بسمه تعالی

جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عدد رمزی ابرگراف‌های کامل k-یکنواخت

سخنران: حسن پارسه

زمان: چهارشنبه ۹۲/۶/۲۰ ساعت ۸ صبح

مکان: سالن خوارزمی دانشکده علوم ریاضی

هیئت داوران

۱– دکتر غلامرضا امیدی

۲– دکتر رضا رضائیان

۳– دکتر بهناز عمومی

۴– دکتر غفار رئیسی

چکیده

ابرگراف کامل k-یکنواخت K_n^k متشکل از مجموعه‌ای n رأسی است که شامل تمامی k-تایی‌ها است. کوچکترین عدد صحیح مثبت N که در هر رنگ‌آمیزی دلخواه از k-تایی‌های مجموعه‌ی $[N]$، با رنگ‌های قرمز و آبی، بتوان کپی K_s^k قرمز یا K_n^k آبی در آن یافت، عدد رمزی $r_k(s,n)$ می‌نامیم. محاسبه‌ی اعداد رمزی از پیچیدگی بالایی برخوردار است، از همین رو روند بهبود کران‌های اعداد رمزی و نتایج حاصل از آن‌ها همواره مورد توجه بوده است. اردوش و هاجنال در لمی با عنوان بالا–پله‌ای نشان دادند که می‌توان از کران پایین اعداد رمزی ابرگراف‌های کامل k-یکنواخت، کران پایینی برای عدد رمزی ابرگراف‌های کامل $(k+1)$-یکنواخت به‌دست آورد. متاسفانه این روش تنها برای $k \geq 3$ کارآمد است. به همین دلیل کوچک کردن شکاف بزرگی که میان کران بالا و پایین اعداد رمزی ابرگرافها وجود دارد، با یافتن کران خوبی برای ابرگرف‌های ۳-یکنواخت آسان‌تر می‌شود. اردوش و رادو در سال ۱۹۵۲ با استفاده از یک الگوریتم حریصانه کران بالایی برای $r_3(s,n)$ به‌دست آوردند. روش مبتکرانه‌ی آن‌ها مورد توجه سوداکو و همکارانش واقع شد. سوداکو و همکارانش در سال ۲۰۰۹ این کران بالا را با ارائه‌ی دو راه حل بهبود بخشیدند. یکی از آن راه حل‌ها استفاده از بازی "بنّا و نقاش" بود، آن‌ها با استراتژی بردی که نشان دادند در این بازی وجود دارد، توانستند کران بالای بهتری برای عدد رمزی $r_3(s,n)$ ارائه دهند و چندی بعد در سال ۲۰۱۱ با روشی مشابه روش اردوش–رادو، یک کران بالا برای عدد رمزی ابرگراف کامل ۳-یکنواخت d-بخشی $K_d^3(n)$ ارائه دادند. با ارائه و اثبات این کران بالا به دو سوال باز از اردوش و هاجنال که در سال ۱۹۸۹ مطرح شده بود پاسخ داده شد.

واژه‌های کلیدی: ابرگراف، عدد رمزی

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

عدد رمزی ابرگراف‌های کامل k-یکنواخت

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

حسن پارسه

استاد راهنما

دکتر غلامرضا امیدی

شهریور ۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی آقای حسن پارسه
تحت عنوان

عدد رمزی ابرگراف‌های کامل k-یکنواخت

در تاریخ ۲۰ /۶ /۹۲ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تأیید نهایی قرار گرفت.

۱– استاد راهنما	دکتر غلامرضا امیدی
۲– استاد مشاور	دکتر رضا رضائیان
۳– استاد داور۱	دکتر بهناز عمومی
۴– استاد داور۲	دکتر غفار رئیسی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکترحمیدرضا ظهوری زنگنه

از دست و زبان که برآید   کز عهده‌ی شکرش به در آید

پس از حمد و سپاس خداوند متعال از مجال به دست آمده استفاده می‌کنم تا از آن‌هایی که تنها، وجودشان هزاران شکر را می‌طلبد، قدردانی کنم. امیدوارم حق تعالی این فرصت را به من بدهد تا بتوانم ذره‌ای از زحماتشان را جبران کنم. پدر و مادر عزیزم، خاک پایتان را سرمه‌ی چشم می‌کنم و دستان پر مهرتان را می‌بوسم.

از آقای دکتر امیدی استاد راهنمای با اخلاق و با انگیزه‌ام کمال تشکر را دارم و برای ایشان آرزوی موفقیت و شادترین روزها را دارم. همچنین از آقای دکتر رضائیان، استاد مشاورم، صمیمانه سپاسگزاری می‌کنم و یقین دارم بدون مساعدت این بزرگواران، این پایان نامه به سرانجام مطلوب نمی‌رسید.

از خانم دکتر عمومی که در طی این دو سال همواره از راهنمایی‌ها، مشورت‌ها و سخنان امیدبخششان بهره‌مند شدم نیز تشکر و قدردانی می‌کنم.

