سپاس

من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق

به نام خداوندی آغاز می‌کنم که سرآغاز همه آغازها اوست. آسان کننده هر دشواری، زیباکننده هر خواسته و سرچشمه هر خوبی است. با سپاس به درگاه ایزد لایزال و بی همتا که همواره نور امید را در دلم زنده نگه داشت و این قدرت را به من ارزانی داشت تا این مهم به انجام برسد.

حال که با فضل و عنایت او موفق به تنظیم و تدوین این رساله شدم، بر خود واجب می‌دانم از تمامی بزرگوارانی که در به فرجام رسانیدن آن از سرچشمه بذل و معرفتشان بهره برده ام، کمال تشکر و قدردانی را نمایم. با این که می‌دانم فراتر از توان بیان من است ولی امیدوارم مراتب امتنان و احترام مرا برساند.

در این جا وظیفه خود می‌دانم از استاد ارجمندم سرکار خانم دکتر لعل شاطری که با راهنمایی های خود راهگشای اینجانب بوده و با صبر و حوصله فراوان گره از مشکلاتم گشودند، کمال تشکر و قدردانی را نمایم. هم چنین از جناب آقای دکتر جانفدا که زحمت مشاوره این رساله را تقبل کردند، متشکرم و از اساتید ارجمند جناب آقای دکتر صادقی و سرکار خانم دکتر خانه گیر که داوری این رساله را بر عهده داشتند صمیمانه قدردانی می‌کنم.

اکنون که خداوند مرا به اتمام دوره ای دیگر از تحصیلاتم توفیق کرامت فرموده، شایسته است از پدر و مادر و خانواده ی عزیزم که در مراحل مختلف این رساله مرا یاری‌کردند، صمیمانه قدردانی کنم.

پیشگفتار

رابطه بین اشتقاق های موضعی و اشتقاق ها روی جبرها ابتدا توسط کادیسون[1] [۱۸]، لارسون [2] و سرور[3] [۲۰] مورد بررسی قرار گرفت.

کادیسون نشان داد که اشتقاق های موضعی نرم-پیوسته، از جبر فون نویمان به هر مدول دوگان یک اشتقاق است.

در مرجع [۱۷] جانسون[4] نتیجه کادیسون را توسعه داده ثابت می‌کند هر اشتقاق موضعی از یک C^*-جبر $\mathcal{A}$ به هر $\mathcal{A}$-مدول باناخ یک اشتقاق است او هم چنین نشان می‌دهد هر اشتقاق موضعی از یک C^*- جبر $\mathcal{A}$به هر $\mathcal{A}$-مدول باناخ کراندار است.

در [۲۰] لارسون و سرور اشتقاق ها و خودریختی های موضعی روی $B(X)$ برای فضای باناخ X را مطالعه کردند. آن ها نشان دادند که برای هر فضای باناخ X اشتقاق موضعی روی $B(X)$ یک اشتقاق است و اگر X نامتناهی البعد باشد هر خودریختی دو سویی از $B(X)$ یک خودریختی است.

در [۲] و [۳]، کریست[5] اشتقاق ها و خودریختی های موضعی روی یک جبر عملگری بررسی کرده است.

در [۱۲] هادوین[6] و لی[7] برای هر فضای هیلبرت مختلط جدایی پذیر H اشتقاق های موضعی روی جبرهای انعکاسی که شامل جبرهای شبکه زیر فضایی جابجایی و پخش پذیر، جبرهای شبکه $\mathcal{T}$-زیر فضایی و جبرهای یکدار بسته از $B(H)$ است، هم چنین خودریختی موضعی روی جبرهای شبکه زیر فضایی جابجایی و توزیع

[1] Kadison
[2] Larson
[3] Sourour
[4] Johnson
[5] Crist
[6] Hadwin
[7] Li

پذیر را مطالعه و بررسی کرده اند.

در این رساله به بررسی اشتقاق های موضعی و خودریختی های موضعی روی جبرهای موضعی روی جبرهای خاص می پردازیم در فصل اول به بیان تعاریف و مفاهیم مورد نیاز فصل های دیگر خواهیم پرداخت.

در فصل دوم اشتقاق ها و اشتقاق های موضعی بررسی و به رابطه بین آن ها پرداخته شده است. نشان می دهیم هر اشتقاق موضعی از یک جبر یکدار تولید شده توسط خودتوان ها به یک مدول یکدار آن یک اشتقاق است.

