش هندسه

عنوان:

مطالعه وبررسی فضاهای بروالدی با انحنای پرچمی نامثبت

استاد راهنما:

دکتر داریوش لطیفی

استاد مشاور:

دکتر محمد ضارب‌نیا

پژوهشگر:

سمیرا لطیفی

پاییز ۹۲

تعهدنامه‌ی اصالت اثر و رعایت حقوق دانشگاه

تمامی حقوق مادی و معنوی مترتب بر نتایج، ابتکارات، اختراعات و نوآوری‌های ناشی از انجام این پژوهش، متعلق به **دانشگاه محقق اردبیلی** می‌باشد. نقل مطلب از این اثر، با رعایت مقررات مربوطه و با ذکر نام دانشگاه محقق اردبیلی، نام استاد راهنما و دانشجو بلامانع است.

اینجانب سمیرا لطیفی دانش‌آموخته مقطع کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش هندسه دانشکده‌ی علوم ریاضی دانشگاه محقق اردبیلی به شماره‌ی دانشجویی ۹۰۲۲۴۲۳۱۰۵ که در تاریخ ۹۲/۱۰/۰۹ از پایان‌نامه‌ی تحصیلی خود تحت عنوان "مطالعه وبررسی فضاهای بروالدی با انحنای پرچمی نامثبت"،دفاع نموده‌ام متعهد می‌شوم که:

۱) این پایان‌نامه را قبلاً برای دریافت هیچ‌گونه مدرک تحصیلی یا به عنوان هرگونه فعالیت پژوهشی در سایر دانشگاه‌ها و مؤسسات آموزشی و پژوهشی داخل و خارج از کشور ارائه ننموده‌ام.

۲) مسئولیت صحّت و سقم تمامی مندرجات پایان‌نامه‌ی تحصیلی خود را بر عهده می‌گیرم.

۳) این پایان‌نامه، حاصل پژوهش انجام شده توسط اینجانب می‌باشد.

۴) در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران استفاده نموده‌ام، مطابق ضوابط و مقرّرات مربوطه و با رعایت اصل امانتداری علمی، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در متن و فهرست منابع و مآخذ ذکر نموده‌ام.

۵) چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده یا هر گونه بهره‌برداری اعم از نشر کتاب، ثبت اختراع و ... از این پایان‌نامه را داشته باشم، از حوزه‌ی معاونت پژوهشی و فنّاوری دانشگاه محقق اردبیلی، مجوزهای لازم را اخذ نمایم.

۶) در صورت ارائه‌ی مقاله‌ی مستخرج از این پایان‌نامه در همایش‌ها، کنفرانس‌ها، سمینارها، گردهمایی‌ها و انواع مجلات، نام دانشگاه محقق اردبیلی را در کنار نام نویسندگان (دانشجو و اساتید راهنما و مشاور) ذکر نمایم.

۷) چنانچه در هر مقطع زمانی، خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن (منجمله ابطال مدرک تحصیلی، طرح شکایت توسط دانشگاه و ...) را می‌پذیرم و دانشگاه محقق اردبیلی را مجاز می‌دانم با اینجانب مطابق ضوابط و مقرّرات مربوطه رفتار نماید.

نام و نام خانوادگی دانشجو : سمیرا لطیفی

امضا

تاریخ

نام خانوادگی: لطیفی نام: سمیرا

عنوان پایان‌نامه:

مطالعه وبررسی فضاهای بروالدی با انحنای پرچمی نامثبت

استاد راهنما: دکتر داریوش لطیفی

استاد مشاور: دکتر محمد ضارب‌نیا

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد

رشته: ریاضی محض گرایش: هندسه

دانشگاه: محقق‌اردبیلی دانشکده: علوم ریاضی

تاریخ دفاع:۹۲/۱۰/۰۹ تعداد صفحات: ۱۲۳

چکیده

فرض کنیدMیک منیفلد هموار همبند و α یک متریک ریمانی روی M باشد. در این صورت یک متریک راندرس روی M عبارت است از یک متریک فینسلر به فرم $F = \alpha + \beta$ که در آن β یک ۱-فرمی هموار با طول کمتر از یک می باشد. در این پایان نامه ابتدا هندسه فینسلری متریک های راندرس چپ پایا و دوپایا روی گروه های لی مورد بررسی قرار می گیرند،سپس ژئودزیک های متریک های فینسلری چپ پایا روی گروه های لی محاسبه می شوند. در ادامه بااستفاده از متریک های ریمانی ناوردا از چپ روی بعضی از گروه های لی ۳-بعدی متریک های بروالدی غیرریمانی ازنوع راندرس که انحنای پرچمی نامثبت دارند ساخته خواهد شد.