شهریور ۱۳۹۲

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

چکیده

ابرگراف کامل k-یکنواخت K_n^k متشکل از مجموعه‌ای n رأسی است که شامل تمامی k-تایی‌ها است. کوچکترین عدد صحیح مثبت N که در هر رنگ‌آمیزی دلخواه از k-تایی‌های مجموعه‌ی $[N]$، با رنگ‌های قرمز و آبی، بتوان کپی K_s^k قرمز یا K_n^k آبی در آن یافت، عدد رمزی $r_k(s,n)$ می‌نامیم. محاسبه‌ی اعداد رمزی از پیچیدگی بالایی برخوردار است، از همین رو روند بهبود کران‌های اعداد رمزی و نتایج حاصل از آن‌ها همواره مورد توجه بوده است. اردوش و هاجنال در لمی با عنوان بالا-پله‌ای نشان دادند که می‌توان از کران پایین اعداد رمزی ابرگراف‌های کامل k-یکنواخت، کران پایینی برای عدد رمزی ابرگراف‌های کامل $(k+۱)$-یکنواخت به‌دست آورد. متاسفانه این روش تنها برای $k \geq ۳$ کارآمد است. به همین دلیل کوچک کردن شکاف بزرگی که میان کران بالا و پایین اعداد رمزی ابرگرافها وجود دارد، با یافتن کران خوبی برای ابرگرف‌های ۳-یکنواخت آسان‌تر می‌شود. اردوش و رادو در سال ۱۹۵۲ با استفاده از یک الگوریتم حریصانه کران بالایی برای $r_۳(s,n)$ به‌دست آوردند. روش مبتکرانه‌ی آن‌ها مورد توجه سوداکو و همکارانش واقع شد. سوداکو و همکارانش در سال ۲۰۰۹ این کران بالا را با ارائه‌ی دو راه حل بهبود بخشیدند. یکی از آن راه حل‌ها استفاده از بازی ”بنّا و نقاش“ بود، آن‌ها با استراتژی بردی که نشان دادند در این بازی وجود دارد، توانستند کران بالای بهتری برای عدد رمزی $r_۳(s,n)$ ارائه دهند و چندی بعد در سال ۲۰۱۱ با روشی مشابه روش اردوش-رادو، یک کران بالا برای عدد رمزی ابرگراف کامل ۳-یکنواخت d-بخشی $K_d^۳(n)$ ارائه دادند. با ارائه و اثبات این کران بالا به دو سوال باز از اردوش و هاجنال که در سال ۱۹۸۹ مطرح شده بود پاسخ داده شد.

واژه‌های کلیدی: ابرگراف، عدد رمزی

فصل ۱

مقدمه

ابتکار و خلاقیت در حل مسائل و قضایای ترکیبیاتی از جمله مشخصه‌های این شاخه از ریاضیات است که آن‌را بسیار جذاب و زیبا معرفی کرده است. در این میان مسائل مربوط به اعداد رمزی گراف‌ها و ابرگراف‌ها با قدمتی نسبتاً طولانی یکی از شاخه‌های مهم در زمینه ترکیبیات به شمار می‌آید. مسائلی که در باب اعداد رمزی مطرح می‌شوند به‌دلیل جذابیت تئوری و کاربردی در بخش‌های دیگر ریاضیات از جمله نظریه اعداد، آنالیز، هندسه و منطق سهم عمده‌ای را در ترکیبیات از آن خود کرده است. همچنین وجود مسائل باز و حدس‌های بی‌پاسخ بسیاری در این حوزه، ریاضیدانان خلاق را برآن داشته است تا با ابتکار عمل و ایده‌های نو به حل این مسائل بپردازند.

۱.۱ مفاهیم اولیه

در این قسمت در حد ضرورت به تشریح برخی مفاهیم که در ادامه به آن‌ها نیاز پیدا خواهیم کرد، می‌پردازیم. نمادگذاری برخی تعاریف به‌خصوص اعداد رمزی شکل‌های مختلفی دارد. در این پایان‌نامه اغلب نمادگذاری‌ها و تعاریف از مراجع [۱۰،۱۷] اقتباس شده است.

ابرگراف $H = (V, E)$ متشکل از مجموعه‌ی ناتهی و متناهی از رأس‌ها به‌نام V است و E خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های V است که اعضای این خانواده را یال یا ابریال می‌نامیم. تعداد رأس‌های H را مرتبه و تعداد یال‌های آن‌را اندازه‌ی ابرگراف می‌نامیم و آن‌ها را به ترتیب با $|V|$ و $|E|$ نشان می‌دهیم. همچنین مجموعه رأس‌ها و مجموعه یال‌های ابرگراف H را به ترتیب با $V(H)$ و $E(H)$ نمایش می‌دهیم. درصورتی‌که تمام اعضای E هم‌اندازه و برابر k باشد، ابرگراف H را k-یکنواخت می‌نامیم. مجموعه‌ی تمام k-تایی‌های V رابا $[V]^k$ نشان می‌دهیم. فرض کنید $|V| = n$ آن‌گاه ابرگراف k-یکنواخت H را کامل گوییم هرگاه $E = [V]^k$ و آن را با K_n^k نشان می‌دهیم.