در فصل سوم به بررسی ضربگرهای قوی و اشتقاق های موضعی روی مدول های دلخواه خواهیم پرداخت و خودریختی های موضعی روی یک جبر عملگری و روی جبر ماتریسی $M_n(\mathcal{A})$ که $\mathcal{A}$ یك جبر یکدار است را ارائه می‌کنیم. نتایج این رساله از مقالات زیر برگرفته شده است.

D. Hadwin, J. Li, Local derivations and local automorphisms, J. Math. Anal. Appl. 290(2004), 702-714.

D. Hadwin, J. Li, Local derivations and local automorphisms on some algebras, J. Operator Theory, 60 (1) (2008), 29-44.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمات و پیش نیازها

در این فصل تعاریف و قضایای موردنیاز فصل های بعد را ارائه می‌دهیم. مفاهیمی مانند فضاهای باناخ، فضاهای هیلبرت، C^*-جبرها، جبرهای فون-نویمان و جبرهای تانسوری را تعریف می‌کنیم.

۱.۱ فضاهای باناخ

در این بخش فضاهای نرم دار و باناخ و قضایای مورد نیاز این رساله را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید X فضای برداری روی میدان $\mathbb{C}$ باشد، نگاشت $|| \,.\, || : X \to \mathbb{R}^+$ یک نرم [۱] روی X نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ در شرایط زیر صدق کند

۱) $x = 0$ اگر وتنها اگر $|| x || = 0$،

۲) $|| \alpha x || = | \alpha | || x ||$،

۳) $|| x + y || \leq || x || + || y ||$.

اگر شرط (۱) برقرار نباشد آن‌گاه نگاشت $|| \,.\, ||$ یک نیم نرم نامیده می‌شود. اگر $|| \,.\, ||$ یک نرم روی فضای برداری X باشد. آن‌گاه $(X, || \,.\, ||)$ را **فضای نرم دار** [۲] گویند.

اگر $(X, || \,.\, ||)$یک فضای نرم دار باشد آن‌گاه $d(x, y) := || x - y ||$ یک متریک روی X تعریف می‌کند.

[۱] Norm
[۲] Normed space

حال اگر این فضای متریک کامل[3] باشد یعنی هر دنباله ی کوشی[4] در آن همگرا باشد، در این صورت آن را یک **فضای باناخ** [5] گوییم.

مثال ۲.۱.۱. فضای $\mathbb{C}^k$ با نرم $\| X \| = (\sum_{i=1}^{k} | x_i |^2)^{\frac{1}{2}}$ به طوری که $X = (x_1, \ldots, x_k)$، یک فضای باناخ است. هم چنین $\mathbb{C}^k$ با نرم $\| X \| = max_{1 \leq i \leq k} | x_i |$ فضای باناخ است.

مثال ۳.۱.۱. اگر $L^1(\mu) = \{f : X \to \mathbb{C} : \quad \int_X | f | d\mu(x) < \infty\}$ به طوری که، μ یک اندازه مثبت و f تابع اندازه پذیر است در این صورت $(L^1(\mu), \| \, . \, \|)$ یک فضای باناخ است، قضیه ۳.۱۱ از [۲۵] را ببینید.

مثال ۴.۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه غیر تهی باشد آن‌گاه

$$\{f : X \to \mathbb{C} : \quad \| f \|_\infty = sup_{x \in X} | f(x) | < \infty, \quad f \text{کراندار است}\}$$

با اعمال نقطه وار یک فضای باناخ است.

تعریف ۵.۱.۱. نگاشت خطی[6] T از فضای نرم دار X به فضای نرم دار Y را کراندار گوییم هر گاه $M > 0$ به طوری موجود باشد که برای هر $x \in X$، $\| Tx \| \leq M \| x \|$.