کلیدواژه‌ها: متریک راندرس ناوردا، متریک بروالد، انحنای پرچمی

۱۳۵۷
دانشگاه محقق اردبیلی

دانشکده‌ی علوم ریاضی
گروه ریاضیات و کاربردها

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته‌ی ریاضی محض گرایش هندسه

عنوان:

متریک راندرس ناوردا، متریک بروالد، انحنای پرچمی

پژوهشگر:

سمیرا لطیفی

ارزیابی و تصویب شده‌ی کمیته داوران پایان‌نامه با درجه‌ی ....

نام و نام خانوادگی	مرتبه‌ی علمی	سمت	امضا
دکتر داریوش لطیفی	استاد راهنما و رئیس کمیته داوران	استادیار	....
دکتر محمد ضارب‌نیا	استاد مشاور	مربی	....
دکتر نعمت اباذری	داور	دانشیار	....

پاییز ۱۳۹۲

فهرست مطالب

فهرست مطالب

مقدمه

کسی که هندسه نمی داند از این در داخل نشود.

کتیبه سردر ورودی آکادمی افلاطون

◄وبه (خاطربیاور) هنگامی را که ابراهیم گفت : "خدایا! به من نشان بده چگونه مردگان را زنده می کنی؟"فرمود: مگر ایمان نیاورده ای؟!" عرض کرد : "آری، ولی می خواهم قلبم آرامش یابد." فرمود : "در این صورت، چهار نوع از مرغان را انتخاب کن! وآنها را (پس از ذبح کردن)، قطعه قطعه کن(و در هم بیامیز)! سپس بر هر کوهی، قسمتی از آن را قرار بده، بعد آنها را بخوان، به سرعت به سوی تو می آیند! و بدان خداوند قادر و حکیم است : (هم از ذرات بدن مردگان آگاه است، وهم توانایی بر جمع آنها دارد)". سوره بقره ۲۶۰

انسان برای رسیدن به **اطمینان قلبی** در مورد درستی بسیاری از مفاهیم مجرد به درک شهودی و تجربی نیازمند است. ریاضی نیز به عنوان یک تلاش انسانی و یک جریان طبیعی تفکر بشری، همچنان که پولیا می گوید: " دارای دو جنبه است، یکی ساختارشهودی وتجربی ریاضی و دیگری ساختار مجرد آن." در این میان هندسه نیزبه عنوان شاخه ای از ریاضیات ابزاری برای درک و توصیف فضایی که در آن قرار گرفته ایم، شایدشهودی ترین، ملموس ترین و واقعی ترین قسمت ریاضی باشد، و این تنها یک جلوه از هندسه است.

اولین سوالی که با ملاحظه ی عنوان این پایان نامه به ذهن می رسد معناومفهوم فضای بروالد می باشد، فضاهای بروالدفقط یک کمی کلی تر از فضاهای ریمانی و مینکوفسکی موضعی هستند. آنها فراهم می کنند مثال هایی را که خیلی صریح فینسلری می باشند، بنابراین برای دریافت مفهوم این فضا ابتدا باید با فضاهای فینسلرکه حالت کلی تری از این فضارا تعریف می نمایند آشنا شد. فضای فینسلرتوسط پل

فینسلر درسال ۱۹۱۸ تعریف شده است که بااستفاده از نتایج به دست آمده توسط استاد خودش کنستانتین کاراتئودوری وقضیه اویلر موفق به تعریف مدونی از این متریک گردید. اودر حقیقت شرایطی برای یک تابع مانند $F(x,y)$ روی کلاف مماس TM ارائه نمود که در عین حال که ازتابع ریمان جامع تربود خواص آن رانیز داشت، درسال ۱۹٤۱ فیزیکدانی به نام راندرس هنگام مطالعه درمورد نظریه نسبیت عام یک فضای فینسلری خاص رامعرفی نمود تادرمورد یکی کردن میدان های گرانش والکترومغناطیس بحث کند راندرس نوع بسیارجالبی ازمترهای فینسلررا در نظرگرفت که جمع یک متر ریمانی ویک ۱-فرمی به صورت $F=\alpha+\beta$ است، این نوع از مترهای فینسلری متر راندرس نامیده شد.

