دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه

جهت اخذ درجهٔ دکتری در رشتهٔ ریاضی محض

عنوان:

بررسی ویژگی سایه‌ای و رفتارهای ژنریک در سیستمهای دینامیکی

استاد راهنما:

خانم دکتر فاطمه هلن قانع استاد قاسمی

اساتید مشاور:

دکتر بهمن هنری

دکتر عباس فخاری

به نگارش:

علی اصغر ساری زاده قوچانی

اسفند ۱۳۸۷

به

پدر، مادر و بردارم و خواهرانم

که ترنم این سطور در برابر لطف بی‌کرانشان بس بی‌صداست؛

و

همسرم فهیمه خوش آهنگ قصر

.

چکیده

در این رساله به بررسی بعضی از خواص سیستمهای دینامیکی می‌پردازیم. ابتدا با ویژگی سایه‌ای حد زبرین آشنا شویم و بحث را با بررسی ویژگی سایه‌ای حد زبرین و برخی ویژگی‌های آن دنبال می‌کنیم. نشان خواهیم داد که سیستمهایی که در این خاصیت صدق می‌نمایند تنها دارای یک مؤلفه زنجیری می‌باشند که برابر با کل فضا می‌باشد. در ادامه با مقایسهٔ خاصیت سایه‌ای حد زبرین با ویژگی سایه‌ای و با ارائه مثال تلاش می‌کنیم تا تصویر روشن‌تری از این مفهوم را برای خواننده تداعی کنیم. مشاهده می‌کنیم که ویژگی سایه‌ای حد زبرین، ویژگی متعدی زنجیری و ویژگی آمیخته زنجیری را ایجاب می‌نماید که رابطه نزدیکی بادینامیک‌های آشوبناک دارند. این یکی از برجستگی‌های تعریف ویژگی سایه‌ای حد زبرین می‌باشد.

در ادامه، بعضی از خواص مؤلفه‌های متعدی زنجیری قوی را بررسی می‌کنیم. با توجه به نتایج بدست آمده در [۲] بدیهی است که برای هر عدد طبیعی n، $CR(f^n) = CR(f)$. ابتدا نتایجی مشابه، بین مجموعهٔ بازگشتی زنجیری قوی f^n و مجموعهٔ بازگشتی زنجیری قوی f بدست می‌آوریم. و ثابت می‌کنیم اجتماع n—تکرار اول تحت f از یک مؤلفهٔ زنجیری قوی f^n، یک مؤلفهٔ زنجیری قوی از f می‌باشد. در ادامه شرط لازم برای برقراری تساوی $SCR(f^n) = SCR(f)$، ارائه می‌کنیم و با استفاده از روش سایه‌ای به دو نتیجهٔ جالب می‌رسیم. اول این که برای اعضای یک مجموعهٔ ژنریک در مجموعهٔ همسانریختیها ثابت می‌کنیم که مؤلفه‌های زنجیری با مؤلفه‌های زنجیری قوی یکی هستند و دوم این که اگر $f : X \to X$ نگاشت پیوسته با ویژگی سایه‌ای میانگین باشد آنگاه f متعدی زنجیری قوی است.

در انتها، به مطالعهٔ سیستمهای تکرار توابع خواهیم پرداخت. در آغاز یک سیستم کمینی از تکرار توابع روی یک منیفلد فشردهٔ همبند با یک دیفیومورفیسم کمین می‌سازیم که اینکار قبلاً توسط گرودتسکی[۱] و ایلیاشنکو[۲] روی دایره انجام شده است (برای بررسی بیشتر به [۲۶] و

[۱] Gorodetskii

[۲] Ilyashenko

[۲۷] رجوع شود). تکنیکها و روشهای مورد نیاز برای این فصل بر گرفته از تئوری سیستمهای تکرار توابع می‌باشد که این تئوری محبوبیت خاصی در بررسی فرکتالها دارد. ما کار را با دو همسانریختی روی $n-$چنبره ادامه می‌دهیم و ثابت می‌کنیم سیستم تولید شده توسط این دو تابع کمین می‌باشد. کلپتسین و نالسکی وجود جاذب تصادفی را برای سیستم کمینی روی دایره اثبات کردند. ولی کار مشابه برای ابعاد بالا تر، بسیار سخت می‌باشد. در پایان قضیهٔ بازگشتی پوانکاره را برای یک سیستم تصادفی بیان و ثابت می‌کنیم که مجموعهٔ نقاط بازگشتی تصادفی سیستمهای کمین، برابر کل فضاست. همچنین مثالی از سیستم تصادفی ارائه می‌کنیم که اندازه لبگ نقاط بازگشتی تصادفی آن صفر است.