ابرگراف‌های ۲-یکنواخت همان گراف‌ها هستند. برای گراف دلخواه G، $V(G)$معرف مجموعه رأس‌ها و $E(G)$ معرف مجموعه یال‌ها می‌باشند. بنابراین می‌توان نوشت: $E(G) \subseteq [V]^{۲}$. گراف G با مجموعه رأس‌های $V(G)$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ را به اختصار با $G = (V, E)$ نمایش می‌دهیم. همچنین $e(G)$ تعداد یال‌ها و $v(G)$ تعداد رأس‌های گراف G است. دو رأس در گراف مفروض G را مجاور گوییم هرگاه آن دو رأس توسط یالی به هم وصل شده باشند. گراف را پوچ نامیم اگر هیچ یالی نداشته باشد. گرافی که فاقد رأس باشد را گراف تهی می‌نامیم. در یک گراف اگر رأسی با هیچ رأسی دیگر مجاور نباشد، آن رأس را تنها می‌نامیم. اگر دو سر یالی به یک رأس وصل شود آن یال را حلقه می‌نامیم و درصورتی که بیش از یک یال به دو رأس ثابت وصل شود آن یال‌ها را موازی گوییم. گرافی که فاقد یال موازی و حلقه باشد، ساده نامیده می‌شود. در این پایان‌نامه هرجا نامی از گراف آورده می‌شود منظور گراف ساده است. اگر $|V| = n$، آنگاه گراف $G = (V, [V]^{۲})$ را گراف کامل می‌نامیم و آنرا با نماد K_n نمایش می‌دهیم. مجموعه‌ی تمام گراف‌های n رأسی را با F^n نمایش می‌دهیم. گراف G را دوبخشی گوییم هرگاه بتوان رأس‌های آنرا به دو بخش مانند X و Y چنان افراز کرد که هریال G یک سر در X و یک سر در Y داشته باشد. گراف دو بخشی کامل بابخش‌های X و Y را که $|X| = n$ و $|Y| = m$، با $K_{n,m}$ نمایش می‌دهیم.

دو گراف $G = (V, E)$ و $G' = (V', E')$ را یکریخت گوییم و با $G \cong G'$ نشان می‌دهیم، هرگاه نگاشت یک‌به‌یک و پوشای $f : V \longrightarrow V'$ موجود باشد به‌طوری‌که مجاورت را حفظ کند. به این معنی که، $uv \in E$ اگر و تنها اگر $f(uv) \in E'$.

مکمل گراف $G = (V, E)$ را با $\overline{G} = (V, E)$ نمایش می‌دهیم و چنین تعریف می‌شود: $\overline{G} = (V, [V]^{۲} \backslash E)$. زیر مجموعه‌ی S از $V(G)$ را مستقل گوییم هرگاه هیچ دو عضوی در S، با همدیگر مجاور نباشند. اندازه‌ی بزرگترین مجموعه‌ی مستقل را عدد استقلال رأسی گوییم و با $\alpha(G)$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنید $A \subseteq V(G)$، گراف $G[A] = (A, [A]^{۲} \cap E)$ را زیرگراف القا شده توسط A گوییم، که در اینجا به اختصار با $G[A]$ نمایش می‌دهیم. در حالتی که H زیرگراف القایی G باشد چنین می‌نویسیم $G \subseteq H$. زمانی‌که زیرگراف القایی از گراف G کامل باشد آن را خوشه می‌نامیم. اندازه‌ی بزرگترین خوشه‌ی گراف G را با $\omega(G)$ نمایش می‌دهیم و آن را عدد خوشه‌ای می‌نامیم. زیرمجموعه‌ی A از V را همگن نامیم اگروتنها اگر $G[A]$ کامل یا مستقل باشد. گراف $G = (V, E)$ مفروض است. فرض کنید $X \subseteq V$، آنگاه زیرگراف القایی $G[V \setminus X]$ را با $G \setminus X$ نمایش می‌دهیم.

مسیر n رأسی را با P_n نشان می‌دهیم و گرافی است که بتوان رأس‌های آن‌را به‌صورت $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ مرتب کرد چنان‌که دو رأس در این گراف مجاورند، اگر و تنها اگر در این لیست متوالی باشند. مسیر با n رأس را مسیر به‌طول $(n-1)$ نیز می‌نامیم. دور n رأسی را با C_n نشان می‌دهیم و گرافی است که تعداد رأس‌ها و تعداد یال‌هایش مساوی هستند و رأس‌هایش را می‌توان روی یک دایره چنان چید که دو رأس در این گراف مجاور باشند اگروتنها اگر روی دایره به‌طور متوالی قرار بگیرند. دور با n رأس را دور به‌طول n نیز می‌نامیم. گراف G را همبند گوییم هرگاه بین هر دو رأس دلخواه G مسیری وجود داشته باشد.

همسایه‌های زیرمجموعه‌ی $A \subset V$ در گراف G عبارت است از رئوسی که با حداقل یکی از رئوس A مجاور باشند و آن را با $N_G(A)$ نمایش می‌دهیم و برای $x \in V$ می‌نویسیم $N_G(\{x\}) = N_G(x)$.

ابرگراف $H' = (V', E')$ را زیرابرگراف $H = (V, E)$ می‌نامیم و می‌نویسیم $H' \subseteq H$، هرگاه $V' \subseteq V$ و $E' \subseteq E$. زیرابرگراف $H' = (V', E')$ را زیرابرگراف القایی H گوییم هرگاه هریال H با نقاط واقع در V'، یک یال H' نیز باشد. اگر $S \subseteq V$، آنگاه زیرابرگراف القایی روی S را با $< S >$ نمایش می‌دهیم.

ابرگراف k-یکنواخت H با n رأس مفروض است. چگالی ابرگراف H را با D_H نمایش می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_H = \frac{\mid E(H) \mid}{\binom{n}{k}}.$$

k-رنگ‌آمیزی یالی گراف $G = (V, E)$ نگاشتی مانند $c : E(G) \longrightarrow S$ است، بطوری‌که S مجموعه‌ای از k رنگ باشد. یک رنگ‌آمیزی رأسی برای G نگاشتی مانند $f : V(G) \to C$ است که در آن C مجموعه‌ای متناهی از رنگ‌ها است. نگاشت f را یک رنگ‌آمیزی رأسی مجاز گوییم هرگاه برای هر یال $e = xy \in E(G)$ داشته باشیم $f(x) \neq f(y)$. به عبارت دیگر رئوس مجاور رنگ‌های متفاوت دریافت نمایند. اگر یک رنگ‌آمیزی مجاز از G با k رنگ وجود داشته باشد، G را k-رنگ‌پذیر می‌گوییم. همواره یک مسأله‌ی اساسی در این زمینه، یافتن کوچک‌ترین تعداد رنگ‌های مورد نیاز برای رنگ‌آمیزی مجاز یک گراف است.

