بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده عمران

رساله کارشناسی ارشد

موضوع:

بهبود خوش وضعی ماتریس سختی سازه‌ها

استاد راهنما:

دکتر علی کاوه

دانشجو:

سیدصادق ناصر علوی

پاییز ۱۳۸۴

چکیده

در تحلیل سازه ها روش سختی به عنوان یک روش سیستماتیک و مناسب برای برنامه نویسی کامپیوتری معرفی می شود. این ویژگی بعلت تشکیل ماتریس سختی منحصر بفرد بر اساس تعادل گره‌های سازه می باشد. لیکن زمانیکه بدلیل ساختارهای بخصوصی ماتریس سختی بصورت بد- وضع درمی‌آید، خطاهای محاسبات افزایش می یابد. این حالت در سازه‌هائی که مهندس طراح مجبور به استفاده از اعضاء با سختی-های متفاوت می شود، پیش می‌آید. استفاده از اعضای قوی سبب ایجاد درآیه های بزرگ غیر قطری در ماتریس سختی می شود، که نتیجه آن ایجاد خطاهای محاسباتی است در محاسبات عددی بد- وضعی یک ماتریس را با جابجایی سطرها یا جایگزین کردن چند سطر بهینه می کند در این رساله سعی بر این است که تغییرات فوق قبل از تشکیل ماتریس سختی تشخیص داده شده و اعمال گردد برای این منظور از خصوصیات توپولوژیکی و جبری سازه در تحلیل به طور موثر استفاده به عمل می آید. این امر با معرفی پایه برشی با خواص ویژه صورت می پذیرد و منجر به تشکیل ماتریس سختی با شرایط موزونی بهینه می گردد و در نتیجه خطاهای محاسباتی به مقدار قابل توجهی کاهش می یابد.

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

با تشکر از زحمات استاد عزیزم پروفسور کاوه

فهرست مطالب

فصل اول

مقدمه

با ظهور کامپیوتر و پی آمد آن ایجاد روشهای کامپیوتری تحلیل سازه ها همیشه این فکر به ذهن افراد خطور می کرد که چگونه می توان خطاهای محاسباتی را کم کرد یا از بین برد . در تحلیل یک سیستم بالاخص تحلیل سازه ها می توان مراحل تحلیل را بترتیب زیر تقسیم بندی کرد.

۱- تقریب زدن یک مدل برای سازه [1](یافتن مدل گراف تئوریکی).

۲- مطالعه خصوصیات توپولوژیکی (تحلیل توپولوژیکی[2])

۳- تعیین متغیرهای جبری (تحلیل جبری[3]).

در تحلیل سازه ها به روشهای سختی موجود یک مدل برای سازه تقریب زده می شود، و سپس تحلیل جبری انجام می گیرد. در روشهای سنتی به مطالعه خصوصیات توپولوژیکی اهمیتی داده نمی شود. در این سمینار سعی بر این است که اهمیت این مرحله از تحلیل ، اثرات آن بر شرایط موزونی ماتریس سختی، و در نهایت اثرات آن را بر روی خطاهای موجود در بازتابهای محاسبه شده، مشخص کنیم ، و راه حلی جهت کاهش این خطاها ارائه دهیم .

در فصل دوم، مقدمه ای بر تئوری گرافها مشتمل بر تعاریف و قضایای مورد نیاز در این رساله معرفی می شود. فصل سوم به معرفی اعداد شرایط موزونی اختصاص دارد.