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیشگفتار

۱.۱ مروری تاریخی بر رساله

۱.۱ مروری تاریخی بر رساله

به طوری کلی هدف دینامیک تشریح دگرگونی‌های سیستم با کمک یک ضابطه می‌باشد. برای سیستم‌های زمان پیوسته، این ضابطه در قالب یک دستگاه معادلات دیفرانسیل است در حالی که در سیستم‌های زمان گسسته بصورت یک نگاشت پیوسته، یک همسانریختی یا یک دیفیومورفیسم، بیان می‌شود. در سراسر این پایان نامه سیستم‌های مورد مطالعهٔ ما سیستم‌های زمان گسسته می‌باشند که در فصل دوم به طور دقیق بیان شده‌اند.

این رساله مشتمل بر پنج فصل می باشد. در فصل اول مروری تاریخی بر مطالب رساله خواهیم داشت و در فصل دوم نمادهای کلی، مفاهیم اولیه و قضایای مرجع را ارائه می‌کنیم. فصلهای سه و چهار را به بررسی برخی ویژگی‌های سیستمهای دینامیکی گسسته اختصاص می‌دهیم و در فصل آخر سیستمهای دینامیکی گسسته تصادفی را مطالعه می کنیم.

سیستم (X,f) که f یک همسانریختی روی فضای متریک X است را در نظر می‌گیریم. همان طور که می‌دانیم مطالعه و بررسی رفتار مدار یک نقطه، $\{x, f(x), ..., f^n(x), ...\}$، هنگامی که $n \to \pm\infty$، اساس کار سیستمهای دینامیکی است.

در بررسی سیستم (X,f) گاهی اوقات مشاهده می‌کنیم که یک تغییر جزئی منجر به دگرگونی در مدارهای یک سیستم می‌شود. این پدیده را آشوب و سیستم (X,f) را آشوبناک می‌نامند، هر چند که این جمله تعریف دقیقی برای مفهوم آشوب نیست. در حقیقت در بررسی دینامیک‌های پیچیده، واژهٔ آشوب را بکار می‌برند بی آنکه تعریف دقیقی از این مفهوم ارائه شود. در واقع ریاضیدانان به جای آن که تعریف دقیقی از آشوب ارائه دهند ویژگی‌هایش را معرفی می‌نمایند که غالباً به عنوان شاخص‌های سیستم‌های آشوبناک در نظر گرفته می‌شود که از جمله می‌توان به ویژگی‌های حساسیت نسبت به وضعیت اولیه، وجود نمای لیاپانوف مثبت، متعدی توپولوژیکی و آمیختهٔ توپولوژیکی اشاره نمود.

بطور شهودی، حساسیت نسبت به شرایط اولیه در یک سیستم دینامیکی نشان می‌دهد که مدارهای نقاط نزدیک به هم می‌توانند بعد از گذشت زمانی از هم فاصله بگیرند، نماهای

لیاپانوف نرخ نمایی این فاصله گرفتن را اندازه گیری می‌کند حال آن که ویژگی متعدی توپولوژیکی، تجزیه ناپذیری دینامیکی را نتیجه می‌دهد.

ایدهٔ دینامیک‌های آشوبناک اولین بار توسط پوانکاره[۱]، ریاضیدان نامی ارائه شد. این ایده در مدل بندی دستگاه قطبی بر اساس قوانین نیوتن تحت مسئله سه جسم مطرح گردید.

پوانکاره در مطالعاتش روی مسئله سه جسم به دینامیک‌های آشوبناک پی‌برد. او مشاهده کرد که با دگرگونی این سیستم تحت یک اختلال کوچک در وضعیت اولیه، وضعیت متفاوتی حاصل می‌شود که قابل پیش‌بینی نیست.