مجموعه تمام نگاشت های خطی کراندار از X به Y را با نماد $B(X,Y)$ نمایش می‌دهیم و در صورتی که نرم زیر را برای نگاشت خطی $T \in B(X,Y)$ قرار دهیم

$$\| T \| = sup\{\| Tx \| : \quad \| x \| \leq 1\}$$

آن‌گاه $B(X,Y)$ با نرم فوق یک فضای نرم دار است. که به آن نرم عملگری گوییم. برای راحتی کار $B(X,X)$ را با نماد $B(X)$ نمایش می‌دهیم. هم چنین فضای $B(X,\mathbb{C})$ را فضای دوگان X (که مجموعه تمام تابعک های[7] خطی کراندار روی X است) می‌نامیم و آن را با نماد X' نمایش می‌دهیم و الحاق[8] هر $A \in B(X)$ را با A' نمایش می‌دهیم، که در آن $A' : X' \to X'$ برای هر $f \in X'$ با ضابطه $A'(f) = foA$ تعریف می‌شود.

[3] Complete
[4] Cauchy sequence
[5] Banach space
[6] Linear mapping
[7] Functionals
[8] Adjoint

تعریف ۶.۱.۱. نگاشت $T \in B(X,Y)$ را متناهی البعد گوییم اگر $T(X)$ بعد متناهی داشته باشد. در این صورت بعد $T(X)$ را رتبه یا بعد عملگر T گوییم و مجموعه تمام عملگرهای متناهی البعد روی X را با نماد $F(X)$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۷.۱.۱. *فرض کنید X, Y دو فضای نرم دار باشند فضای $B(X,Y)$ باناخ است اگر و فقط اگر Y یک فضای باناخ باشد.*

برهان. صفحه ۷۱ از [۴] را ببینید. □

گزاره ۸.۱.۱. *فرض کنید X فضای نرم دار متناهی البعد و Y یک فضای نرم دار دلخواه باشد اگر نگاشت $T : X \to Y$ یک نگاشت خطی باشد آن‌گاه T پیوسته است.*

برهان. صفحه ۷۲ گزاره ۳.۴ از [۴] را ببینید. □

قضیه ۹.۱.۱. *فرض کنیم T عملگر خطی از فضای نرم دار X به فضای نرم دار Y باشد در این صورت گزاره های زیر معادلند*

۱) *T کراندار است.*

۲) *T پیوسته است.*

۳) *T در یک نقطه از X پیوسته است.*

برهان. قضیه ۵.۴ از [۲۵] را ببینید. □

اگر X و Y دو فضای نرم دار باشند و T یک نگاشت خطی از X به Y باشد گراف T را به صورت،

$$Gr(T) = \{(x, Tx) : x \in X\}$$

تعریف می‌کنیم. اگر T پیوسته باشد در این صورت $Gr(T)$ با توپولوژی حاصلضربی بسته است اما عکس آن زمانی برقرار است که X, Y کامل باشند.

قضیه ۱۰.۱.۱. **(قضیه گراف بسته)** [۹] *فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند و $T : X \to Y$ یک نگاشت خطی باشد. اگر $Gr(T)$ بسته باشد آن‌گاه T کراندار است.*

برهان. قضیه ۵.۱۲ از [۱۰] را ببینید. □

گزاره ۱۱.۱.۱. *فرض کنید X, Y دو فضای باناخ باشند و T یک نگاشت خطی از X به Y باشد.*

۱) *T پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر دنباله $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ از X، $x_n \to x$ نتیجه دهد $Tx_n \to Tx$.*

۲) *T بسته است اگر و فقط اگر برای هر دنباله $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ از X، اگر $x_n \to x$ و $Tx_n \to y$ آن‌گاه داشته باشیم $Tx = y$.*

برهان. صفحه ۱۵۵، [۱۰] را ببینید. □

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنید X و Y دو فضای نرم دار باشد. عملگر خطی $T : X \to Y$ را یک عملگر فشرده [۱۰] گوییم اگر برای هر زیر مجموعه کراندار B از X، $T(B)$ فشرده نسبی باشد یعنی $\overline{T(B)}$ فشرده باشد. مجموعه تمام عملگرهای فشرده از X به Y را با نماد $K(X, Y)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۱.۱. فرض کنید F زیرفضایی از فضای نرم دار X باشد. $P \in B(X)$ را که $P(X) = F$ و برای هر $x \in F$، $P(x) = x$ یک عملگر **تصویر** [۱۱] روی F گوییم.

تعریف ۱۴.۱.۱. عملگر $P \in B(X)$ را **خودتوان** [۱۲] گوییم اگر $P^۲ = P$.