---

1. approximation modeling
2. topological analysis
3. algebrac

در ابتدای فصل نمایش اعداد در کامپیوتر و نحوه تشکیل خطاها در عملیات حسابی ذکر شده، و سپس سه عدد شرایط موزونی PL (نسبت مقادیر ویژه حداکثر و حداقل)، rowsumcondو frobcond معرفی شده اند. این فصل با ارائه چند مثال پایان میابد. در فصل چهارم تئوری سیستم ها شرح داده خواهد شد.ودر فصل پنجم به الگوریتم هایی جهت یافتن پایه برشی بهینه می پردازیم.درفصل ششم با ارائه مثالهایی سعی در بررسی عملکرد الگوریتم ها داریم و در انتها نتایجی که از انجام این سمینار به دست آمده است را بیان می کنیم. لیست برنامه کامپیوتری بهمراه توضیحات مورد نیاز در پیوست الف آمده است، و مشروح نتایج مثالها در پیوست ب ارائه شده است.

فصل دوم

مقدمه ای بر تئوری گرافها[1]

۱-۲.مقدمه

بین سیستم های فیزیکی با ماهیت متفاوت ، یک نوع یگانگی وجود دارد که با تدوین تئوری سیستم های همسان به وجود آن پی برده اند. درک رابطه بین سیستم های سازه ای، الکتریکی و هیدرولیکی از اهمیت ویژه ای برخوردار است و در هیچ علمی این روابط به روشنی تئوری گرافها نمایان نیست .

بطور خلاصه تحلیل سیستم ها را می توان بصورت مطالعه دو نوع از خواص آنها در نظر گرفت:

۱- بررسی خواص توپولوژیکی[۲]: که به مدل ریاضی سیستم مربوط است.

۲- بررسی خواص متریک: که یک ساختمان جبری[۳] بوده و به مدل ریاضی سیستم منسوب می گردد. نمونه ای از این خواص عبارتند از اثرات خارجی نظیر بارگذاری در سازه ها، جریان الکتریسته در شبکه های الکتریکی و جریان مایع در شبکه های آب. ابعاد و خواص مصالح بکار رفته نمونه دیگری از خواص متریک سیستم ها هستند.

تفکیک خواص فوق و مطالعه جداگانه هر کدام دارای مزایای زیر می باشد:

الف- فهم اصول تحلیل سیستم ها و کاربرد آنها به مقدار متنابهی ساده می گردد.

ب- سرعت تحلیل سیستم ها خصوصا با استفاده از ماشینهای حسابگر به اندازه قابل ملاحظه ای افزایش می یابد.

---

1. graph theory
1. toplogical properties
2. algebraic structure

ج- استفاده سریع از نتایج پیشرفت ریاضیات مدرن بویژه تئوری گرافها، تحلیل موثر سیستم ها را ممکن می سازد.

تئوری گرافها اولین بار توسط اولر[۱] در سال ۱۷۳۶ میلادی مطرح شد. تا یک قرن بعد در این زمینه هیچ تحقیقاتی صورت نگرفت، در سال ۱۸۴۷ کیرشهف[۲] تئوری گرافها را برای تحلیل شبکه های الکتریکی مورد استفاده قرار داد.

کیلی[۳] و سیلوستر[۴] خاصیتی از گرافها را شرح داده اند که امروزه بعنوان درخت شناخته شده است . پوینکاره[۵] اصلی را تعریف کرد که امروزه بعنوان ماتریس تلاقی یک گراف نامیده می شود.

تا حدود نیم قرن بعد تحقیقات زیادی راجع به تئوری گرافها صورت نگرفت، و مطالعات جدی از سالهای ۱۹۲۰ آغاز شد که کونیگ[۶] یکی از پیشگامان این دوره است. وی تحقیقات ریاضیدانان قبل از خود و نظریات خودش را در این زمینه جمع آوری کرده و در سال ۱۹۳۶ منتشر نمود. بعد از جنگ جهانی دوم کتابهای بیشتری در مورد تئوری گرافها به چاپ رسید که می توان به کارهای محققین زیر اشاره نمود:

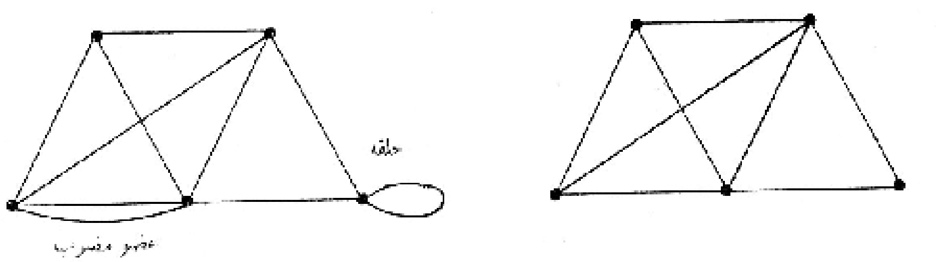
Ore, Behzad & Chartrand, tuttte, Berge, harary, Langefors, Kron, Henderson, Samuelsson, Wiberg, Trent, Lind, Spillers, Dimmagio, Fenves, Maunder, Kaveh, Oden, Neighbors, ...

1. euler
2. kirchhoff
3. cayley
4. sylvester
5. poincare
6. koing

۲-۲. تعریف گراف:

یک گراف شامل یک مجموعه N(S) از اجزائی موسوم به گره (نقطه ها یا راس ها) و یک مجموعه M(S) از اجزائی موسوم به اعضاء (پاره خط ها یا منحنی ها) است . که هر عضو با یک جفت گره که انتهای آن نامیده می شود مربوط است.

اگر دو یا چند عضو متصل به گره های یکسان باشند به آنها اعضاء مضرب[۱] می گوئیم. و یک عضوی که دو انتهای آن به یک گره متصل باشد حلقه[۲] نامیده می شود. گرافی که حلقه و اعضاء مضرب ندارد گراف ساده[۳] نامیده می شود. اگر N(S) , M(S) قابل شمارش باشند گراف مربوطه محدود[۴] نام می گیرد. گرافهای بکار رفته بعنوان مدل ریاضی سیستم در سازه ها گراف ساده محدود میباشند، (شکل ۱-۲).



(a) یک گراف غیر ساده

(b) یک گراف ساده

شکل ۱-۲ گرافهای ساده و غیر ساده

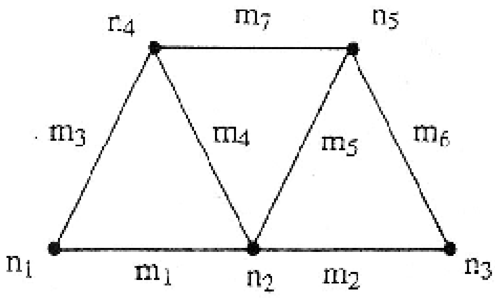
1. multiple member
2. loop
3. simple graph
4. finite

۱-۲-۲. همسایگی ، تلاقی و درجه (ظرفیت) گره

دو گره از یک گراف را همسایه می نامند، هرگاه این گره ها در دو انتهای یک عضو واقع شده باشند. یک عضو متلاقی با یک گره خواهد بود اگر آن گره، یکی از گره های انتهائی عضو باشد.

درجه (ظرفیت) گره n_i از یک گراف با $\deg n_i$ نمایش داده می شود، و تعداد اعضاء متلاقی با آن گره را نشان می دهد. براحتی می توان اثبات کرد که مجموع درجه گره های یک گراف دو برابر تعداد اعضاء آن است .

بعنوان مثال در شکل ۲-۲ دو گره n_5, n_4 همسایه اند. گره n_3 با اعضاء m_6, m_2 متلاقی است و درجه گره برابر ۴= $\deg n_2$ است .