در سال ۱۹۶۰ هواشناسی بنام ادوارد لورنز در مطالعات خویش روی اتمسفر زمین وابستگی حساس نسبت به شرایط اولیه را نتیجه گرفت.

امروزه با این نظریه بسیاری از سیستمهای پیچیده در هواشناسی و بازار بورس و غیره را مورد بررسی و مطالعه قرار می‌دهند.

در سیستم‌های گسسته، تعاریف گوناگونی برای آشوب وجود دارد. اما ویژگی که در اکثر سیستم‌های گسسته با رفتار آشوبناک مشاهده می‌کنیم، ویژگی متعدی توپولوژیکی می‌باشد. به تازگی ویژگی متعدی توپولوژیکی را با ویژگی سایه‌ای مورد مطالعه قرار می‌دهند که می‌توان به آثار یانگ[۲] اشاره کرد. یانگ [۵۲] به بررسی رابطهٔ بین خاصیت سایه‌ای مدارها و ارگودیک توپولوژیکی را بررسی کرده و ثابت می‌کند که یک سیستم متعدی زنجیری (X, f) با خاصیت سایه‌ای، ارگودیک توپولوژیکی است.

امروزه مدارنماها در اغلب شاخه های مدرن سیستم های دینامیکی ظاهر شده‌اند. اساساً خاصیت سایه‌ای نقش مهمی در سیستمهای دینامیکی ایفا نمی‌کند، ولی ابزار قوی در اثبات بعضی قضایا در تئوری پایداری و آشوب می‌باشد، که باعث شده تعدادی از محققان به بررسی آشوب با استفاده از خاصیت سایه‌ای بپردازند.

[۱] Poincaré
[۲] Yang

اولین بار آناسوف[۳] ([۴]) و باون[۴] ([۱۳]) بطور جداگانه برای سیستمهای هذلولوی به نتایج جالبی رسیدند. آنها ثابت کردند که مدارنماها نزدیک یک مجموعه هذلولوی توسط یک مدار کامل سایه زده می شود. این ویژگی را ویژگی سایه‌ای می‌نامند.
بلانک [۵] ([۱۰]) نماد مدارنمای میانگین را معرفی کرد و نشان داد که برای سیستم هذلولوی f هر مدارنمای میانگین توسط یک مدار کامل از f بطور میانگین سایه زده می‌شود. بعلاوه وی ثابت کرد اگر دیفومورفیسم f در اصل A صدق کند و Λ یک مجموعهٔ اساسی f باشد آنگاه $f|_\Lambda$ دارای خاصیت سایه‌ای میانگین است. در اثبات این نتیجه ویژگی متعدی توپولوژیکی نقش مهمی ایفا می‌کند ([۱۰]). بتازگی گو[۶] نشان داد که تابع لیاپانوف پایدار اگر خاصیت سایه‌ای داشته باشد، آنگاه ارگودیک توپولوژیکی است. گو در مقالهٔ دیگری [۲۹] ضمن معرفی نوع جدیدی از ویژگی سایه‌ای، ویژگی سایه‌ای میانگین مجانبی $AASP$، ثابت می‌کند که سیستمهایی با ویژگی $AASP$، متعدی زنجیری هستند. بعلاوه گو نشان داد که سیستمهای $L-$هذلولوی با ویژگی $AASP$، متعدی توپولوژیکی هستند. در فصل سوم ما نوع جدیدی از ویژگی سایه‌ای را معرفی می‌کنیم که متعدی توپولوژیکی می‌باشد.
مفهوم نقاط زنجیری بازگشتی و مجموعه‌های زنجیری بازگشتی نخستین بار توسط کونلی[۷] معرفی شد. او نشان داد که این مفهوم تاثیر بسزایی در بررسی ساختار جاذب‌ها در سیستم‌های دینامیکی دارد. در واقع هر جاذب توپولوژیکی یک مجموعهٔ پایای زنجیری بازگشتی است که نوع ضعیفتری از تجزیه ناپذیری دینامیکی این مجموعه را نشان می‌دهد. اگر یک سیستم دینامیکی حافظ یک اندازهٔ بورل باشد آنگاه بنا به قضیهٔ بازگشتی پوانکاره مجموعهٔ زنجیری بازگشتی آن کل فضا است (برای جزئیات [۱۹] را ببینید). در این حالت برای تحلیل رفتارهای دینامیکی سیستم بهتر است مجموعهٔ پایا و تجزیه ناپذیر دینامیکی دیگری معرفی شود.

