بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه بین المللی امام خمینی

IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

وزارت علوم ، تحقیقات و فناوری

دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

دانشکده علوم پایه

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (هندسه)

عنوان :

گروه بنیادی مثلث سرپینسکی

استاد راهنما :

دکتر رضا میرزایی

استاد مشاور :

دکتر عزیزالله عزیزی

دانشجو :

علیرضا محمد فخیم

اسفند ۸۷

بسمه تعالی

دانشگاه بین المللی امام خمینی

IMAM KHOMEINI INTERNATIONAL UNIVERSITY

دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره)

معاونت آموزشی دانشگاه- مدیریت تحصیلات تکمیلی

(فرم شماره ۲۶)

تعهد نامه اصالت پایان نامه

اینجانب علیرضا محمد ضخیم دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد بدین وسیله اصالت کلیه مطالب موجود در مباحث مطروحه در پایان نامه / ~~تز تحصیلی~~ خود، با عنوان گروه بندی های مثلث سرپینسکی را تأیید کرده، اعلام می نمایم که تمامی محتوی آن حاصل مطالعه ، پژوهش و تدوین خودم بوده و به هیچ وجه رونویسی از پایان نامه و یا هیچ اثر یا منبع دیگری، اعم از داخلی، خارجی و یا بین المللی ، نبوده و تعهد می نمایم در صورت اثبات عدم اصالت آن و یا احراز عدم صحت مفاد و یا لوازم این تعهد نامه در هر مرحله از مراحل منتهی به فارغ التحصیلی و یا پس از آن و یا تحصیل در مقاطع دیگر و یا اشتغال و ... دانشگاه حق دارد ضمن رد پایان نامه نسبت به لغو و ابطال مدرک تحصیلی مربوطه اقدام نماید. مضافاً اینکه کلیه مسئولیت ها و پیامدهای قانونی و یا خسارت وارده از هر حیث متوجه اینجانب می باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو علیرضا محمد ضخیم

امضاء و تاریخ ۱۳۸۷/۱۲/۲۷

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

جلسه دفاع از پایان نامه ی آقای علیرضا محمد فخیم دانشجوی مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض، گرایش هندسه، در تاریخ ۱۳۸۷/۱۲/۵ تحت عنوان **گروه بنیادی مثلث سرپینسکی**، در دانشگاه تشکیل گردید و مورد تایید نهایی هیات محترم داوران به شرح ذیل قرار گرفت:

۱- استاد راهنما : آقای دکتر رضا میرزایی

۲- استاد مشاور : آقای دکتر عزیزا... عزیزی

۳- داورخارجی : آقای دکتر شفاف

۴- داورداخلی : آقای دکتر علی آبکار

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی : آقای دکتر عبدالرحمن رازانی

حوزه آموزشی و تحصیلات تکمیلی
دانشگاه بین المللی امام خمینی

تقدیم به

او که سرآغاز هر چیز است

تقدیم به پدر دلسوزم

پدری که طلوع تمام خوبی هاست

به بزرگی آسمان، به مهربانی خورشید و به سخاوت ابر

آغاز مهربانی هایش برایم گم شده و پایانش ناپیداست

تقدیم به مادر فداکارم

که آغاز نگاهش شروع زندگی ام بود و تبسم لبانش شروعی دیگر

مقدس است و پاک و زلال

مادر از تو آموختم صبوری و خوب زیستن را

تقدیر و تشکر

شکر و سپاس فراوان، خداوند را که یگانگی، صفت او، و جلال و عظمت و مجد و بها، خاصیت اوست و از کمال وی هیچ آفریده آگاه نیست و جز وی هیچ کس را به حقیقت معرفت وی راه نیست.

بر خود لازم می دانم از استاد فرزانه جناب آقای دکتر رضا میرزایی که در سرتاسر این پایان نامه با صبوری و نبوغ خود مرا یاری دادند، کمال تشکر را داشته باشم. همچنین از استاد ارجمند جناب آقای دکتر عزیز الله عزیزی که مشاوره ی این پایان نامه را قبول فرمودند و از جناب آقای دکتر شفاف که این پایان نامه را بدقت مطالعه نموده و در اصلاحات نهایی، اینجانب را راهنمایی فرمودند نیز کمال تشکر را دارم.