برای ابرگراف‌های k-یکنواخت $H_1, H_2, ..., H_q$ مفروض، عدد رمزی $r_k(H_1, H_2, ..., H_q)$ کوچک‌ترین عدد طبیعی n است به‌طوری‌که در هر q-رنگ‌آمیزی یالی ابرگراف K_n^k، حداقل یک i، $1 \leq i \leq q$ ، بتوان

یافت چنان‌که ابرگراف القایی روی یال‌های با رنگ i-ام، شامل یک ابرگراف یک‌ریخت با H_i باشد. در حالت $k=2$، $r_2(H_1,H_2,...,H_q)$ با $r(H_1,H_2,...,H_q)$ نمایش داده می‌شود. فرض کنید $H_1,H_2,...,H_q$ ابرگراف‌های کامل k-یکنواخت به ترتیب از مرتبه‌ی $n_1,n_2,...,n_q$ باشند، در این صورت $r_k(H_1,H_2,...,H_q)$ را با $r_k(n_1,n_2,...,n_q)$، و در حالتی که $k=2$، $r(H_1,H_2,...,H_q)$ را با $r(n_1,n_2,...,n_q)$ نمایش می‌دهیم.

فرانک پلامپتون رمزی (۱۹۳۰-۱۹۰۳) با انتشار مقاله‌ای [۲۶] در سال ۱۹۳۰ وجود چنین عددی را اثبات کرد. فرانک رمزی با ارائه‌ی این مقاله به نوعی خود را پایه گذار این نظریه معرفی کرد. از همین رو نظریه‌ی رمزی به افتخار این ریاضی‌دان، به نام او نام‌گذاری شد. وی در مقاله خود نشان داد به ازای هر عدد صحیح و مثبت k و هر $n_1,n_2,...,n_q$ داده شده، عدد رمزی $r_k(n_1,n_2,...,n_q)$ موجود است.

برای ابرگراف k-یکنواخت H، $r_k(\overbrace{H,H,...,H}^{q\text{-بار}})$ را عدد رمزی q-رنگی قطری و یا به اختصار عدد رمزی q-رنگی H گوییم و با $r_k(H;q)$ نشان می‌دهیم. در حالتی‌که اگر $H=K_n^k$، آنگاه عدد رمزی q-رنگی H را با $r_k(n;q)$ نمایش می‌دهیم. $r_k(H,H)$ را با $r_k(H)$ و در حالتی که $k=2$، با $r(H)$ و زمانی‌که $H=K_n$، با $r(n)$ نمایش می‌دهیم.

۲.۱ تاریخچه

تا آنجایی که می‌دانیم اولین نتیجه‌ای که می‌توان آن‌را به نوعی نقطه‌ی آغاز نظریه‌ی رمزی دانست قضیه‌ای بود که دیوید هیلبرت در سال ۱۸۹۲ مطرح کرد. این قضیه به میزان بسیار اندکی مورد توجه قرار گرفت. هیلبرت از این قضیه صرفاً به‌عنوان ابزاری برای به ثمر رساندن پژوهش‌های خود با موضوع تقلیل ناپذیری توابع گویا با ضرایب صحیح استفاده نمود [۲۱].

در زیر به‌طور مختصر به بیان تاریخچه و روند شکل‌گیری نظریه‌ی رمزی می‌پردازیم.

۱.۲.۱ لم مکعبی ۱۸۹۲ دیوید هیلبرت

مجموعه‌ی $Q_n(a,x_1,x_2,...,x_n)$ از اعداد طبیعی را مکعب آفینی n-بعدی نامیم اگر $(n+1)$ عدد صحیح مثبت $a,x_1,x_2,...,x_n$ چنان وجود داشته باشد که

$$Q_n(a,x_1,x_2,...,x_n)=\{a+\sum_{i\in F}x_i : F\subseteq\{1,2,...,n\}\}.$$

لم مکعبی هیلبرت [۲۱]: به ازای هر جفت عدد طبیعی r و n، کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت $m=H(r,n)$ وجود دارد، به‌طوری‌که در هر r-رنگ‌آمیزی از $[m]$، یک مکعب آفینی n-بعدی تک‌رنگ وجود دارد .

ظاهراً هیچ‌کس (حتی خود هیلبرت) به این لم توجه چندانی نکرد. هیلبرت تحقیقات خود را در جهت لم مکعبی ادامه نداد و در این زمینه تا مدت‌ها بعد در مورد لم هیلبرت چیزی افزوده

شکل ۱.۱: دیوید هیلبرت

نشد. این لم به‌عنوان اولین مثال از نوع رمزی، نه به دلیل تاثیر آن که عملاً هم تاثیری نداشت، بلکه به‌دلیل سال مطرح شدن آن (سال ۱۸۹۲)، به شمار می‌آید.