---

[۳] Anosove
[۴] Bowen
[۵] Blank
[۶] Gu
[۷] Conley

بدین منظور ایستون[۸] (۱۹۷۷) مفهوم قوی‌تر از رفتارهای بازگشتی را معرفی نمود. او مفهوم زنجیرهای قوی و مجموعه‌های زنجیری بازگشتی قوی را معرفی نمود.
ایستون نشان داد که اگر Λ یک مجموعهٔ بستهٔ پایای متعدی زنجیری قوی باشد آنگاه تحدید f به Λ لیپشیتز ارگودیک است بدین معنا که اگر $g:\Lambda\to\mathbb{R}$ تابع لیپشیتز باشد به طوری که برای هر $x\in\Lambda$ داشته باشیم $g(f(x))=g(x)$ آنگاه g ثابت است. بنابراین بررسی ویژگی‌های مجموعه‌ها و مؤلفه‌های متعدی زنجیری قوی حائز اهمیت است.
در فصل چهارم به بررسی مجموعه‌های زنجیری بازگشتی قوی می‌پردازیم و رابطهٔ بین ویژگی سایه‌ای ضعیف و متعدی زنجیری قوی را ارائه می‌دهیم. در این فصل ثابت می‌کنیم که اگر همسانریختی f خاصیت سایه‌ای ضعیف را داشته باشد آنگاه f متعدی زنجیری است.

یکی از اهداف مهم در سیستم‌های دینامیکی و سیستم‌های تصادفی بررسی ویژگی‌های استوار در سیستم‌ها می‌باشد (یک ویژگی P در سیستم دینامیکی (X,f) را استوار خوانیم، اگر سیستمهای بقدر کافی نزدیک این سیستم در ویژگی P صدق کنند).
بالاخره در فصل آخر یک سیستم کمین استوار از تکرار توابع روی چنبره را بررسی می‌کنیم. ابتدا ثابت می‌کنیم که در سیستم تکرار توابع، داشتن مجموعهٔ پایا با درون ناتهی یک ویژگی استوار است.

نتایج بدست آمده توسط گورودتسکی[۹] وایلیوشنکو[۱۰] از تکرار توابع روی دایره محرک خوبی بود تا ما این نتایج را برای ابعاد بالا تر گسترش دهیم. آنها یک سیستم کمین از تکرار توابع تولید شده توسط دو همسانریختی روی دایره ارائه کردند. کلپتسین[۱۱] و نالسکی[۱۲] بصورت تئوری نشان دادند که این سیستم دارای جاذب تصادفی است. هر چند نتایج عددی قبلاً وجود جاذب تصادفی را پیش گویی کرده بود. هدف کلی ما گسترش بعضی از این نتایج برای ابعاد بالاتر می‌باشد. هر چند که در ابعاد بالا مسئله بسیار سخت است و حتی با مدلهای کامپیوتری هم

[۸] Easton
[۹] A.S. Gorodetski
[۱۰] Yu. S. Il'yashenko
[۱۱] Kleptsyn
[۱۲] Nalskii

پیش‌بینی وجود جاذب تصادفی در بعد ۲ فعلاً امکان پذیر نمی‌باشد. این پیچیدگی مسئله برای ابعاد بالا انگیزه خوبی درمحققان بوجود می آورد.

در حالت کلی، مجموعه‌ای از همسانریختی‌ها $L = \{g_۱, ..., g_n\}$ روی چنبره را در نظر می‌گیریم. سیستم تکرار توابع از مجموعهٔ L بصورت $g_{i_k} \circ \cdots \circ g_{i_۱}$ با $i_j \in ۱, \ldots, n$ می‌باشد. اکنون فرض کنیم اعداد $p_۱, \ldots, p_n$ با شرط $p_۱ + \ldots + p_n = ۱$ داده شده باشد که در آن p_i احتمال انتخاب همسانریختی g_i می باشد که این منجر به تولید یک سیستم دینامیکی تصادفی می‌شود. ما در این رساله سیستم دینامیکی تصادفی از تکرار توابع $L = \{g_۱, ..., g_n\}$ از همسانریختی‌ها روی چنبره را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

هر عضو از سیستم دینامیکی تصادفی از ترکیب تصادفی و مستقل اعضای L بدست می آید. سیستمهای دینامیکی تصادفی توسط محققان زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است ([۲٦]، [۲۷]، [۳۲]، [۳۵] و [٥٦]).