چکیده

در این پایان نامه گروه بنیادی مثلث سرپینسکی را توصیف می کنیم. نشان می دهیم این گروه با زیرگروهی از $\varprojlim G_n$ یکریخت است، که در آن G_n گروه بنیادی تقریبهای طبیعی مثلث سرپینسکی است.

فهرست مطالب

مقدمه :

در این پایان نامه گروه بنیادی مثلث سرپینسکی را توصیف می کنیم (شکل ۱ را ببینید). ثابت می شود که این گروه را می توان به عنوان زیر مجموعه ای از حد معکوس گروه های بنیادی تقریبهای طبیعی Δ در نظر گرفت.

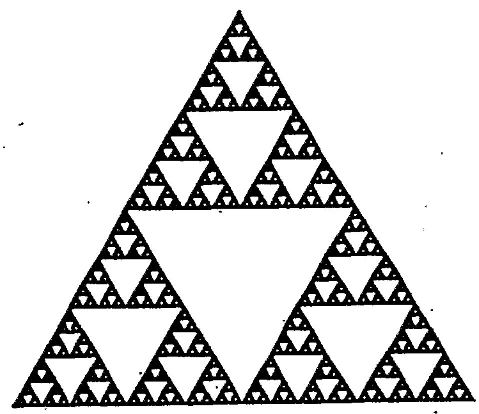

FIGURE 1. The Sierpiński-gasket

یکی از راه های تعریف مثلث سرپینسکی استفاده از سیستم تابع بازگشتی است. برای $x \in \mathbb{R}^{۲}$ فرض کنید $f_{۱}(x) = \frac{x}{۲}$ و $f_{۲}(x) = \frac{x}{۲} + \frac{۱}{۲}$ و $f_{۳}(x) = \frac{x}{۲} + \frac{۱+\sqrt{-۳}}{۲}$ آنگاه یک زیر مجموعه ی ناتهی فشرده و یکتای Δ از $\mathbb{R}^{۲}$ وجود دارد، طوریکه در معادله زیر صدق می کند :

$$\Delta = \cup_{i=۱}^{۳} f_j(\Delta).$$

از آنجا که $f_{۱}$ و $f_{۲}$ و $f_{۳}$ نگاشتهای تشابه هستند لذا Δ خود متشابه است. خواص توپولوژیکی مجموعه های خود متشابه در مقیاس وسیعی مورد مطالعه قرار گرفته اند([۱۵], [۱۴]). برای مثال ثابت می شود که یک مجموعه خود متشابه موضعا همبند است. برخی نتایج در مورد گروه بنیادی مجموعه های خود متشابه در [۱۸] بررسی شده اند.

مشکل اصلی در توصیف گروه بنیادی مثلث سرپینسکی در این حقیقت نهفته است که Δ موضعا همبند ساده نیست. این حالت باعث می شود که قضیه ون-کمپن و نظریه فضاهای پوششی برای محاسبه گروه بنیادی مثلث سرپینسکی بلا استفاده شوند.

فضاهایی که موضعا همبند ساده نیستند برای مدت طولانی مورد مطالعه قرار گرفته اند. مثال استانداردی از یک مجموعه موضعا همبند که موضعا همبند ساده نباشد، گوشواره ی هاوایی است. (شکل ۲ را ببینید) که بصورت زیر تعریف می شود :

$$H = \bigcup_{n\geq 1}\left\{z \in C : \ \left|z-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}\right\}.$$

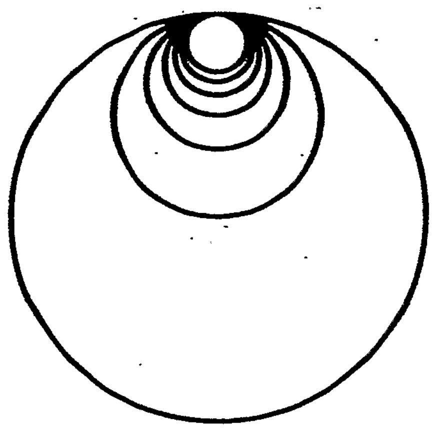

FIGURE 2. The Hawaiian Earring

این مجموعه در مبدا مختصات موضعا همبند است ولی موضعا همبند ساده نیست. خواص گروه بنیادی H در [۱۶] مورد مطالعه قرار گرفته است. در [۲۰] ثابت شده است که گروه بنیادی H زیر گروهی از حد معکوسی از حاصلضربهای آزاد و متناهی است. در [۸] اثبات ساده تری برای این مطلب ارائه شده است و همچنین نشان داده شده است که گروه بنیادی H ناشمارا و غیر آزاد است.