از تعریف های فوق واضح است که هر عملگر تصویر خودتوان است.

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنید X فضای نرم دار باشد. دو عنصر خودتوان P, Q از $B(X)$ را (به طور جبری) **متعامد** [۱۳] گوییم اگر $PQ = QP = ۰$.

[۹] Closed geraph theorem
[۱۰] Compact operator
[۱۱] Projection
[۱۲] Idempotent
[۱۳] Orthogonal

۲.۱ جبرهای باناخ

در این بخش جبرهای باناخ را تعریف و برخی خواص آن ها را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱. فضای برداری $\mathcal{A}$ روی میدان $\mathbb{C}$ را یک جبر[۱۴] نامیم، هرگاه نگاشتی مانند $(a,b) \mapsto ab$ از $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ به $\mathcal{A}$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر a,b,c در $\mathcal{A}$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

۱) $a(bc) = (ab)c$،

۲) $a(b+c) = ab + ac$،

۳) $(a+b)c = ac + bc$،

۴) $\alpha(ab) = (\alpha a)b$.

تعریف ۲.۲.۱. جبر $\mathcal{A}$ را **جابجایی** گوییم، هرگاه برای هر $a,b \in \mathcal{A}$، $ab = ba$.

تعریف ۳.۲.۱. جبر $\mathcal{A}$ را **یکدار**[۱۵] نامیم، هرگاه عنصری از $\mathcal{A}$ مانند I موجود باشد، به طوری که به ازای هر $a \in \mathcal{A}$، داشته باشیم $aI = Ia = a$. در این صورت I را **یکه** $\mathcal{A}$ نامیم.

ملاحظه ۴.۲.۱. *اگر $\mathcal{A}$ یک جبر غیر یکدار باشد، قرار دهیم $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$ آن‌گاه برای هر $a,b \in \mathcal{A}$ و $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ با ضرب،*

$$(a,\lambda)(b,\mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$$

$\mathcal{A}_1$ یک جبر یکدار با یکه $I = (0,1)$ است. در این صورت $\mathcal{A}$ ایده آلی از $\mathcal{A}_1$ است.

تعریف ۵.۲.۱. عنصر P از جبر $\mathcal{A}$ را **خودتوان** گوییم اگر $P^2 = P$.

اگر $\mathcal{A}$ یک جبر یکدار باشد برای هر عضو P از $\mathcal{A}$ عنصر $I - P$ را با نماد $P^\perp$ نمایش می‌دهیم. به راحتی می توان دید که P خودتوان است اگر و فقط اگر $P^\perp$ خودتوان باشد.

[۱۴] Algebra
[۱۵] Unital

تعریف ۶.۲.۱. هرگاه یک نرم مانند $\| . \|$ روی جبر $\mathcal{A}$ وجود داشته باشد به طوری که در نامساوی ضربی $(a, b \in \mathcal{A})$ $\| ab \| \leq \| a \| \| b \|$ صدق کند، آن‌گاه $\mathcal{A}$ را جبر نرم دار گوییم. اگر $\mathcal{A}$ جبر نرم دار و $(\mathcal{A}, \| . \|)$ فضای باناخ باشد، آن‌گاه $\mathcal{A}$ را **جبر باناخ**[۱۶] نامیم.

مثال ۷.۲.۱. اگر X یک مجموعه باشد و مجموعه تمام توابع مختلط مقدار کراندار روی X را با نماد $l^\infty(X)$ نشان دهیم آن‌گاه $l^\infty(X)$ یک جبر باناخ یکدار تحت اعمال جبری نقطه وار زیر است

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

نرم این فضا به صورت، $\| f \|_\infty = sup_{x \in X} \mid f(x) \mid$ است.

مثال ۸.۲.۱. $M_n(\mathbb{C})$ فضای شامل ماتریس های $n \times n$ با درایه های مختلط همراه با ضرب ماتریس ها یک جبر یکدار است. چون $M_n(\mathbb{C})$ با $B(\mathbb{C}^n)$ یکریخت است لذا $B(\mathbb{C}^n)$ جبر باناخ یکدار است. (صفحه ۳ از [۲۳] را ببینید.)