گورودتسکی وایلیوشنکو دامنهٔ بازی از توابع راروی دایره معرفی کردند که برای سیستم تصادفی تولید شده از اعضای این دامنه یک مجموعهٔ چگال از عناصر تناوبی با مولفهٔ لیاپانوف صفر داریم. بعلاوه آنها یک سیستم کمین بر روی دایره معرفی کردند.

در سال ۲۰۰۲ کلپتسین و نالسکی ثابت کردند که برای یک سیستم کمین روی دایره، وقتی که تعداد تکرارها به سمت بی نهایت میل می‌کند فاصلهٔ بین تکرار نقاط متفاوت به سمت صفر میل می‌کند.

اخیراً آل یان هومبورگ[۱۳] و زمارو[۱۴] دینامیک و انشعاب دیفیومورفیسمهای تصادفی روی دایره را مورد مطالعه قرار دادند و شرایطی را معرفی کردند که وجود جاذب تصادفی یا جاذب تناوبی تصادفی را تضمین می‌کند.

این طبیعی است که ما دنبال حقایقی مشابه برای ابعاد بالاتر باشیم. ولی همانطور که اشاره کردیم این مسئله برای ابعاد بالا بسیار پیچیده است.

---

[۱۳] A. J. Homburg

[۱۴] H. Zmarrou

از این رساله ۴ مقاله استخراج گردیده است.

1) F. H. Ghane, A. Fakhari, A. Sarizadeh, Limsup shadowing property and chaotic behaviors, J. of Dynamical Systems and Geometric Theories. Vol. 6, N. (2008).

2) F. H. Ghane, A. Sarizadeh, Robust Minimal System on the Torus and Random Recurrent Properties. submitted to Stochastics and Dynamics (SD).

3) F. H. Ghane, A. Fakhari, A. Sarizadeh, Some Properties of the Strong Chain Recurrent Set. submitted to Communications of the Korean Mathematical Society.

4) F. H. Ghane, A. Sarizadeh, Almost Surly Minimal is a Generice Property. submitted to International Journal of Bifurcation and Chaos (IJBC).

فصل ۲

معرفی نمادهای کلی، مفاهیم اولیه و قضایای مرجع

۱.۲ بررسی بعضی از مجموعه‌های پایا

۲.۲ آشوب

۳.۲ توپولوژی روی C^r دیفیومورفیسم‌ها

۴.۲ بررسی مجموعه‌های هذلولوی و خواص آن

۵.۲ بررسی ویژگی سایه‌ای و انواع آن

۶.۲ نظریهٔ ارگودیک، سیستم تکرار توابع و سیستمهای تصادفی

در این فصل به تعریف مفاهیم اولیه و ارائه قضایای مرجع مورد نیاز در پایان نامه می‌پردازیم. ابتدا مفهوم سیستم دینامیکی را بیان می کنیم.

تعریف ۱.۰.۲ هر مجموعهٔ X و نیم گروه G همراه با نگاشت

$$\phi : X \times G \to X$$

را یک سیستم دینامیکی خوانیم در صورتی که:

$$\phi(\phi(x, g_۱), g_۲) = \phi(x, g_۱ g_۲); \quad \forall\ x \in X,\ \forall\ g_۱, g_۲ \in G.$$