۲.۲.۱ قضیه‌ی ۱۹۱۶ ایسای شور

دومین نتیجه از نوع رمزی را ایسای شور در سال ۱۹۱۶ به‌دست آورد که به‌عنوان یک قضیه در نظریه‌ی اعداد کمتر مورد توجه قرار گرفت. اما مطلبی که برای ما اهمیت دارد نتیجه‌ای است که او بین سال‌های ۱۹۱۳ تا ۱۹۱۶ هنگام کار کردن در دانشگاه بن آلمان به‌عنوان جانشین توپولوژیست مشهور فلیکس هاسدورف به‌دست آورد. در آنجا شور اولین مقاله‌ی خود را تحت عنوان ”درباره‌ی همسان سازی $x^m + y^m = z^m (mod\ p)$“ نوشت [۲۷]. وی در این مقاله اثبات دیگری را برای قضیه‌ای مرتبط با آخرین قضیه‌ی فرمات از دیکسون که در سال ۱۹۰۸ آن‌را بیان کرد، ارائه نمود [۱۱].

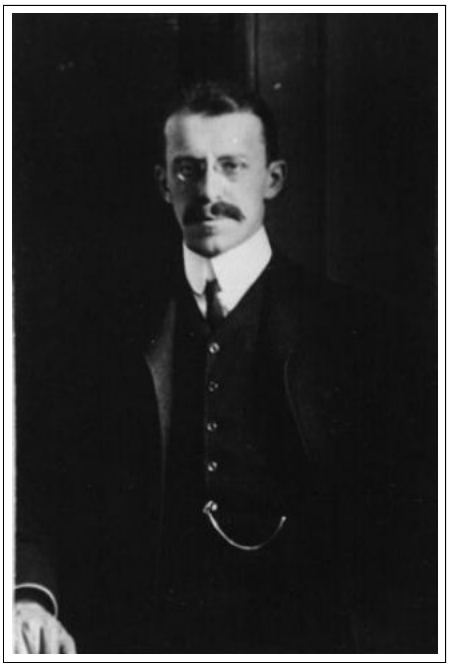
نماد ۱.۲.۱ برای عدد طبیعی n مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ..., n\}$ را با $[n]$ نمایش می‌دهیم. ▼

قضیه ۱۹۱۶ شور [۲۷]: برای هر عدد طبیعی n، عدد صحیح $S(n)$ وجود دارد به‌طوری‌که هر n–رنگ‌آمیزی از مجموعه‌ی $[S(n)]$، شامل اعداد صحیح a, b, c از یک رنگ مشابه است و همچنین $a + b = c$.

نتیجه‌ی قضیه‌ی شور را می‌توان با استفاده از روش‌های هوشمندانه در اثبات آن قوی‌تر نمود.

نسخه‌ی قوی قضیه شور [۲۷]: به ازای هر عدد طبیعی n عدد صحیح $S^*(n)$ وجود دارد به‌طوری‌که هر n–رنگ‌آمیزی از آرایه‌ی صحیح و مثبت اولیه‌ی $[S^*(n)]$ شامل اعداد صحیح و مجزای a, b, c از یک رنگ مشابه است به‌طوری‌که $a + b = c$.

پس از آن هیچ‌کس سؤالاتی از نوع سؤالاتی که ایسای شور در مقاله‌ی ۱۹۱۶ مطرح و حل نمود مطرح نکرد. در نتیجه پس از چاپ مقاله، نتیجه‌ی آن زیاد مورد تحسین واقع نشد. با این وجود اکنون قضیه‌ی شور به عنوان یکی از زیباترین قضایای کلاسیک ریاضی محسوب می‌شود. ریاضی‌دان مشهور لئون مرسکی که علاقه‌ی زیادی به این قضیه داشت، به مناسبت سال‌روز تولد شور نوشت: تا آنجا که می‌دانم پیش از این نتیجه‌ای مطرح نشده بود که حتی کم‌ترین شباهتی با قضیه‌ی شور داشته باشد و اگر بخواهیم در جمله‌ای و به بیان دیگر این قضیه‌ی را بیان کنیم باید گفت که



شکل ۱.۲: ایسای شور

"چنانچه یک سیستم به‌طور دلخواه به تعداد متناهی زیرسیستم افراز شود، آنگاه حداقل یک زیرسیستم دارای یک خاصیت ویژه است". مرسکی در ادامه می‌نویسد که شور پس از ارائه‌ی قضیه‌ی خود، هیچگاه دوباره به مسأله‌ی مطرح شده‌ی خود نپرداخت [۲۴].

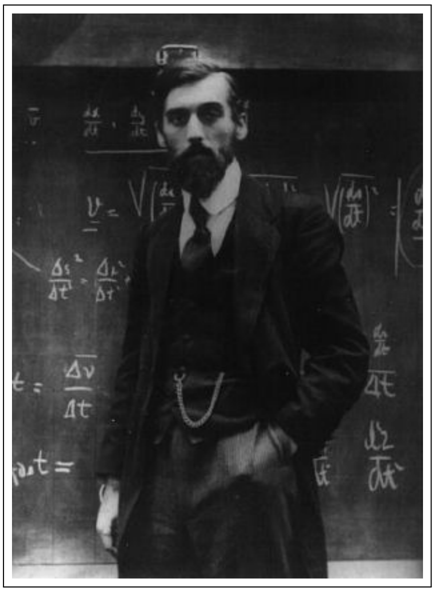
اظهارات مرسکی که ظاهراً توسط ریچارد رادو تأیید و مورد حمایت واقع شده است، در کتاب نظریه‌ی رمزی [۲۰] منعکس شده است. بنابراین این عبارت که "شور هیچگاه دوباره به این مسئله نپرداخت" به‌صورت جهانی مطرح شد. در واقع ریاضیات رمزی جدید که توسط شور در مقاله‌ی ۱۹۱۶ وی کشف شد، برای سال‌های متمادی مورد علاقه‌ی وی بود. با این وجود در آن زمان کسی علاقه‌ی چندانی به این قضیه نشان نداد!