اخیرا در یک فعالیت پر حجم مشتمل بر سه مقاله ([۶]و[۵]و[۴]) گروه های بنیادی فضاهای یک بعدی مورد مطالعه قرار گرفته است. در این سه مقاله نشان داده شده است که احکام زیر در مورد فضای یک بعدی X هم ارز است : $\pi(X)$ آزاد است، $\pi(X)$ شمارا است، X دارای پوشش عمومی است، X موضعا همبند ساده است. در [۸] بعضی از نتایج [۶] به کلاسهای بزرگتری از زیر مجموعه های فضای اقلیدسی تعمیم داده شده است.

سرانجام متذکر می شویم گروه های همولوژی فضاهایی که موضعا همبند ساده نیستند، در ([۱۳]و[۱۲]) مورد مطالعه قرار گرفته اند.

فصل اول:

پیش‌نیازها

مقدمه : در این فصل ابتدا مفاهیمی را از گروه بنیادی فضای توپولوژیک X یاد آوری می کنیم. و در ادامه برخی مفاهیم دیگر را که در ادامه مورد نیاز است بیان می کنیم. برای اثبات قضیه ها به مرجع [21] مراجعه شود.

۱.۱ تعریف : فرض کنید $f, g : X \to Y$ نگاشتهایی پیوسته باشند. می گوییم f با g هموتوپ است هر گاه نگاشت پیوسته $F : X \times I \to Y$ موجود باشد، چنانکه برای هر $x \in X$ داشته باشیم

$$F(x,0) = f(x) \quad , \quad F(x,1) = g(x),$$

در این حالت می نویسیم $f \sim g$.

۱.۲ گزاره : هموتوپ بودن یک رابطه هم ارزی است.

۱.۳ تعریف : هر تابع پیوسته $f : [0,1] \to Y$ را یک مسیر در فضای Y می نامیم. نقطه $f(0)$ را ابتدا و نقطه $f(1)$ را انتهای مسیر f نامیم.

۱.۴ تعریف : فرض کنیم $f, g : [0,1] \to Y$ دو مسیر در فضای Y باشند چنانکه انتهای f بر ابتدای g منطبق است. مسیر $f * g$ **را به صورت زیر تعریف می کنیم**

$$\begin{cases} f * g : [0,1] \to Y, \\ (f * g)(s) = \begin{cases} f(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ g(2s-1) & 0 \leq s \leq 1 . \end{cases} \end{cases}$$

از آنجا که برای $s = \frac{1}{2}$ داریم $f(2s) = g(2s-1)$ پس $f * g$ پیوسته است. ابتدای آن بر ابتدای f و انتهای آن بر انتهای g منطبق است. اگر در تعریف ۱-۱ به جای X قرار دهیم $[0,1]$ مفهوم هموتوپی برای مسیرها

تعریف می گردد. بنابراین اگر f و g دو مسیر در فضای Y باشند می گوییم f با g هموتوپ است، هر گاه نگاشت پیوسته ی $F: [0,1] \times I \to Y$ موجود باشد چنانکه

$$F(s,0) = f(s) \quad , \quad F(s,1) = g(s).$$

۱.۵ تعریف : فرض کنید $f, g : [0,1] \to Y$ دو مسیر باشند که $f(0) = g(0) = x_0$ و $f(1) = g(1) = x_1$ گوییم f و g هم ارزند هرگاه $F: [0,1] \times I \to Y$ موجود باشد، چنانکه

۱ برای هر $s \in [0,1]$ ، $F(s,0) = f(s)$ ، $F(s,1) = g(s)$

۲ برای هر $t \in I$ ، $F(1,t) = x_1$ ، $F(0,t) = x_0$

در این حالت می نویسیم $f \approx g$.