اگر $G \subset (\mathbb{Z}, +)$، آنگاه سیستم دینامیکی را گسسته می‌نامند. اکنون فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد و $f \in \mathcal{H}(X)$، که $\mathcal{H}(X)$ را مجموعهٔ تمام همسانریختی‌های روی X در نظر می‌گیریم. در این صورت نگاشت ϕ از $X \times \mathbb{Z}$ بتوی X را بصورت $\phi(x, n) = f^n(x)$ تعریف می‌کنیم. چنین سیستمی را با (X, f) نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۰.۲ اگر (X, f) یک سیستم دینامیکی باشد آنگاه به ازای هر x متعلق به X، مدار x را با $\mathcal{O}(x)$ نمایش می دهیم و بصورت زیر تعریف می کنیم

$$\mathcal{O}(x, f) = \{f^n(x) :\ n \in \mathbb{Z}\}$$

مجموعهٔ تکرارهای مثبت نگاشت f در نقطهٔ x را مدار پیشرو و تکرارهای منفی نگاشت f در نقطهٔ x را مدار پس رو می‌نامیم. بدیهی است که مدار هر دو نقطه از X یا کاملاً منطبق یا از هم‌جدا می‌باشد.

همان طور که در پیشگفتار اشاره کردیم یکی از اهداف سیستم‌های دینامیکی، بررسی رفتارحدی

مدارها می‌باشد. در بررسی سیستم‌های دینامیکی از این نقطه نظر، مجموعه‌های بستهٔ پایا بسیار حائز اهمیت می‌باشند. در رساله به معرفی چند مجموعهٔ بستهٔ پایا که در ادامه به آنها نیازمندیم، می‌پردازیم.

۱.۲ بررسی بعضی از مجموعه‌های پایا

بعنوان بدیهی‌ترین مثال از مجموعه‌های پایا می‌توان به مجموعه نقاط ثابت و تناوبی با ساختار دینامیکی ساده اشاره کرد. یک نقطهٔ x را نقطهٔ تناوبی می‌نامند اگر عدد صحیح و مثبت $n > 0$ وجود داشته باشد به طوری که $f^n(x) = x$. کوچکترین عدد مثبت n که در این معادله صدق می‌کند را دوره تناوب x می‌نامند. اگر تناوب نقطهٔ x برابر یک باشد x را نقطهٔ ثابت می‌گوییم. مجموعهٔ نقاط ثابت و تناوبی تابع f را به ترتیب با $\mathrm{Fix}\ (f)$ و $\mathrm{Per}\ (f)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۲ زیر مجموعهٔ Λ از X رانسبت به f پایا می‌نامیم اگر $f(\Lambda) = \Lambda$.

بوضوح هر مدار f پایا می‌باشد و یک مجموعهٔ Λ نسبت به f پایا است اگر و فقط اگر Λ اجتماعی از مدارهای f باشد.

قضیه ۲.۱.۲ اگر Λ پایا باشد آنگاه $\overline{\Lambda}$، $\partial(\Lambda)$ و $\mathrm{int}(\Lambda)$ نیز پایا می‌باشند که در آن $\overline{\Lambda}$ بستار Λ، $\partial(\Lambda)$ مرز Λ و $\mathrm{int}(\Lambda)$ نمایش درون Λ می‌باشد.

برهان. بدیهی است که $f(\overline{\Lambda}) \subset \overline{f(\Lambda)} = \overline{\Lambda}$. بطور مشابه می توان ثابت کرد $f^{-1}(\overline{\Lambda}) \subset \overline{\Lambda}$. بنابراین $f(\overline{\Lambda}) = \overline{\Lambda}$. با استدلالی مشابه، بقیه حالتها نیز قابل اثبات است. □

متذکر می‌شویم که مجموعهٔ نقاط ثابت نگاشت f مجموعه‌ای بسته می‌باشد ولی مجموعه نقاط تناوبی f عموماً بسته نیست.

بحث را با این سوال ادامه می‌دهیم که مدار بقیهٔ نقاط به کجا میل می‌کند؟

تعریف ۳.۱.۲ برای هر نقطهٔ x مجموعه $\omega-$حدی را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\omega(x) = \bigcap_n \overline{\bigcup_n^{+\infty} f^n(x)},$$

که شامل تمام نقاط انباشتگی مدار پیشرو f می‌باشد. بطور مشابه مجموعه α—حدی را مجموعهٔ تمام نقاط انباشتگی مدار پسرو f تعریف می کنیم.

قضیه ۴.۱.۲ برای هر $x \in X$، $\omega(x)$ و $\alpha(x)$ ناتهی، بسته و پایا می‌باشند.