۳.۲.۱ قضیه‌ی ۱۹۲۷ بودت-شور-ون در واردن

شور در حالی که تلاش می‌کرد حدس خود را در مورد باقیمانده درجه دوم و غیرباقیمانده‌ها اثبات کند، تشخیص داد که به لم دیگری نیاز دارد، "یک لم بسیار ساده، که بیشتر به ترکیبات مربوط می‌شود تا به نظریه‌ی اعداد". تحقیقات تاریخی الکساندر سوفیر که عدد اردوش[1] یک را دارد، نشان می‌دهد که بودت ریاضی‌دان جوان بیست و چندساله‌ی هلندی

[1] عدد اردوش "فاصله‌ی همکاری" بین یک شخص و اردوش است که با نگارش مقالات مشترک اندازه‌گیری می‌شود. عدد اردوش خود اردوش صفر است. عدد اردوش هرکس که با او مقاله‌ی مشترک دارد یک است. عدد اردوش کسی که با کسی که عدد اردوش او یک است مقاله مشترک دارد، دو است.

مستقل از شور حدسی مشابه حدس شور را بیان کرده است [۲۹]. دیگر جوان هلندی وندر واردن که ۲۳ سال داشت، اثبات حدس را منتشر کرد و در نتیجه یک قضیه‌ی کلاسیک را برای ما مطرح نمود که این قضیه ریشه‌ای برای درخت شگفت‌انگیز ریاضیات رمزی شد.



شکل ۳.۱: پیر جوزف هنری بودت

قضیه‌ی ۱۹۲۷ بودت-شور-ون در واردن [۳۱]: برای هر k و l، $w = w(k,l)$ وجود دارد به‌طوری‌که هر k-رنگ‌آمیزی از مجموعه‌ی $[w]$، شامل یک تصاعد حسابی l-تایی تک‌رنگ است .

ون در واردن به کمک امیل آرتین و اوتا شرر این نتیجه را زمانی اثبات نمود که در دانشگاه هامبورگ بود و سال بعد یعنی ۱۹۲۷ در برلین آنرا ارائه نمود. توجه داشته باشید که قضیه‌ی بودت-شور-ون در واردن علاوه بر این‌که لم مکعبی هیلبرت را نتیجه می‌دهد، لم را قوی‌تر نیز می‌کند. بودت و ون در واردن سهم بسیار کمی در ریاضیات رمزی داشتند. متاسفانه بودت یک عذر موجه داشت، وی در روز کریسمس سال ۱۹۲۱ از دنیا رفت، او تنها ۳۰ سال داشت، اما ون در واردن این عذر را نداشت و ۹۳ سال عمر کرد. ون در واردن متوجه نشد نتیجه‌ای که اثبات کرده است چه اهمیتی دارد. او مقاله‌های خود در زمینه‌ی هندسه جبری را به معتبرترین مجله یعنی "Mathematische Annalen" ارسال می‌کرد. ولی با وجود این او اثبات خودش را به یک مجله‌ی "Obscure" یعنی "Nieuw Archief voor Wiskunde" که مربوط به انجمن ریاضیات هلند است، ارسال نمود.

۴.۲.۱ قضیه‌ی ۱۹۳۰ رمزی

فرانک پلامپتون رمزی مایه‌ی مباهات و امید کالج پادشاهی کمبریج بود. با وجود این‌که هنوز ۲۷ سال را تمام نکرده بود تاثیر به‌سزایی در فلسفه، منطق ریاضیاتی، اقتصاد و ریاضیات گذاشت. در سال ۱۹۲۸ که وی ۲۵ سال داشت مقاله‌ای را برای انتشار فرستاد و در سال ۱۹۳۰ به چاپ رسید [۲۶]. مقاله شامل دو حالت محدود و نامحدود از مواردی بود که در آن زمان تحت عنوان "قضیه‌ی رمزی" شناخته شد. این قضیه ابزاری بسیار قدرتمند و همچنین یک بیانیه‌ی اساسی فلسفی است، بطوری‌که موتزکین در مورد این مقاله می‌نویسد: بی‌نظمی کامل غیر ممکن است. در مقاله‌ی رمزی دو اصل وجود دارد:

حالت نامتناهی: برای هر عدد طبیعی k و r، اگر خانواده‌ی تمامی r-تایی‌های مجموعه‌ی نامتناهی S با k رنگ، رنگ‌آمیزی شود، آنگاه S شامل یک زیرمجموعه‌ی نامتناهی S_1 است بطوری‌که تمامی r-تایی‌های زیرمجموعه‌ی S_1 از یک رنگ مشابه هستند.

حالت متناهی: برای هر عدد طبیعی r، n و k یک عدد صحیح مانند $m_0 = R(r,n,k)$ وجود دارد بطوری‌که اگر $m \geq m_0$ و خانواده‌ی تمام r-تایی‌های یک مجموعه‌ی m-عضوی مانند S_m با k رنگ، رنگ‌آمیزی شده باشد، آنگاه S_m شامل یک زیرمجموعه‌ی n-عضوی مانند S_n است بطوری‌که تمامی r-تایی‌های زیرمجموعه‌ی S_n از یک رنگ مشابه هستند.