۱.۶ گزاره : $\approx$ یک رابطه هم ارزی روی مجموعه ی مسیرهایی است که x_0 را به x_1 وصل می کنند.

۱.۷ گزاره : اگر $f_1 \approx f_2$ و $g_1 \approx g_2$ آنگاه $f_1 * g_1 \approx f_2 * g_2$.

۱.۸ لم : فرض کنیم f و g و h سه مسیر باشند بطوریکه انتهای مسیر f بر ابتدای مسیر g و انتهای g بر ابتدای h منطبق باشد آنگاه :

$$(f * g) * h \approx f * (g * h).$$

۱.۹ تعریف : اگر $f : [0,1] \to Y$ یک مسیر باشد $\bar{f}$ مسیری است که به صورت زیر تعریف می شود :

$s \in [0,1]$, $\bar{f}(s) = f(1-s)$ تصویر f و $\bar{f}$ یکی است ولی مسیر حرکت $\bar{f}$ بر عکس f است.

۱.۱۰ تعریف : مسیری که تصویر آن یک نقطه باشد، مسیر ثابت نام دارد. مسیر ثابت با تصویر در نقطه x_0 را با علامت E_{x_0} نمایش می دهیم.

۱.۱۱ گزاره : اگر f یک مسیر با ابتدای x_0 و انتهای x_1 باشد آنگاه :

۱ $f * \bar{f} \approx E_{x_0}$, $\bar{f} * f \approx E_{x_1}$

۲ $f * E_{x_1} \approx f$, $E_{x_0} * f \approx f$

فرض کنیم x_0 و x_1 دو نقطه از فضای توپولوژیک X هستند. همانطور که دیدیم $\approx$ یک رابطه ی هم ارزی روی مجموعه ی مسیرهایی است که x_0 را به x_1 وصل می کنند. در حالت خاص می توانیم x_0 را منطبق بر x_1 بگیریم در این حالت $\approx$ یک رابطه ی هم ارزی روی مجموعه ی مسیرهایی است که ابتدا و انتهای آن x_0 است.

فرض کنیم f مسیر بسته ای در x_0 باشد رده هم ارزی مسیر f را با $[f]$ نمایش می دهیم

$$[f] = \left\{ g : g \approx f \ ; \ \text{مسیر بسته ای در } x_0 \text{ است } g \right\}$$

گردایه همه ی رده های هم ارزی را با علامت $\pi_1(X, x_0)$ نمایش می دهیم.

$$\pi_1(X, x_0) = \left\{ [f] : \ \text{مسیر بسته ای در } x_0 \text{ است } f \right\}$$

۱.۱۲ گزاره : $\pi_1(X,x_0)$ همراه با عمل $*$ که به صورت $[f]*[g]=[f*g]$ تعریف می شود یک گروه است.

۱.۱۳ گزاره : فرض کنیم X همبند راهی و $x_0\ ,x_1\in X$ باشد. آنگاه $\pi_1(X,x_0)\cong\pi_1(X,x_1)$.

۱.۱۴ تعریف : X را همبند ساده گوییم هرگاه همبند راهی و نیز $\pi_1(X,x_0)$ تک عضوی باشد. همچنین X را موضعا همبند ساده گوییم هرگاه برای هر $x\in X$ و هر مجموعه ی باز U شامل x ، مجموعه ی باز V شامل x مشمول در U موجود باشد، به طوریکه $\pi_1(V,x_0)$ تک عضوی باشد.

۱.۱۵ تعریف : فرض کنیم $A\subseteq X$ .A را توکشیده دگردیسی X نامیم هرگاه نگاشت پیوسته $r:X\to A$ موجود باشد بطوریکه برای هر $a\in A$ داشته باشیم $r(a)=a$.

۱.۱۶ تعریف : نگاشت پیوسته $f:X\to Y$ را هم ارز هموتوپی خوانیم هرگاه نگاشت پیوسته $g:Y\to X$ موجود باشد بطوریکه $f\circ g\cong i_X$ و $g\circ f\cong i_Y$. در اینصورت گوییم X و Y دارای هوتوپی یکسان هستند.