از طرفی مطالعه ی فضاهای ریمانی باخواص انحنا یکی از مسائل جالب در هندسه دیفرانسیل است، خانواده ی گروه های لی بامتریک های ریمانی پایا یکی از این فضاهای مهم است. گروه های لی ریمانی با خواص انحنای مقطعی توسط تعداد زیادی از ریاضیدانان وعلاقه مندان مطالعه شده ونتایج مهمی روی این منیفلدها پیدا شده است. در سال های اخیرباتوسعه ی مطالعات روی منیفلدهای فینسلرو کاربرد فضاهای فینسلردرفیزیک، فضاهای فینسلربا خواص انحنا توسط تعداد زیادی هندسه دان فینسلری مطالعه شده اند. متریک های فینسلرپایا روی گروه های لی وفضاهای همگن از بهترین فضاها برای پیداکردن فضاهای باخواص انحنادار هستند. یک خانواده ی مهم ازمنیفلدهای فینسلرکه به ما کمک می کنند تا هندسه فینسلر را مطالعه نماییم خانواده ی فضاهای فینسلرمسطح است(که منیفلدفینسلر باانحنای پرچمی ثابت صفراست).

در این نوشته باکاربرد متریک های ریمانی چپ پایا و میدان های برداری چپ پایا روی گروه های لی ۳-بعدی تعدادی متریک راندرس مینکوفسکی موضعی چپ پایای کامل ژئودزیکی با انحنای پرچمی ثابت صفر ساخته می شود. تعدادی فضای فینسلر با انحنای پرچمی نامثبت توسط $Z.Shen$ مطالعه شده اند. او نشان داد که هر متریک فینسلربا انحنای پرچمی منفی و S-انحنای ثابت باید ریمانی باشد اگرمنیفلد فشرده است. همچنین $S.Deng$ و $Z.Hou$ فضاهای فینسلرهمگن با انحنای نامثبت را مطالعه

کرده اند. آن ها ثابت کردندکه یک فضای فینسلرهمگن باانحنای پرچمی نامثبت و اسکالرریچی منفی یک منیفلدپیوسته ی ساده است. در این نوشته تعدادی فضای بروالد غیرریمانی چپ پایای کامل با انحنای پرچمی نامثبت موردمطالعه قرار گرفته اند.

مجموعه حاضر شامل چهار فصل می باشد که در فصل اول تعاریف و مقدمات اولیه مربوط به خمینه، کلاف، میدان ها، گروه وجبرلی، هندسه ریمانی و در نهایت هندسه فینسلری گنجانده شده است.

در فصل دوم متریک های پایا روی گروه های لی مورد مطالعه قرار گرفته اند، که شامل زیر فصل های متریک های ریمانی پایا، فضاهای راندرس(متریک های راندرس)، و فضاهای بروالد می باشند.

فصل سوم که قسمت اصلی پایان نامه را شامل می شود، مربوط به بررسی برخی از فضاهای مینکوفسکی موضعی کامل ژئودزیکی با انحنای پرچمی ثابت صفر می باشد.

در فصل چهارم به بیان سه مثال در رابطه با فضاهای بروالد کامل با انحنای پرچمی نا–مثبت پرداخته شده و برای هرکدام از آن ها مقدار انحنای پرچمی محاسبه گردیده است.

حضوری گر همی خواهی از او غایب مشو حافظ.

فصل ۱
تعاریف و مقدمات اولیه

۱.۱ خمینه

۱.۱.۱ خمینه‌ی توپولوژیک

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید M یک فضای توپولوژیک باشد در این صورت M را **موضعاًاقلیدسی**[۱] گویند، هرگاه برای هر نقطه‌ی p از M یک همسایگی باز u از آن در M یک همسایگی باز v در R^n و یک هومومرفیسم (۱–۱ و پوشا وخود φ و وارون آن هر دو پیوسته) $\varphi : u \to v$ را داشته باشیم.