شکل ۲-۲ یک گراف ساده S

۲-۲-۲. عملیات گرافی

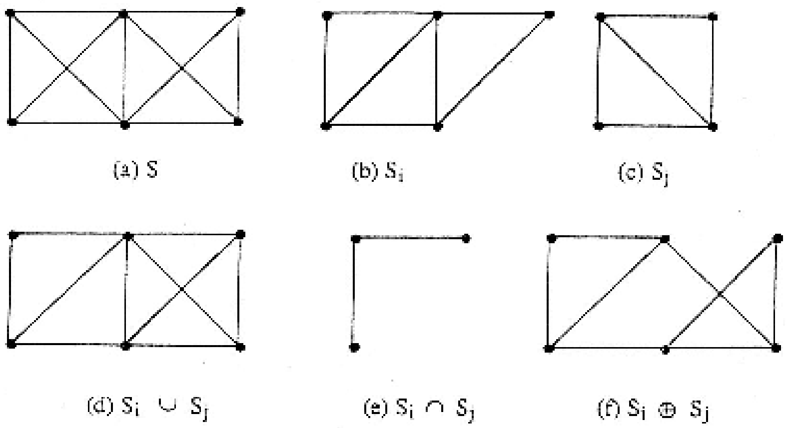
یک زیر گراف S_I از S خود گرافی است که $M(S) \subseteq M(S), N(S) \subseteq N(S)$ است و گره های انتهای هر عضو از S_I همان گره های انتهائی در گراف S می باشد.

اجتماع زیر گرافهای $S_K, ..., S_2, S_1$ از S با رابطه زیر مشخص می شود:

$$S_K = \bigcup_{i=1}^{k} S_i = S_1 \cup S_2 \dots \cup S_k$$

ویک زیر گراف از S با $N(S_K)=\overset{k}{\underset{i=1}{U}}M(S_i)$ گروه و $M(S_K)=\overset{k}{\underset{i=1}{U}}M(S_i)$ عضو می باشد.

اشتراک دو زیر گراف S_j,S_i بطور مشابه با اشتراک مجموعه گره ها و مجموعه اعضاء دو زیر گراف تعریف می شود. جمع حلقه ای[1] دو زیر گراف $S_i \oplus S_j$ زیر گرافی می باشد، که شامل گره ها و اعضائی از S_j,S_i و به استثناء مشترک S_j,S_i است. این تعاریف در شکل ۳-۲ شرح داده شده اند.



شکل ۳-۲ یک گراف و دو زیر گراف، اجتماع، اشتراک و جمع حلقه ای

۳-۲-۲. گام، مسیر با گره تکراری و مسیر

یک گام P_K از S یک رشته محدود $P_K=\{n_0,m_1,n_1,.....,m_p,n_p\}$ است، که جمله های آن متناوبا گره های n_i و اعضاء m_i از S برای $1 \le i \le p$ است، و n_i,n_{i-1} دو انتهای m_i می باشد. مسیر با عضو تکراری گامی است که هیچ عضوی از S بیش از یکبار در آن ظاهر نشود. طول مسیر P_i با $L(P_i)$ نشان داده می شود و برابر تعداد اعضاء آن است . P_i کوتاهترین مسیر بین دو گره n_p,n_i است، اگر برای هر مسیر P_j دیگری بین این گره ها $L(P_i) \le L(P_j)$

1. ring sum

باشد. فاصله بین دو گره از یک گراف تعداد اعضاء کوتاهترین مسیر بین این دو گره است.

بعنوان مثال در شکل ۴-۲ داریم:

$$W=(n_1,m_5,n_5,m_6,n_2,m_7,n_6,m_{11},n_5,m_6,n_2,m_2,n_3)$$

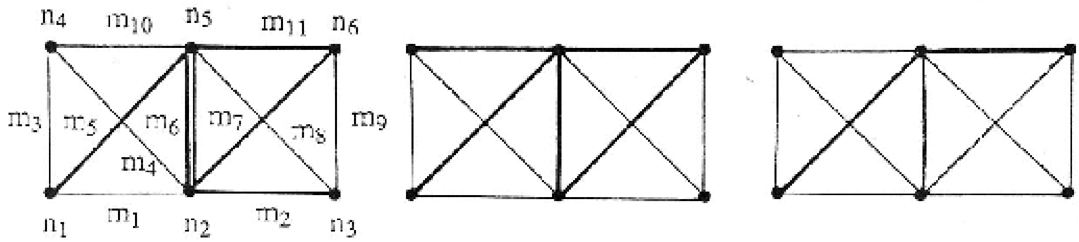
یک گام بین n_3,n_1 است، که عضو m_6 و گره های $n5,n_2$ دوبار تکرار شده اند.