برهان. مجموعهٔ $\omega(x)$ بوضوح بسته و ناتهی است. برای اثبات پایا بودن آن ابتدا ثابت می‌کنیم $f(\omega(x)) \subset \omega(x)$. فرض کنیم $y \in \omega(x)$. بنابراین دنبالهٔ $\{n_i\}_i$ از اعداد طبیعی موجود است به طوری که $f^{n_i}(x) \to y$ وقتی که $n_i(x) \to \infty$. در نتیجه $f^{n_i+1}(x) \to f(y)$. بنابراین $f(y) \in \omega(x)$. با استدلالی مشابه ثابت می‌کنیم $f^{-1}(\omega(x)) \subset \omega(x)$. و این اثبات قضیه را کامل می‌کند. □

مجموعه‌های $\omega(x)$ و $\alpha(x)$ به نقطهٔ x وابسته می‌باشند. برای بررسی رفتار حدی همه نقاط، ما نیاز داریم که اجتماع همه مجموعه‌های $\alpha(x) \cup \omega(x)$ را روی همه نقاط $x \in X$ در نظر بگیریم. این مجموعه ممکن است بسته نباشد. بنابراین بستار اجتماع‌ها را در نظر می‌گیریم که به تعریف مجموعهٔ حدی نیوهوس[۱] (۱۹۷۲) منجر می‌شود

$$L(f) = \overline{\bigcup_{x \in X} \alpha(x) \cup \omega(x)}.$$

تعریف ۵.۱.۲ فرض کنیم $f : X \to X$ یک همسانریختی باشد. دامنهٔ اثر مجموعهٔ پایای I تحت f را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$D(I) = \{x \in X : \alpha(x) \cap I \neq \emptyset \ \text{ and } \ \omega(\mathrm{x}) \cap \mathrm{I} \neq \emptyset\}.$$

مدارهای پیشرو (پسرو) از نقاط $D(I)$ به اندازهٔ کافی به I نزدیک می‌شود. بدیهی است که $D(I)$ یک مجموعهٔ پایاست و $D(D(I)) = D(I)$ (به [۱۹] مراجعه شود) .

[۱] newhouse

تعریف ۶.۱.۲ اگر $x \in \omega(x)$ یا $x \in \alpha(x)$ آنگاه x را ω یا α بازگشتی می‌نامند و مجموعهٔ تمام نقاط ω بازگشتی و α بازگشتی را بترتیب با R_+ [۲] و R_- نمایش می‌دهند. همچنین مجموعهٔ تمام نقاط بازگشتی f را با $R(f) = R_-(f) \bigcup R_+(f)$ نمایش می‌دهند.

در سال ۱۹۳۵، بیرخوف [۳] مفهوم نقاط ناسرگردان را معرفی کرد.

تعریف ۷.۱.۲ نقطهٔ x را سرگردان می‌نامند اگر همسایگی U_x از x موجود باشد به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$ مجموعهٔ $f^n(U_x) \bigcap U_x$ تهی باشد. مجموعهٔ متشکل از همه نقاط X، که سرگردان نباشند را مجموعه نقاط ناسرگردان می‌نامند و با نماد $\Omega(f)$ نمایش می‌دهند.

قضیه ۸.۱.۲ مجموعه نقاط ناسرگردان $\Omega(f)$ یک مجموعه ناتهی بسته و پایا می‌باشد و

$$L(f) \subset \Omega(f).$$

برهان. به [۴۴] مراجعه شود. □

اکنون مجموعهٔ پایای دیگری را که در سالهای ۱۹۶۰ تا ۱۹۷۰ توسط کنلی [۴] و باون [۵] ارائه شد معرفی می‌نماییم. ابتدا تعریف مدارنما را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۹.۱.۲ برای $\delta > 0$، دنبالهٔ $\xi = \{x_i\}_{i=a}^{b}$ را یک $\delta-$مدارنمای (زنجیر) f از x_a به x_b می‌نامند اگر برای هر $-\infty \leq a \leq i < b \leq \infty$ داشته باشیم $d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$.

با استفاده از تعریف فوق می‌توان یک رابطه هم‌ارزی بصورت زیر تعریف کرد.

تعریف ۱۰.۱.۲ برای هر دو نقطهٔ x و y از X، $x \sim y$ هرگاه برای هر $\delta > 0$ یک $\delta-$مدارنما متناهی از x به y و برعکس از y به x داشته باشیم.