مثال ۲.۱.۱. فرض کنید $M = R^n$ در این صورت برای هر نقطه‌ی $p \in M$، قرار می‌دهیم $u = M$ و همین طور $\varphi = id : M \to M$. یعنی فضاهای اقلیدسی[۲]، موضعااقلیدسی هستند.

تعریف ۳.۱.۱. یک فضای توپولوژیک را **هاسدورف**[۳] گویند، هرگاه برای هردو نقطه‌ی متمایز آن همسایگی‌هایی از این دونقطه موجود باشند که یکدیگر را قطع نکنند.

تعریف ٤.۱.۱. فرض کنید M یک مجموعه‌ی ناتهی، O زیرمجموعه‌ی بازی از R^n و $U \subseteq M$ باشد. نگاشت دوسویی

$$x : U \Rightarrow x(U) = O \subseteq \Re^n$$

را یک **کارت**[٤] n –بعدی،U را حوزه‌ی کارت و زوج (x, U) را یک کارت موضعی[٥] می‌نامیم.

تعریف ٥.۱.۱. اگر M را بتوان توسط تعدادی شمارا از کارت‌ها پوشانید آنگاه M دارای **پایه‌ی شمارا**[٦] است.

تعریف ٦.۱.۱. فضای توپولوژیک x را یک **خمینه‌ی توپولوژیک** [۷] گوییم هرگاه:

[۱] Locally euclidean
[۲] Euclidean space
[۳] Housdorff
[٤] Chart
[٥] Local chart
[٦] Countable basis
[۷] Topological manifold

۱. موضعا اقلیدسی باشد،

۲. هاسدورف باشد،

۳. دارای پایه‌ی شمارا باشد.

مثال ۷.۱.۱. فضاهای S^1 و S^2 و R^nها، رویه‌ها، $M(n,R)$ همه خمینه[1] توپولوژیک هستند.

۲.۱.۱ خمینه‌ی هموار

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید M یک خمینه توپولوژیک n–بعدی و $A=\{(U_\alpha,x_\alpha),\alpha\in A\}$ یک مجموعه از کارت‌های روی M باشد، در این صورت A را یک **اطلس**[2] روی M گوییم هرگاه:

۱. دامنه‌ی کارت‌ها M را بپوشاند،یعنی $M=\bigcup\limits_{\alpha\in A}U_\alpha$،

۲. اعضای A دو به دو $c^\infty-$ مرتبط باشند.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید M یک خمینه توپولوژیک باشد در این صورت اطلس A روی M را یک **اطلس ماکسیمال**[3] گویند، هرگاه A مشمول درهیچ اطلس دیگری نباشد.

قضیه ۱۰.۱.۱. فرض کنید M یک خمینه توپولوژیک باشد و A یک اطلس روی M باشد، در این صورت A مشمول در یک اطلس ماکسیمال است.

برهان. برای اثبات قضیه به مرجع (بیدآباد، ۱۳۸۹) مراجعه کنید.

□

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید M یک خمینه توپولوژیک n–بعدی و A یک اطلس ماکسیمال روی آن باشد، در این صورت این اطلس ماکسیمال را یک ساختار دیفرانسیل‌پذیر[4] روی M و زوج (M,A) را

[1] Manifold
[2] Atlas
[3] Maximal-Atlas
[4] Differentiable Structure

یک **خمینه‌ی هموار** گوییم (خمینه دیفرانسیل‌پذیر[۱]).

در حقیقت یک خمینه هموار عبارت است از یک خمینه توپولوژیک به همراه یک ساختار دیفرانسیل‌پذیر.

۲.۱ کلاف

۱.۲.۱ کلاف مماس

تعریف ۱.۲.۱. مجموعه‌ی تمام کلاس‌های هم ارزی $[\alpha]_p$ را با نماد T_pM نشان می‌دهند:

$$T_pM = \{[\alpha]_p | \alpha : I \to M, \alpha(\circ) = p\}$$

و آن را **فضای مماس**[۲] بر M در p گویند (کلاس های $[\alpha]_p$ بردارهای مماس[۳] بر M در p خواهند بود).