۳.۱ جبر ماتریس ها و خواص مقدماتی آن

در این بخش چند ویژگی در مورد ماتریس های $n \times n$ را بررسی می‌کنیم. ابتدا به معر فی چند نماد می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید $M_n(\mathbb{C})$ فضای همه ماتریس های $n \times n$ روی $\mathbb{C}$ است. λ را یک **مقدار ویژه**[۱۷] برای A گوییم اگر ماتریس $\lambda I - A$ که I ماتریس همانی است معکوس پذیر نباشد. مجموعه تمامی مقادیر ویژه A را با نماد $eigv(A)$ نمایش می‌دهیم.

دقت کنید که نماد $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ نشان دهنده ماتریسی است که درایه های قطر اصلی آن به ترتیب $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ و بقیه درایه های آن صفر باشند.

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باشد و $n \geq 2$. به ازای $1 \leq i, j \leq n$ فرض کنید $a_{ij} \in \mathcal{A}$. در این صورت $(a_{ij})_{n \times n}$ ماتریس

[۱۶] Banach algebra
[۱۷] Eigen value

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

را نمایش می دهد. مجموعه تمام ماتریس های فوق را با $M_n(\mathcal{A})$ نشان می‌دهیم. فرض کنید $(a_{ij}), (b_{ij})$ در $M_n(\mathcal{A})$ باشند جمع و ضرب عناصر در $M_n(\mathcal{A})$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})_{n\times n}$$

$$(a_{ij})(b_{ij}) = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj})_{n\times n}$$

به راحتی می توان نشان داد $M_n(\mathcal{A})$ با اعمال فوق و ضرب اسکالر یک جبر است.

گزاره ۳.۳.۱. *اگر $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$ جبر ماتریس های $n\times n$ با درایه های مختلط باشد برای هر ماتریس $A \in \mathcal{A}$، $tr(A)$ را جمع درایه های روی قطر اصلی تعریف می‌کنیم یعنی*

$$tr(A) = a_{11} + \ldots + a_{nn}.$$

از تعریف تابع tr به راحتی نتیجه می‌شود که برای هر $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ و $\alpha \in \mathbb{C}$،

۱) $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.

۲) $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$.

۳) $tr(A^t) = tr(A)$.

۴) $tr(AB) = tr(BA)$.

که A^t ترانهاده ماتریس A است.

لم ۴.۳.۱. *اگر A یک ماتریس مختلط $n\times n$ باشد و $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ مقادیر ویژه این ماتریس باشند که چند گانگی آن ها در نظر گرفته شده، آن‌گاه*

$$tr(A) = \sum \lambda_i.$$

برهان. فرض کنید $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ مقادیر ویژه A باشند آن‌گاه بنا به صفحه ۲۴۷ از [۱۵] ماتریس معکوس پذیر P به گونه ای موجود است که

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \cdots & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

اکنون با توجه به خاصیت (۴) داریم

$$tr(A) = tr(APP^{-1}) = tr(PAP^{-1}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

□

تعریف ۱.۳.۵. فرض کنید V یک فضایی برداری متناهی البعد باشد، یک **پایه مرتب** برای V دنباله ای متناهی از بردارهای مستقل خطی است که V را تولید می‌کند. اگر V فضایی برداری با بعد n بر روی $\mathbb{C}$ باشد و $\beta = \{\alpha_1 \ldots \alpha_n\}$ پایه مرتبی برای V باشد. به ازای هر α در V، n تایی یکتایی چون $(x_1, \ldots, x_n)$ از اسکالرها وجود دارد که

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i$$

در n تایی فوق، x_i، i مین مختص α نسبت به پایه مرتب $\beta = \{\alpha_1 \ldots \alpha_n\}$ گوییم. به علاوه n تایی $(x_1, \ldots, x_n)$ را با نماد $[\alpha]_\beta$ نمایش می‌دهیم.