شکل ۴.۱: فرانک پلامپتون رمزی

خبر انتشار مقاله‌ی رمزی که در سال ۱۹۳۰ به چاپ رسید، به‌سرعت در زمانی‌که نمی‌توان آن‌را عصر اطلاعات نامید پخش شد. بلافاصله پس از آن در سال ۱۹۳۳ منطق‌دان نروژی سکولم اثبات خود را در مورد قضیه‌ی رمزی (با ارجاع دادن به مقاله‌ی ۱۹۳۰ رمزی) به چاپ رسانید [۲۸]. در سال ۱۹۳۵ نیز اثبات دیگری توسط دو جوان

مجارستانی یعنی اردوش و زکرس به چاپ رسید. در زمستان ۱۹۳۲-۱۹۳۳، دو دوست جوان، دانشجوی ۱۹ ساله‌ی ریاضی یعنی پائول اردوش و دانشجوی ۲۱ ساله‌ی شیمی زکرس مسأله‌ای را که توسط دوستشان خانم کلین ۲۲ ساله مطرح شده بود را حل کردند ولی به مدت یک سال و نیم آن‌را برای هیچ مجله‌ای ارسال نکردند. در نهایت اردوش تصمیم گرفت مقاله‌ی مشترکشان را برای مجله‌ی "J. E. L. Brouwer" تحت عنوان "Compositio Mathematica" بفرستد. به‌طوری‌که در سال ۱۹۳۵ در این مجله به چاپ رسید [۱۹]. اردوش و زکرس اولین کسانی بودند که قدرت و زیبایی نظریه‌ی رمزی را، با حل آن مسأله، نشان دادند.

شکل ۱.۵: پائول اردوش

۱.۲.۵ اعداد رمزی ابرگراف‌ها و گراف‌های چگال

در سال ۱۹۳۵ اردوش و زکرس برای اولین بار از قضیه‌ی رمزی در نظریه‌ی گراف استفاده کردند [۱۹]. با اینکه تعیین مقدار دقیق اعداد رمزی دشوار است ولی تا کنون اعداد رمزی کلاس‌های مختلفی از گراف‌ها تعیین شده است [۲۵]. برای بسیاری از گراف‌هایی که هنوز مقدار دقیق اعداد رمزی‌شان مشخص نشده، حدس‌ها و کران‌های بسیاری وجود دارد. یکی از مسائل جالب در نظریه‌ی رمزی، محاسبه‌ی اعداد رمزی قطری گراف‌ها و ابرگراف‌ها است. برای گراف‌های چگال ثابت شده است که رشد این عدد نسبت به مرتبه‌ی گراف نمایی است. به عنوان مثال برای چگال‌ترین گراف از مرتبه‌ی n یعنی گراف K_n وقتی $n \geq ۲$، داریم:

$$۲^{\frac{n}{۲}} < r(n) < ۲^{۲n}.$$

این دو کران، اولین کران‌های بالا و پایین به‌دست آمده در ارتباط با اعداد رمزی گراف‌های کامل در نظریه‌ی رمزی گراف‌ها هستند. کران بالا در سال ۱۹۳۵ توسط اردوش و زکرس به روش هندسی، و کران پایین در سال ۱۹۴۷ توسط اردوش به روش احتمالاتی به‌دست آمده است [۱۳، ۱۹]. بهترین کران بالا در سال ۲۰۰۹ توسط کنلن به‌دست آمد [۸]. برخی از این کران‌ها در [۸] آمده است. اگرچه شکاف قابل توجهی میان کران پایین و بالای اعداد رمزی گراف‌ها وجود دارد، با عین حال اطلاعات ما در مورد اعداد رمزی ابرگراف‌ها بسیار کمتر است. اردوش،

هاجنال و رادو [۱۲] نشان دادند مقادیر ثابت c و c' وجود دارد بطوری‌که

$$2^{cn^2} < r_3(n) < 2^{2^{c'n}}. \qquad (۱.۱)$$

علاوه بر این آن‌ها حدس دیگری را ارائه دادند که تا به امروز باز مانده است.

حدس ۲.۲.۱ [۷] برای مقدار ثابت $c > 0$ داریم: $r_3(n) > 2^{2^{cn}}$.

اردوش ۵۰۰ دلار به عنوان جایزه برای اثبات حدس ۲.۲.۱ پیشنهاد داد. مشابه ۱.۱ برای $k \geq 4$ داریم:

$$t_{k-1}(cn^2) \leq r_k(n) \leq t_k(c'n) \qquad (۲.۱)$$

بطوری‌که تابع $t_k(x)$ چنین تعریف می‌شود: $t_1(x) = x$ و $t_{i+1}(x) = 2^{t_i(x)}$ [۱۲]. همان گونه که مشاهده می‌شود رشد کران پایین $r_k(n)$ نسبت به مرتبه‌ی ابرگراف $(k-2)$-نمایی، و برای کران بالا $(k-1)$-نمایی است. این به آن معنی است که اختلاف میان کران بالا و پایین بسیار زیاد است. اردوش و هاجنال در لمی با عنوان بالا-پله‌ای نشان دادند که می‌توان با استفاده از کران پایین $r_{k-1}(n)$، یک کران پایین برای $r_k(n)$ به‌دست آورد [۲۰]. هربار که از این لم استفاده می‌کنیم یک نما به کران اضافه می‌شود. بنابراین درصورتی که حدس ۲.۲.۱ صحیح باشد، یعنی $r_3(n)$ رشدی دوبل-نمایی نسبت به مرتبه‌ی ابرگراف داشته باشد، شکاف بزرگی که میان کران بالا و پایین $r_k(n)$ وجود دارد ،به ازای هر k بسته خواهد شد.