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید M یک خمینه n–بعدی باشد، در این صورت **کلاف مماس**[۴] Mبه صورت اجتماع تمام فضاهای مماس تعریف می‌شود و به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$$

۲.۲.۱ کلاف برداری

تعریف ۳.۲.۱. **کلاف برداری**[۵] k– بعدی روی خمینه هموار N ،یک خمینه هموار ν بانگاشت هموار و پوشای $\pi : \nu \to N$ می‌باشد به طوری که برای هر دامنه مختصات $U \subset N$ و $\pi^{-1}(U)$ دیفیومرفیک به $U \times R^k$ می‌باشد و برای هر $x \in U$ ،$\pi^{-1}(x)$ تحدید از دیفیومرفیک با $\{x\} \times R^k$ می‌باشد.

- $\nu(x) := \pi^{-1}(x)$ یک تار[۶] در x نامیده می‌شود.

- کلاف برداری $\pi : \nu \to N$ را با ν نمایش می‌دهند.

[۱] Differentiable Manifold
[۲] Tangent space
[۳] Tangent vector
[۴] Tangent bundle
[۵] Vector bundle
[۶] Fiber

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید M یک خمینه و $TM=\bigcup_{x\in M}T_xM$ یک کلاف برداری روی M است. مجموعه‌ی

$$TM_\circ := TM-\{\circ\}=\{y\in T_xM|\ y\neq\circ, x\in M\}$$

کلاف مماس شکاف‌دار[۱] روی M نامیده می‌شود.

۳.۲.۱ کلاف کتانژانت

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید M یک خمینه هموار n–بعدی باشد، در این صورت برای $p\in M$، فضای مماس T_pM یک فضای n–بعدی است. بنابراین دوگان[۲] آن یعنی T_p^*M نیز یک فضای برداری n–بعدی است:

$$T_p^*M=\{f:T_pM\to R\}$$

هرگاه قرار دهیم $T^*M=\bigcup_{p\in M}T_p^*M$، آنگاه T^*M را **کلاف کتانژانت**[۳] می‌نامیم. (T^*M دارای ساختار خمینه ی $2n$–بعدی است.)

تعریف ۶.۲.۱. اگر M یک خمینه n–بعدی و p نقطه‌ای از آن باشد در این صورت اعضای T_p^*M را **۱–فرمی**[۴] گویند یعنی یک ۱–فرمی در نقطه‌ی p عبارت است از یک تابعک خطی

$$\omega:T_pM\to R$$

[۱] Slit tangent bundle
[۲] Duality
[۳] Cotangent bundle
[۴] One form

۳.۱ میدان ها

۱.۳.۱ میدان برداری

تعریف ۱.۳.۱. یک **میدان برداری**[۱] روی M عبارت است از نگاشت:

$$X : c^{\infty}(M) \to c^{\infty}(M)$$

$$f \to X(f)$$

که خواص زیر را دارد:

$$X(f+g) = X(f) + X(g)$$

$$X(\lambda f) = \lambda X(f)$$

$$X(f.g) = X(f).g + f.X(g)$$

مجموعه‌ی تمام توابع هموار حول یک همسایگی p از R^n را با نماد $c^{\infty}(p)$ نشان می‌دهیم یعنی:

$$c^{\infty}(p) = \{ f : U \subseteq R^n \to R | p \in U \}$$

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنید $a \in G$ یک عضو دلخواه باشد در این صورت نگاشت‌های زیر را داریم:

۱. $$l_a : G \to G$$

$$l_a(b) = ab$$

l_a را **انتقال چپ**[۲] گویند.

۲. $$R_a : G \to G$$

$$R_a(b) = ba$$

R_a را **انتقال راست**[۳] گویند.