می‌دانیم اگر V یک فضای برداری n بعدی بر روی میدان $\mathbb{C}$ باشد و W یک فضای برداری m بعدی بر روی میدان $\mathbb{C}$ باشد و نیز فرض کنید β پایه مرتبی برای V و β' پایه مرتبی برای W باشد آن‌گاه برای هر تبدیل خطی T از V به W، $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ طوری وجود دارد که به ازای هر بردار α از V،

$$[T\alpha]_{\beta'} = A[\alpha]_\beta$$

که $A[\alpha]_\beta$ و $[T\alpha]_{\beta'}$ به ترتیب مختصات α و $T(\alpha)$ در پایه مرتب β و β' هستند. به علاوه یک تناظر یک به یک بین مجموعه همه تبدیل های خطی از V در W و مجموعه همه ماتریس های $m \times n$ بر روی میدان $\mathbb{C}$ وجود دارد. در نتیجه اگر X یک فضای نرم دار با بعد n روی میدان اسکالر $\mathbb{C}$ باشد آن‌گاه یک تناظر یک به یک بین $B(X)$ و $M_n(\mathbb{C})$ وجود دارد.

۴.۱ جبرهای توپولوژیکی

در این بخش جبرهای توپولوژیکی را تعریف می‌کنیم و توپولوژی های مورد نیاز را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱.۴.۱. یک فضای برداری توپولوژیکی[۱۸] $(T.V.S)$ یک فضای برداری X همراه با یک توپولوژی است به طوری که نسبت به این توپولوژی،

۱) نگاشت $X \times X \to X$ تعریف شده توسط $(x,y) \mapsto x+y$ پیوسته باشد.

۲) نگاشت $\mathbb{C} \times X \to X$ تعریف شده توسط $(\alpha,x) \mapsto \alpha x$ پیوسته باشد.

تعریف ۲.۴.۱. فرض کنید X و Y فضاهای برداری توپولوژیکی هاسدورف و $\mathcal{B}(X,Y)$ نگاشت های خطی پیوسته از X به Y باشد، گوییم $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(X,Y)$ **انعکاسی**[۱۹] است هرگاه $\mathcal{S}$ شامل عناصری مانند T متعلق به $\mathcal{B}(X,Y)$ باشد که به ازای هر $x \in X$، $T(x) \in [\mathcal{S}(x)]$. به طوری که $[.]$ نشان دهنده بستار توپولوژیکی است.

تعریف ۳.۴.۱. فرض کنید X یک $T.V.S$ باشد در این صورت،

۱) $C \subseteq X$ محدب است هرگاه به ازای هر $x,y \in C$ و $\lambda \in [0,1]$، $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$.

۲) یک خانواده $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ از همسایگی های صفر پایه موضعی برای X است اگر به ازای هر همسایگی W از صفر، $\alpha \in I$ وجود داشته باشد به طوری که $V_\alpha \subseteq W$.

۳) Xموضعاً محدب نامیده می‌شود اگر یک پایه موضعی با عناصر محدب داشته باشد.

ملاحظه ۴.۴.۱. *مجموعه جهت دار، یک مجموعه جزئی مرتب مانند $(I,\leq)$ است به طوری که به ازای هر $x,y \in I$، $z \in I$ موجود باشد که $x \leq z$ و $y \leq z$.*

تعریف ۵.۴.۱. یک تور در یک مجموعه X نگاشت تعریف شده توسط $\alpha \mapsto x_\alpha$ از مجموعه جهت دار[۲۰] I به X است، معمولاً چنین نگاشتی را با $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ نشان می‌دهیم.

[۱۸] Topological vector space
[۱۹] Reflexive
[۲۰] Directed set

تعریف ۶.۴.۱. فرض کنید X یک فضای نرم دار و X' همه تابعک های خطی پیوسته از X به $\mathbb{C}$ باشد برای هر $f \in X'$ تعریف می‌کنیم $P_f(x) =| f(x) |$. در این صورت P_f یک نیم نرم است، خانواده $\mathcal{P} = \{P_f : f \in X'\}$ فضای X را به یک فضای موضعاً محدب تبدیل می‌کند. توپولوژی تولید شده توسط این خانواده روی X را توپولوژی ضعیف[۲۱] گوییم. همگرایی نسبت به این توپولوژی همگرایی ضعیف نامیده می‌شود بنابراین اگر (x_α) یک تور در X باشد

$$x_\alpha \to x \Leftrightarrow \forall f \in X'; \quad f(x_\alpha) \to f(x).$$

تعریف ۷.۴.۱. فرض کنید X یک فضای نرم دار باشد برای هر $x \in X$، $P_x(f) =| f(x) |$ تعریف می‌کنیم که $f \in X'$. در این صورت P_x یک نیم نرم است، خانواده $\mathcal{P} = \{P_x : x \in X\}$ فضای X' را به یک فضای موضعاً محدب تبدیل می‌کند. توپولوژی تولید شده توسط این خانواده روی X' را توپولوژی ضعیف*[۲۲] گوییم. همگرایی نسبت به این توپولوژی همگرایی ضعیف* نامیده می‌شود که به طور نقطه ای همگرا است بنابراین