$$t=(n_1,m_5,n_5,m_6,n_2,m_7,n_6,m_{11},n_5,m_{10},n_4)$$

یک مسیر با گره تکراری بین n_4,n_1 است، که گره n_5 دوبار تکرار شده است.

$$P=(n_1,m_5,n_5,m_{11},n_6)$$

کوتاهترین مسیر بین گره های n_1,n_6 است .



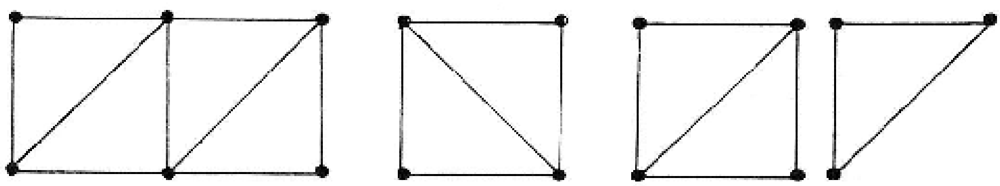
(a) گام W . (b) مسیر با گره تکراری 1 . (c) مسیر P .

شکل ۴-۲ یک گام، مسیر با گره تکراری و مسیر در S

۴-۲-۲. پیوستگی

به دو گره n_j,n_i متصل گفته می شود، اگر یک مسیری بین آنها موجود باشد. گراف S اگر همه جفت گره های آن به هم متصل باشد، گراف یکپارچه[1] و در غیر این صورت گراف چند پارچه[2] نامیده می شود. تعداد پارچه های گراف S حداکثر زیر گرافهای یکپارچه آن است شکل ۵-۲ تعاریف فوق را نشان می دهد.

1. connected graph
2 disconnected graph

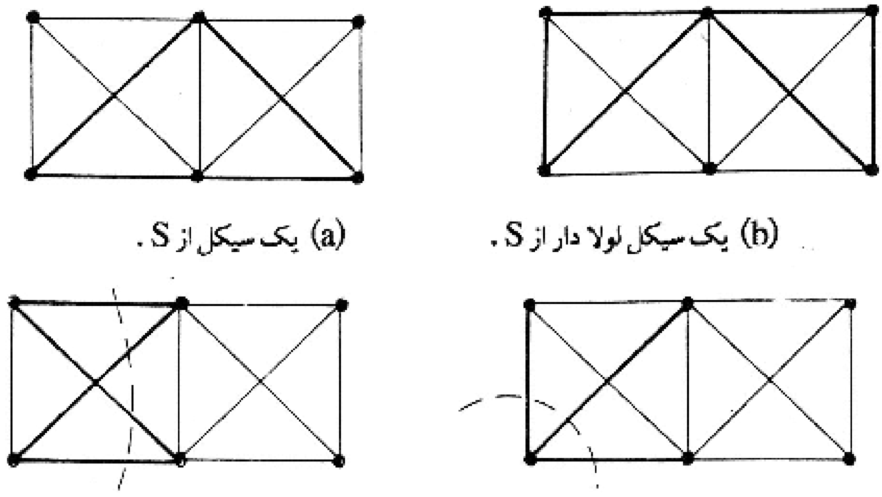


شکل ۵-۲ یک گراف یکپارچه و یک گراف چند پارچه با سه پارچه

۵-۲-۲. سیکل ها و مجموعه های برشی

یک سیکل مسیری است $(n_0,m_1,n_1,.....,m_p,n_p)$ که n_0,n_p، و $P \geq 1$ می باشد. یعنی سیکل یک مسیر بسته است. بطور مشابه یک سیکل با گره تکراری بسته (سیکل لولا دار) و یک گام بسته را می توان تعریف کرد.