۱.۱۷ قضیه : اگر A توکشیده دگردیسی X باشد آنگاه A و X دارای هموتوپی یکسان هستند.

۱.۱۸ قضیه : فرض کنیم $\varphi:X\to Y$ هم ارزی هموتوپی باشد و $x\in X$ نقطه دلخواهی باشد. آنگاه نگاشت $\varphi_*:\pi_1(X,x)\to\pi_1(Y,f(x))$ که بصورت $\varphi_*([f])=[\varphi\circ f]$ تعریف می شود یک یکریختی است.

۱.۱۹ نتیجه : فرض کنیم A توکشیده دگردیسی X باشد و $a\in A$ آنگاه $\pi_1(X,a)\cong\pi_1(A,a)$.

۱.۲۰ تعریف : مجموعه ی مرتب $\{p_0, p_1, \dots, p_m\}$ در $\mathbb{R}^n$ را بطور آفین مستقل خطی نامیم هرگاه مجموعه بردارهای $\{p_1 - p_0, p_2 - p_0, \dots, p_m - p_0\}$ مستقل خطی باشند. در این حالت مجموعه ی زیر را یک

$m-$ سادک با راسهای $\{p_0, p_1, \dots, p_m\}$ می نامیم :

$$[p_0, p_1, \dots, p_m] = \{t_0 p_0 + t_1 p_1 + \cdots + t_m p_m : \quad t_0 + t_1 + \cdots t_m = 1 \ , t_i \geq 0 \ \}$$

همچنین $Vert(s) = \{p_0, p_1, \dots, p_m\}$ را مجموعه ی رئوس s می نامیم.

۱.۲۱ تعریف : اگر $s = [p_0, p_1, \dots, p_m]$ یک $m-$ سادک باشد تعریف می کنیم $dim\, s = m$ و آنرا بعد s می نامیم.

۱.۲۲ تعریف : فرض کنیم s یک سادک باشد. سادک s' را وجه s نامیم هرگاه $Vert(s') \subseteq Vert(s)$ و می نویسیم $s' \leq s$.

۱.۲۳ تعریف : گردایه متناهی K از سادکهای فضای اقلیدسی را مجتمع سادکی می نامیم هرگاه :

۱) اگر $s \in K$ آنگاه هر وجه آن نیز مشمول در K باشد.

۲) اگر $s, t \in K$ آنگاه $s \cap t$ یا تهی و یا وجه مشترکی از s و t باشد.

در این حالت $Vert(K)$ را مجموعه ی تمام ۰- سادک ها مینامیم.

۱.۲۴ تعریف : فرض کنیم V یک مجموعه ی متناهی باشد. گردایه ی K از زیر مجموعه های V را یک مجتمع سادکی محض گوییم هرگاه :

۱) اگر $v \in V$ باشد آنگاه $\{v\} \in K$.

۲) اگر $s \in K$ و $s' \subseteq s$ باشد، آنگاه $s' \in K$.

در این صورت $s \in K$ را سادک و اعضای s را راس می نامیم.

۱.۲۵ تعریف : فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک، و $\mathcal{U}$ پوششی باز و متناهی از فضای X باشد. مجتمع سادکی را در نظر می گیریم که رئوس آن از اعضای $\mathcal{U}$ تشکیل شده باشند. این مجتمع سادکی محض را نرو پوشش $\mathcal{U}$ یا $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ گوییم هرگاه برای $U_0, U_1, \dots, U_m \in \mathcal{U}$ با شرط $\bigcap_{i=1}^{m} U_i \neq \emptyset$ مقطع $\bigcap_{i=1}^{m} U_i$ یک سادک $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ باشد.

۱.۲۶ تعریف : فرض کنیم K یک مجتمع سادکی باشد قرار می دهیم $|K| = \bigcup_{s \in K} s$ و آنرا بعنوان زیر فضایی از فضای اقلیدسی منتسب به K در نظر می گیریم.

۱.۲۷ تعریف : فرض کنیم K یک مجتمع سادکی باشد. قرار می دهیم $dim\, K = sup_{s \in K}\{dim\, s\}$ و آنرا بعد K نامیم.