$$f_\alpha \to f \Leftrightarrow \forall x \in X; \quad f_\alpha(x) \to f(x).$$

تعریف ۸.۴.۱. یک **جبر توپولوژیکی**[۲۳] جبری مانند $\mathcal{A}$ است به طوری که

۱) $\mathcal{A}$ یک فضای برداری توپولوژیکی است.

۲) باتوپولوژی حاصلضربی $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ عمل ضرب روی $\mathcal{A}$ پیوسته است.

مثال ۹.۴.۱. جبر $C[0,1]$، که مجموعه تمام توابع حقیقی مقدار پیوسته روی بازه واحد بسته $[0,1]$ است یک جبر توپولوژیکی می‌باشد. به طور کلی هر جبر باناخ، یک جبر توپولوژیکی است.

تعریف ۱۰.۴.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر و J یک زیرفضای $\mathcal{A}$باشد.

۱) J یک **ایده آل چپ** $\mathcal{A}$ است در صورتی که به ازای هر $a \in \mathcal{A}$ و $x \in J$، $ax \in J$.

---
[۲۱] Weak topology
[۲۲] Weak* topology
[۲۳] Topological algebra

۲) J یک **ایده آل راست** $\mathcal{A}$ است در صورتی که به ازای هر $a \in \mathcal{A}$ و $x \in J$، $xa \in J$.

۳) J یک **ایده آل**[۲۴] از $\mathcal{A}$ است در صورتی که هم ایده آل چپ و هم ایده آل راست باشد.

مثال ۱.۴.۱۱. اگر Xیک فضای باناخ باشد آن‌گاه $F(X)$ یک ایده آل از $B(X)$ است.

برهان. [۶] صفحه ۲۳۰ را ببینید. □

۵.۱ مدول ها

در این بخش مدول و مدول دوگان روی یک جبر را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۵.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باشد. یک $\mathcal{A}$-مدول چپ، فضای برداری مانند $\mathcal{M}$ همراه با نگاشت $\mathcal{A} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ است به طوری که به ازای هر $a, b \in \mathcal{A}$ و $x, y \in \mathcal{M}$ سه شرط زیر برقرار باشد

۱) $a(x+y) = ax + ay$،

۲) $(a+b)x = ax + bx$،

۳) $a(bx) = (ab)x$.

$\mathcal{A}$-مدول راست نیز به طور مشابه و با جابجایی a, b به سمت راست عناصر $\mathcal{A}$ تعریف می‌شود. $\mathcal{M}$ را یک $\mathcal{A}$- مدول یا یک $\mathcal{A}$-دومدول[۲۵] گوییم اگر هم یک $\mathcal{A}$-مدول چپ و هم یک $\mathcal{A}$-مدول راست باشد و به علاوه به ازای هر $a, b \in \mathcal{A}$ و $x \in \mathcal{M}$، $(ax)b = a(xb)$.

مثال ۲.۵.۱. فرض کنید $\mathbb{C}$ یک میدان و $\mathcal{A} = \mathbb{C}[x]$ جبر تمام چند جمله ای هایی باشد که ضرایب آن ها از $\mathbb{C}$است آن‌گاه $\mathcal{A}$ یک $\mathbb{C}$-مدول است.

تعریف ۳.۵.۱. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر یکدار و $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{A}$-مدول باشد. گوییم $\mathcal{M}$، $\mathcal{A}$-مدول **یکدار** است هرگاه برای هر $x \in \mathcal{M}$، $xI = Ix = x$.