یک مجموعه برشی مجموعه ای از اعضاء می باشد، که اگر از گراف برداشته شوند قسمت باقیمانده گراف به دو زیر گراف جدا از هم S_2,S_1 تبدیل می شود که با هر عضو از مجموعه برشی با هم مربوط می شوند. یک عضو رابطه عضوی است که دو انتهایش در S_2,S_1 قرار دارد. هر S_2,S_1 می تواند متصل باشند، و یا نباشند. اگر متصل باشند مجموعه برشی ابتدائی نام می گیرد . اگر S_1 یا S_2 فقط شامل یک گره باشد مجموعه برشی همراه سیکل نامیده می شود. این تعاریف در شکل ۶-۲ شرح داده شده اند.



(a) یک سیکل از S .

(b) یک سیکل لولا دار از S .

(c) یک مجموعه برشی از S .

(d) یک همراه سیکل از S .

شکل ۶-۲ یک گراف یکپارچه و یک گراف چند پارچه با سه پارچه

۶-۲-۲. درختها، درختهای گسترنده و کوتاهترین مسیر درختها

درخت[1] T از S یک زیر گراف متصل از S است که شامل سیکلی نباشد. یک مجموعه از درختان S یک جنگل را تشکیل می دهند. اگر یک درخت شامل تمامی گرههای S باشد، درخت گسترنده نامیده می شود . برای سادگی به آن بعنوان یک درخت اشاره می شود. درخت کوتاهترین مسیر (SRT) از یک گره مشخص n_0 ریشه می گیرد و یک درختی است که فاصله بین هر دو گره n_0, n_j کمینه است. این تعاریف در شکل ۷-۲ شرح داده شده است.

بسادگی اثبات می شود که:

$$M(T)=N(T)-1 \qquad (۲-۱)$$

که N(T),M(T) بترتیب اعضاء و گره های T می باشد.

1. tree

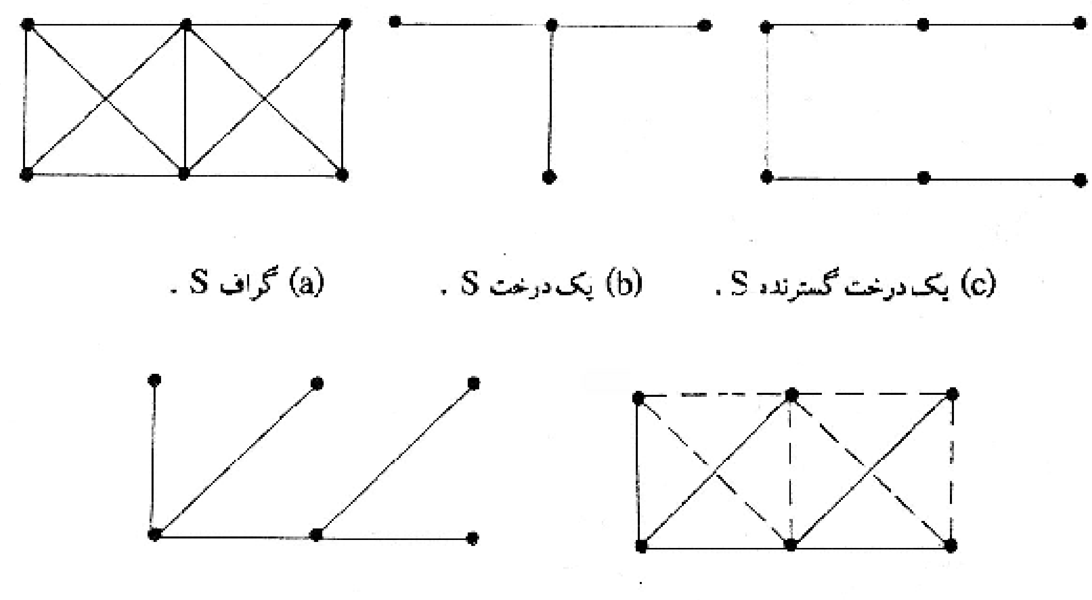
مکمل یک درخت، همراه درخت[1] نامیده می شود، و با T^* مشخص می شود. اعضاء T شاخه ها و اعضاء T^* وترها نامیده می شوند. برای هر گراف یکپارچه S تعداد وترها برابر است با:

$$M(T^*) = M(S) - M(T) \qquad (۲-۲)$$

از آنجائی که N(T)=N(S) است داریم:

$$M(T^*)\ M(S) - N(S) + 1 \qquad (۲-۳)$$

که M(S) و N(S) بترتیب تعداد اعضاء و گره های S است.



(a) گراف S .　(b) یک درخت S .　(c) یک درخت گسترنده S .

(d) یک SRT ریشه گرفته از n_0 .　(e) یک همراه درخت نشان داده شده با خط چین.

شکل ۷-۲ یک درخت و همراه درخت S

۳-۲. فضاهای برداری وابسته به گراف

دوفضای برداری به گراف S ارتباط داده می شود، این فضاها عبارتند از فضای سیکل و فضای مجموعه برشی. با این که فضاهای برداری را می توان روی یک میدان

1. cotree

دلخواه تشکیل داد، برای سادگی، میدان از مدول صحیح ۲ مورد بررسی قرار می گیرد، که در آن ۰=۱+۱، هر زیر مجموعه ای از M(S) عضو گراف S را می توان با یک بردار ξ نمایش داد که دارای M(S) جزء، عناصر میدان مدول صحیح ۲ می باشد.

جزء $\xi_i = 1$ وقتی که i امین عضو یک عنصر از زیر مجموعه باشد و در غیر این صورت $\xi_i = 0$ است. مجموع دو بردار زیر مجموعه η, ξ ، با یک بردار $\xi_i = \xi_i + \eta_i$ تعریف می شود، که تفاضل تقارن زیر مجموعه اصلی را نمایش می دهد. حاصل ضرب عددی η, ξ با $\Sigma\ \xi_i \eta_i$ تعریف می شود، که برابر ۰ یا ۱ است، مطابق اینکه تعداد اعضاء مشترک زیر مجموعه های اصلی زوج یا فرد باشد.

بعنوان مثال، $\xi_i = \{1,0,1,1,0,0,0\}$ و $\eta_i = \{0,0,0,1,1,0,1\}$ که دو سیکل از گراف S (شکل ۲-۲) می باشند، مجموع آنها برابر است با $\xi_i = \{1,0,1,0,1,0,1\}^t$ که آن نیز یک سیکل است.

حاصل ضرب عددی $\Sigma\ \xi_i \eta_i =$ ۱، از آنجائیکه این زیر مجموعه ها یک عضو مشترک دارند. بدلیل اینکه در رساله فوق از مجموعه برشی جهت تشکیل ماتریس سختی و حل سازه استفاده می شود، صرفا فضای مربوطه شرح داده می شود.

۱-۳-۲. فضای مجموعه برشی

حال یک بردار مجموعه برشی را بررسی می کنیم . مجموعه تهی نیز بعنوان یک عضو در نظر گرفته می شود. می توان نشان داد که جمع دو بردار مجموعه برشی از یک گراف نیز یک بردار مجموعه برشی است. بنابراین بردارهای مجموعه برشی یک فضای برداری می باشد، که بعد آن برابر است با:

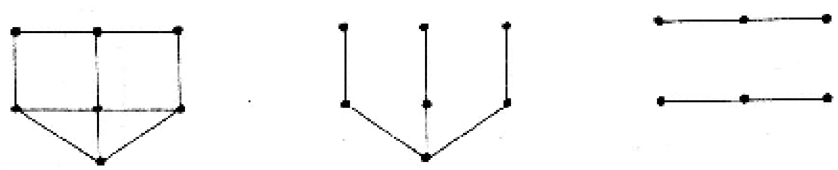
$$\text{rank}(S) = \rho(S) = N(S) - b_0(S) \qquad (۲-۴)$$

برای مثال رتبه[1] S ، rank(S) در شکل (a) ۷-۲ برابر ۵=۱-۶ = ρ (S) است.