۱.۲۸ تعریف : زوج مرتب $e = (p, q)$ را که p و q در مجتمع سادکی K هستند را یک یال در K می گوییم و p را ابتدای e و q را انتهای e می نامیم.

۱.۲۹ تعریف : یک مسیر یالی $\alpha = e_1 e_2 \dots e_n$ در K ، دنباله ای متناهی از یالهاست بطوریکه انتهای e_i بر ابتدای e_{i+1} منطبق باشد که ابتدای α را ابتدای e_1 می گیریم و با $o(\alpha)$ نمایش می دهیم همچنین انتهای α را انتهای e_n می گیریم و با $e(\alpha)$ نمایش می دهیم. همچنین α را یک مسیر یالی بسته خوانیم هرگاه $o(\alpha) = e(\alpha)$.

۱.۳۰ تعریف : فرض کنیم $\alpha = e_1 e_2 \dots e_n$ و $\alpha' = e'_1 e'_2 \dots e'_m$ که $e(\alpha) = o(\alpha')$. حاصلضرب آنها را اینگونه تعریف می کنیم : $\alpha\alpha' = e_1 e_2 \dots e_n e'_1 e'_2 \dots e'_m$ واضح است که این حاصلضرب خوشتعریف است.

۱.۳۱ تعریف : اگر $e = (p,q)$ یک یال باشد قرار می دهیم $e^{-1} = (q,p)$. همچنین اگر $\alpha = e_1 \dots e_n$ آنگاه قرار می دهیم $\alpha^{-1} = e_n \dots e_1$ و آنرا معکوس α می نامیم. همچنین $e = (p,p)$ را یال ثابت می خوانیم و با i_p نمایش می دهیم.

۱.۳۲ تعریف : دو مسیر یالی α و α' را هموتوپ گوییم هرگاه بتوان یکی را با تعداد متناهی حرکت مقدماتی بدست آورد که هر حرکت مقدماتی جایگزین کردن یکی از طرفین معادله زیر بجای دیگری است :

$$\alpha(p,q)(q,r)\gamma = \alpha(p,r)\gamma$$

که $\{p,q,r\}$ در سادکی از K قرار دارند و α و γ (در صورت وجود) مسیرهای یالی در K هستند. بسادگی ثابت می شود که این رابطه یک رابطه هم ارزی روی مجموعه تمام مسیرهای یالی K است.

۱.۳۳ تعریف : مجموعه تمام کلاسهای هم ارزی در K را با $\pi(K)$ نشان می دهیم. همچنین می توان عمل زیر را روی آن تعریف کرد : فرض کنیمْ $[\alpha]$ و $[\alpha']$ دو عنصر $\pi(K)$ باشند قرار می دهیم :

$$[\alpha][\alpha'] = [\alpha\alpha'].$$

۱.۳۴ قضیه : $\pi(K)$ همراه با عمل فوق سه خاصیت زیر را داراست :

۱) برای هر $[\alpha]$ با ابتدای p و انتهای q که $p,q \in Vert(K)$ داریم :

$$[i_p][\alpha] = [\alpha] = [\alpha i_q].$$

۲) عمل فوق شرکت پذیر است.

۳) $[\alpha][\alpha^{-1}] = [i_p]$ و $[\alpha^{-1}][\alpha] = [i_q]$.

فرض کنیم p نقطه ثابتی در $Vert(K)$ باشد قرار می دهیم :

$$\pi(K,p) = \{[\alpha] \in \pi(K) : \ o(\alpha) = p = e(\alpha)\}.$$

۱.۳۵ قضیه : $\pi(K,p)$ همراه با اتصال مسیرهای یالی یک گروه است.

۱.۳۶ تعریف : مجتمع سادکی K را همبند گوییم، هرگاه برای هر $p,q \in Vert(K)$ مسیر یالی α در K موجود باشد بطوریکه ابتدای آن p و انتهای آن q باشد.

۱.۳۷ تعریف : میسر یالی $\alpha = e_1 e_2 \dots e_n$ را تحویل یافته گوییم، هرگاه هیچ e_j برابر ثابت i_p نباشد و همچنین $e_j \neq e_{j+1}^{-1}$. α را یک دور نامیم هرگاه علاوه بر آن بسته نیز باشد.