[۱] Vector field
[۲] Left transport
[۳] Right transport

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنید x یک **میدان برداری** روی گروه لی[۱] G باشد یعنی $x \in \chi(G)$ در این صورت x را ناوردا از چپ(**چپ پایا**)[۲] گویند هرگاه:

$$(dl_a)_b x_b = x_{l_a(b)} = x_{ab}$$

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنید x یک **میدان برداری** روی گروه لی G باشند یعنی $x \in \chi(G)$ در این صورت x را ناوردا از راست(**راست پایا**)[۳] گویند هرگاه:

$$(dR_a)_b x_b = x_{R_a(b)} = x_{ba}$$

۲.۳.۱ میدان تانسوری

تعریف ۵.۳.۱. یک **میدان تانسوری**[۴] از نوع $\binom{\circ}{p}$ روی M عبارت است از یک بخش c^∞ از نگاشت $\pi : \bigotimes_p^\circ : TM \to M$ یابه عبارت دیگر نگاشت c^∞:

$$t : M \to \bigotimes_p^\circ (TM)$$
$$m \to t_m \in \bigotimes_p^\circ (T_m M)$$

مجموعه‌ی میدان‌های تانسوری روی M را با $\bigotimes_p^\circ(M)$ نمایش می‌دهند. $\bigotimes_p^\circ M$ دارای یک ساختار $c^\infty(M)$– مدول همراه با اعمال زیر می‌باشد:

- $(t+l)_m = t_m + l_m$
- $(ft)_m = f(m) t_m$

---

[۱] Lie group
[۲] Left invariant
[۳] Right invariant
[۴] Tensor field

-تانسوری از نوع $\binom{\circ}{p}$ را می‌توان معادل نگاشت $c^{\infty}(M)$-چندخطی زیر قرار داد:

$$t : \chi(M) \times \cdots \times \chi(M) \to c^{\infty}(M)$$

$$t(X_{۱}, \cdots , X_p) = t_m((X_{۱})_m, \cdots , (X_p)_m)$$

درمختصات موضعی (x, U) رابطه‌ی اخیربه صورت زیر نوشته می‌شود:

$$t = \sum t_{i_{۱} \cdots i_p} dx^{i_{۱}} \otimes \cdots \otimes dx^{i_p}.$$

(t یک میدان تانسوری $\binom{\circ}{p}$ روی M است.)

۴.۱ گروه و جبرلی

۱.۴.۱ گروه لی

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنید G یک گروه باشد که همزمان خمینه هموار نیز می‌باشد. اگر توابع

$$\varphi : G \times G \to G$$

$$(x, y) \mapsto xy$$

و

$$i : G \to G$$

$$x \mapsto x^{-۱}$$

هموار باشند آنگاه G را یک **گروه لی** گویند.

تعریف ۲.۴.۱. فرض کنید □ یک **گروه لی** باشد □ را **آبلی**[۱] گویند هرگاه:

$$x.y = y.x, \qquad \forall x, y \in G$$

[۱] Abelian

۲.۴.۱ جبرلی

تعریف ۳.۴.۱. فضای مماس T_eG با عمل کروشه‌ی $[,]$ را **جبرلی**[۱] متناظر با گروه لی G گویند و با $\underline{g}$ نشان می‌دهند.

درحالت کلی داریم:

فرض کنید V یک فضای برداری با بعد n باشد. (حقیقی یا مختلط) اگر روی V یک عمل $[,]$ با خواص زیر موجود باشد آنگاه آن را یک جبرلی گویند:

۱.
$$[ax+by,z]=a[x,z]+b[y,z], \qquad \forall x,y,z\in V$$
$$[x,ay+bz]=a[x,y]+b[x,z]$$

۲.
$$[x,y]=-[y,x]$$

۳.
$$\big[x,[y,z]\big]+\big[y,[z,x]\big]+\big[z,[x,y]\big]=0$$

مثال ۴.۴.۱. اگر M یک خمینه n–بعدی هموار و $\chi(M)$ مجموعه‌ی تمام میدان‌های برداری باشد، $\chi(M)$ با کروشه‌ی زیر یک جبر لی است:

$$[x,y]=xy-yx$$

تعریف ۵.۴.۱. **جبرلی** $\underline{V}$ را **آبلی** گویند هرگاه

$$\forall x,y\in \underline{\square}\ , \qquad [x,y]=0$$

قضیه ۶.۴.۱. فرض کنید G یک گروه لی همبند و $\underline{g}$ جبرلی آن باشد. اگر $\underline{g}$ آبلی باشد آنگاه G نیز آبلی است و بر عکس.

برهان. برای اثبات قضیه به مرجع(رضوی،۱۳۸۷) مراجعه کنید. $\square$

[۱] Lie algebra