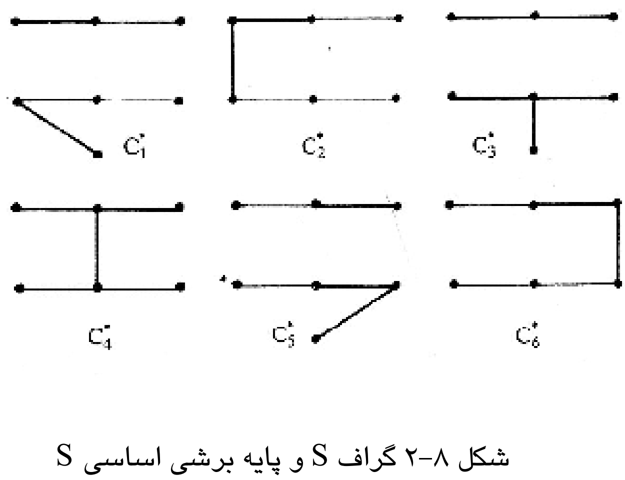
۲-۳-۲. پایه های برشی اساسی

برای فضای مجموعه برشی می توان یک پایه تشکیل داد. به درخت T و همراه درخت T^* توجه کنید. زیر گراف S که مرکب از همراه درختها می باشد، و هر عضو T (شاخه) یک مجموعه برشی که بعنوان مجموعه برشی اساسی شناخته می شود را تشکیل می دهد.

مجموعه ای از مجموعه های برشی که با اضافه کردن شاخه های T به T^* تهیه می شوند، با هم پایه ای را برای فضای مجموعه برشی S تشکیل می دهد، که بعنوان پایه برشی اساسی S شناخته می شود. گراف S و پایه برشی اساسی S در شکل ۸-۲ نمایش داده شده اند.



(a) گراف S .　　(b) درخت T از S .　　(c) همراه‌درخت T^* از T .



شکل ۸-۲ گراف S و پایه برشی اساسی S

---
1. rank

رتبه مجموعه برشی (رتبه S) تعداد مجموعه های برشی S می باشد، که برابر است با:

$$P(S)=N(S)-1 \qquad (۲-۵)$$

برای یک گراف با $b_0(S)$ پارچه داریم:

$$\rho(S)=N(S)-b_0(S) \qquad (۲-۶)$$

۲-۴. ماتریسهای وابسته به گراف

ماتریسها نقش حکم فرمائی را در تئوری گرافها و جزئیات کاربرد آنها برای تحلیل سازه ها بازی می کنند. بعضی از این ماتریسها براحتی خواص اتصالی یک گراف را شرح می دهند، و بعضی اطلاعات مفیدی درباره الگوی ماتریس های سازه فراهم می کنند، و بعضی اطلاعات اضافی درباره تبدیل معادلات تعادل و سازگاری آنها آشکار می کنند.

در این بخش ماتریسهای گوناگونی که خواص مربوط به گرافها را نمایش می دهند، مطالعه می شود. برای سادگی گرافها یکپارچه فرض می شوند، و تعمیم آن به گرافهای چند پارچه شامل جمع مستقیم ماتریسها برای پارچه های آنها است.

۲-۵. ماتریسهای نمایش گراف

یک گراف را می توان در شکلهای گوناگونی نمایش داد. بعضی از این نمایش ها از لحاظ تئوری مهم اند، و بعضی دیگر از نقطه نظر برنامه ریزی مفید می باشند. در این بخش ۶ نمایش متفاوت از یک گراف شرح داده می شود.