---
[۲۴] Ideal
[۲۵] $\mathcal{A}$-Bimodule

تعریف ۱.۵.۴. اگر $\mathcal{A}$ یک جبر غیر یکدار و $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{A}$-مدول باشد آن‌گاه با در نظر گرفتن $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$، $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{A}_1$-مدول یکدار با تعریف زیر است

$$x(a, \lambda) = xa + x\lambda \, ; \; (a, \lambda)x = ax + \lambda x \quad (x \in \mathcal{M}, a \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C}).$$

تعریف ۱.۵.۵. فرض کنید $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{A}$-مدول باشد. اگر $\mathcal{M}$یک فضای برداری توپولوژیکی و $\mathcal{A}$ یک جبر توپولوژیکی باشد به طوری که ضرب های مدولی مجزا پیوسته[۲۶] داشته باشد یعنی

۱) اگر $a_v \to a$ آن‌گاه به ازای هر $m \in \mathcal{M}$، $a_v m \to am$ و $ma_v \to ma$.

۲) اگر $m_t \to m$ آن‌گاه به ازای هر $a \in \mathcal{A}$، $am_t \to am$ و $m_t a \to ma$.

آن‌گاه $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{A}$**- مدول توپولوژیکی**[۲۷] نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۵.۶. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ مختلط باشد $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{A}$**- مدول باناخ** است اگر $\mathcal{M}$ یک فضای باناخ باشد که یک $\mathcal{A}$-مدول است و

$$\| ax \| \leq \| a \| \| x \| \, ; \; \| xa \| \leq \| x \| \| a \| \quad (x \in \mathcal{M}, a \in \mathcal{A}).$$

تعریف ۱.۵.۷. فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر و $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{A}$-مدول باشد. $\mathcal{M}$ مدول دوگان[۲۸] نامیده می‌شود اگر $\mathcal{M}$ یک فضای دوگان باشد.

تعریف ۱.۵.۸. فرض کنید $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{A}$-مدول و $\mathcal{J}$ یک ایده آل $\mathcal{A}$باشد. $\mathcal{J}$ یک **مجموعه تفکیک کننده**[۲۹] $\mathcal{M}$ نامیده می‌شود اگر

۱) به ازای هر $m \in \mathcal{M}$، از این که $m\mathcal{J} = 0$ نتیجه بگیریم $m = 0$.

۲) به ازای هر $n \in \mathcal{M}$، از این که $\mathcal{J}n = 0$ نتیجه بگیریم $n = 0$.

[۲۶] Separately continuous
[۲۷] Topological $\mathcal{A}$-module
[۲۸] Dual module
[۲۹] Separating set

۶.۱ فضاهای هیلبرت

در این بخش فضاهای هیلبرت را معرفی و عملگرهای روی آن را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱.۶.۱. فرض کنید H یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط باشد. یک ضرب داخلی[۳۰] روی H یک نگاشت $\langle .,. \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$ است به طوری که برای هر $x,y,z \in H$ و $\alpha \in \mathbb{C}$،

۱) $\langle x,x \rangle \geq 0$،

۲) $\langle x,x \rangle = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$،

۳) $\langle \alpha x,y \rangle = \alpha \langle x,y \rangle$،

۴) $\langle x,y+z \rangle = \langle y,x \rangle + \langle x,z \rangle$،

۵) $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$، که $\overline{\langle y,x \rangle}$ مزدوج $\langle x,y \rangle$ است.

اگر $\langle .,. \rangle$ یک ضرب داخلی روی H باشد، دو تایی $(H, \langle .,. \rangle)$ را یک **فضای ضرب داخلی**[۳۱] گوییم. تعریف می‌کنیم $\| x \| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$. به راحتی می توان دید که $(H, \| . \|)$ یک فضای نرم دار است. به فضای ضرب داخلی $(H, \langle .,. \rangle)$ یک فضای هیلبرت[۳۲] گوییم اگر H با نرم فوق یک فضای باناخ باشد.

تعریف ۲.۶.۱. فرض کنید H یک فضای ضرب داخلی باشد و $x,y \in H$، اگر $\langle x,y \rangle = 0$ گوییم x و y متعامدند و می‌نویسم $x \perp y$.

تعریف ۳.۶.۱. زیر مجموعه ϑ از یک فضای ضرب داخلی H را **متعامد یکه**[۳۳] گوییم اگر

۱) برای هر $e \in \vartheta$، $\| e \| = 1$.

۲) اگر $e_1, e_2 \in \vartheta$ و $e_1 \neq e_2$ آن‌گاه $e_1 \perp e_2$.

[۳۰] Inner product
[۳۱] Inner product space
[۳۲] Hilbert space
[۳۳] Orthonormal