---

[۲] مجموعه R_+ را مرکز بیرخوف f نیز می‌نامند

[۳] Birkhoff

[۴] Coley

[۵] Bowen

لم ۱۱.۱.۲ رابطه $\sim$ یک رابطه هم ارزی است.

برهان. به [۴۴] مراجعه شود. □

تعریف ۱۲.۱.۲ کلاسهای هم ارزی رابطهٔ $\sim$ را مؤلفه‌های زنجیری f می‌نامند.

در زیر نوع دیگری از نقاط بازگشتی را معرفی می‌کنیم که با یک مدارنما به خودش باز می‌گردد. این ویژگی از ویژگی بازگشتی تعریف ۶.۱.۲ ضعیف‌تر می‌باشد.

تعریف ۱۳.۱.۲ نقطهٔ x را نقطهٔ بازگشتی زنجیری f می‌نامند هرگاه $x \sim x$ و مجموعه تمام نقاط بازگشتی زنجیری f را با $\mathrm{CR(f)}$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۱۴.۱.۲ فرض کنیم $A \subset X$ تحت f پایا باشد. نگاشت $f: A \to A$ را متعدی زنجیری می‌نامند هرگاه A تنها مولفهٔ زنجیری f باشد. بنابراین تحدید f به هر مؤلفه زنجیری، متعدی زنجیری می‌باشد.

لم ۱۵.۱.۲ مجموعهٔ $\mathrm{CR(f)}$ فشرده می‌باشند.

برهان. برای $\epsilon > ۰$، مجموعهٔ $\mathrm{CR}_\epsilon(\mathrm{x,f})$ را مجموعه تمام نقاط $y \in X$ در نظر می‌گیریم که یک ϵ–زنجیر از x به y و برعکس از y به x موجود باشد. بدیهی است که:

$$\mathrm{CR(x,f)} = \bigcap_{\epsilon>0} \mathrm{CR}_\epsilon(\mathrm{x,f})$$

برای $\epsilon > \delta > ۰$ به آسانی قابل بررسی است که

$$\overline{\mathrm{CR}_\delta(\mathrm{x,f})} \subset \mathrm{CR}_\epsilon(\mathrm{x,f}),$$

که بسته بودن $\mathrm{CR(x, f)}$ را ایجاب می‌کند. □

لم ۱۶.۱.۲ مجموعه $\mathrm{CR(f)}$ تحت f پایا می‌باشد.

برهان. مشابه برهان قضیه ۴.۱.۲ ثابت می‌شود که مجموعه $\mathrm{CR(f)}$ تحت f پایا می‌باشد. □

از ابتدای این بخش تا کنون چند نمونه از مجموعه‌های پایا را ارائه کردیم، که می‌توانیم آنها را با رابطهٔ شمول بصورت زیر مرتب کنیم.

لم ۱۷.۱.۲

$$\mathrm{Per(f)} \subset \mathrm{R(f)} \subset \Omega\mathrm{(f)} \subset \mathrm{CR(f)}.$$

برهان. به [۴۴] مراجعه شود. □

قضیه ۱۸.۱.۲ برای هر عدد طبیعی k، $\mathrm{CR(f^k)} = \mathrm{CR(f)}$.

برهان. به [۲] مراجعه شود. □

در انتهای بخش ۴.۲ به بررسی بیشتر این مجموعه‌ها هنگامی که دارای ساختار هذلولوی باشند می‌پردازیم.

تعریف ۱۹.۱.۲ یک C^1 نگاشت $L : X \to \mathbb{R}$ را نگاشت اکیداً لیاپانوف روی $\mathrm{CR(f)}$ برای همسانریختی $f : X \to X$ نامند هرگاه:

$$L \circ f(x) < L(x); \quad \forall\, x \in X \setminus \mathrm{CR(f)}.$$

در زیر قضیهٔ اساسی کونلی برای دیفیومورفیسم‌ها را ارائه می‌دهیم که منجر به نتایجی مهم روی مجموعهٔ نقاط ناسرگردان شده است و از این رو آن را قضیهٔ اساسی کونلی نامیده‌اند.