اردوش و هاجنال در حدس ۲.۲.۱ اعتقاد داشتند که $r_3(n)$ رشدی دوبل-نمایی نسبت به مرتبه‌ی ابرگراف دارد، اردوش قضیه جالبی در مورد ابرگراف‌ها ثابت کرد که ممکن است با یک اختلاف مواجهه شویم [۷،۱۴،۱۷]. او نشان داد $c, \epsilon > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که در هر ۲-رنگ‌آمیزی ۳-تایی‌های یک مجموعه‌ی N-عضوی، زیرمجموعه‌ی S از اندازه‌ی s وجود دارد به‌طوری‌که $s > c(\log N)^{\frac{1}{2}}$ و حداقل $(\frac{1}{2}+\epsilon)\binom{s}{3}$-تا از ۳-تایی‌های S رنگ یکسانی دارند، به‌این معنی که توضیع رنگ‌آمیزی در مجموعه‌ی S متوازن نیست. و در حالتی که n به بینهایت میل می‌کند یک اختلاف (تناقض) با حالتی‌که $k = 2$ وجود دارد. اردوش اظهار داشت، درصورتی که کسی بتواند حدس ۳.۲.۱ را برای $\delta = \frac{1}{2}$ ثابت کند، باید به دوبل-نمایی بودن رشد $r_3(n)$ شک کرد.

حدس ۳.۲.۱ [۱۵] در هر ۲-رنگ‌آمیزی ۳-تایی‌های مجموعه‌ی N-عضوی، زیر مجموعه‌ی S از اندازه‌ی s وجود دارد، بطوری‌که

$$s = c(\epsilon)(\log N)^{\delta} \qquad (۳.۱)$$

و حداقل $(1-\epsilon)\binom{n}{3}$-تا از ۳-تاییهای S رنگ یکسان دارند، δ مقداری ثابت و بزرگ‌تر از صفر، c مقداری ثابت بر حسب ϵ و $\epsilon > 0$ و دلخواه است.

در صورتی که حدس ۳.۲.۱ صحیح باشد، با میل کردن ϵ به صفر، تقریباً همه‌ی ۳-تایی‌های S تک‌رنگ خواهند بود. با محاسبه‌ی مقدار N از رابطه‌ی ۳.۱، زمانی که $\delta = \frac{1}{2}$ داریم، $N = 2^{c'(\epsilon)s^2}$. مشاهده می‌شود که عدد رمزی نسبت به s به شکل دوبل-نمایی نیست، پس حق داریم که به حدس ۲.۲.۱ شک کنیم. حدس ۳.۲.۱ در سال ۲۰۱۱ توسط کنلن، فاکس و سوداکو اثبات شد [۱۰]. مسأله‌ی باز دیگری که اردوش و هاجنال در سال ۱۹۸۹ مطرح کردند [۱۷] این بود که آیا ابرگراف چگال (ابرگرافی که چگالی آن به‌ازای $\epsilon > 0$ بیش از $(\frac{1}{4}+\epsilon)$ باشد) با عدد رمزی کوچک وجود دارد؟ در نگاه اول به نظر می‌رسد چنین حدسی درست نباشد، چراکه با افزایش چگالی ابرگراف، قاعدتاً بایستی عدد رمزی ابرگراف نیز بزرگ‌تر شود. کنلن، فاکس و سوداکو در سال ۲۰۱۱ در [۱۰] این مسأله را نیز اثبات کردند.

۳.۱ مروری بر فصل‌های دیگر

در ابتدای فصل دوم به مطالعه‌ی حدسی از اردوش و هاجنال می‌پردازیم که تا به حال باز مانده است. سپس به‌طور مختصر برخی از پژوهش‌ها که در این زمینه به‌دست آمده است را مورد بررسی قرار می‌دهیم. اگرچه تلاش‌های صورت گرفته در راستای اثبات این حدس چندان هم کم نبوده است، بااین‌وجود تنها چند گروه خاص از گراف‌ها بوده‌اند که نشان داده شده این حدس در مورد آنها درست است. در ادامه به نمونه‌هایی از مسائل رمزی که در زمینه‌ی گراف‌ها، ابرگراف‌ها و به‌ویژه ابرگراف‌های ۳-یکنواخت مطرح شده است خواهیم پرداخت. در پایان این فصل قضیه‌ای که اردوش و هاجنال آن‌را در سال ۱۹۸۹ بیان کردند را ارائه می‌دهیم و همچنین سه سؤال بی پاسخی که درباره‌ی این قضیه مطرح شد. مطالب این فصل برگرفته از مراجع [۱۷،۴] می‌باشند.

فصل پایانی را با یکی از جدیدترین کارهای سوداکو و دوستانش که در حوزه‌ی اعداد رمزی انجام داده‌اند شروع می‌کنیم. با اثبات یک کران بالا برای عدد رمزی ابرگراف کامل ۳ -یکنواخت d-بخشی $K_d^3(n)$، عملاً به دو سؤال باز از اردوش و هاجنال که در فصل دوم به آن‌ها اشاره خواهد شد پاسخ داده می‌شود. ایده‌ی اثبات این قضیه برگرفته از روشی متعلق به اردوش و رادو است که برای ارائه‌ی یک کران بالا برای عدد رمزی ابرگراف کامل ۳-یکنواخت، در سال ۱۹۵۲ به‌دست آمد. یکی دیگر از کارهای سوداکو و دوستانش بهبود این کران بالا بود. یک روش برای هرچه بهتر کردن این کران استفاده از استراتژی بردی است که در بازی ”بنّا و نقاش“ وجود دارد. در پایان این فصل به تفصیل این موضوع را مورد مطالعه قرار خواهیم داد. مطالب این فصل برگرفته از مراجع [۹، ۱۰] می‌باشند.