دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی

عنوان

کرکتر میانگین پذیری داخلی جبرهای باناخ

نگارنده

زهرا میرعرب

استاد راهنما

دکتر علی غفاری

استاد مشاور

دکتر رضا معمار باشی

تیر ۱۳۹۱

به نام یگانه ایزد بی‌همتا

قدردانی و تشکر

در اینجا بر خود می‌دانم تا از استاد محترم و گرانقدرم جناب آقای دکتر غفاری که زحمات بی‌شائبه ایشان راهنمای بنده در این مقطع از تحصیل بخصوص در اتمام این پایان نامه بوده است، نهایت سپاسگزاری را داشته باشم، و بر خود می‌بالم که افتخار شاگردی در محضر ایشان شامل حالم شده است. ضمن اینکه از کلیه کسانی که اینجانب را در تحصیل علم و ادب یاری نموده‌اند خاصه پدر و مادرم تشکر می‌کنم.

تقدیم به:

پدرم و مادر مهربان و دلسوزم

اولین مرحله شناخت آفرینش همانا خرد است. چشم و گوش و زبان سه نگهبان اویند که لاجرم هر چه نیکی و شر است از همین سه ریشه می‌گیرد و افسوس که دنبال کنندگان خرد اندکند. باید که به سخن دانندگان راه جست و باید جهان را کاوش نمود و از هر کسی دانشی آموخت و یک دم را هم نباید برای آموختن از دست داد.

« فردوسی حکیم »

چکیده

بعد از پرداختن به کلیت مفهوم میانگین پذیری و $\varphi-$ میانگین پذیری برای جبرهای باناخ و میانگین پذیری درونی جبرهای لائو، مفهوم $\varphi-$ میانگین پذیری درونی را برای جبر باناخ دلخواه A تعریف و مطالعه می‌کنیم (φ یک همریختی از A به روی $\mathbb{C}$ است). چندین مشخصه از $\varphi-$ میانگین پذیری درونی جبرهای باناخ نیز بیان می‌شوند.

کرکتر میانگین پذیری درونی برای کلاس مشخصی از جبرهای باناخ شامل ضرب تانسور تصویری $A\hat{\otimes}B$، ضرب لائو $A\times_\theta B$ و گسترش مدولی $A\oplus X$ شرح داده شده است. چند مثال در این رابطه نیز آورده شده است.

واژه‌های کلیدی : میانگین پذیری، میانگین پذیری درونی، $\varphi-$ میانگین پذیری، $\varphi-$ میانگین پذیری درونی، کرکتر میانگین پذیری، کرکتر میانگین پذیری درونی، ضرب تانسور، ضرب لائو، جبر باناخ مثلثی، گسترش مدولی.

مقدمه

مفهوم میانگین پذیری یکی از مباحث پرکاربرد در آنالیز هارمونیک است که از دیرباز مورد توجه قرار گرفته است. شرایط متعددی برای میانگین پذیری گروه ارائه شده است. ساده‌ترین مثال‌ها از گروه‌های میانگین پذیر، گروه‌های فشرده و گروه‌های آبلی، هاسدورف و فشرده موضعی است. موضوع میانگین پذیری جبرهای باناخ نیز مورد توجه بوده و اساسی‌ترین قضیه در این زمینه این است که گروه هاسدورف و فشرده موضعی G میانگین پذیر است اگر و تنها اگر جبر گروهی $L^1(G)$ میانگین پذیر باشد. به‌طور موازی میانگین پذیری درونی روی گروه‌های توپولوژیک توسط افروس [1] در سال ۱۹۷۵ شروع شد و بعد از آن با آک‌من [2] در [۱]، کانیوس [3] و مارک فورت [4] در [۱۳]، پیئر[5] در [۲۳] و دیگر ریاضی‌دانان روی گروه‌های گسسته ادامه پیدا کرد. اخیراً نیز لینگ [6] در [۱۸] میانگین پذیری درونی را روی نیم گروه‌های گسسته مورد بررسی قرار داد و بدین شکل تعریف کرد که:

نیم گروه گسسته S میانگین پذیر درونی است، اگر $M \in P^1(l^\infty(S)^*)$ موجود باشد به‌طوری که برای هر $x \in S$ و $f \in l^\infty(S)$، $\langle M, {}_xf\rangle = \langle M, f_x\rangle$ که در آن ${}_xf$ و f_x توابعی از S به $\mathbb{C}$ هستند که به صورت $(f_x)(y) = f(xy)$ و $({}_xf)(y) = f(yx)$ تعریف می‌شوند.

در سال ۲۰۰۱ نصر اصفهانی میانگین پذیری درونی را روی جبرهای لائو بدین شکل تعریف کرد که:

جبر لائو A میانگین پذیر درونی است اگر $M \in P^1(A^{**})$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $a \in P^1(A)$ و $f \in A^*$،

$$\langle M, af\rangle = \langle M, fa\rangle.$$

هدف اصلی این پایان نامه بررسی مفهوم $\varphi-$ میانگین پذیر درونی روی جبرهای باناخ است که در سال ۲۰۱۰ توسط جباری، مهدی آبادی و زمان آبادی در [۱۰] معرفی شد.

فرض کنید A جبر باناخ دلخواه و φ یک همریختی از A بروی $\mathbb{C}$ باشد. A را $\varphi-$ میانگین پذیر درونی

---

[1] $Effros$
[2] $Akeman$
[3] $Kaniuth$
[4] $Markfort$
[5] $Pier$
[6] $Ling$

گوییم هرگاه تابعک خطی کراندار m روی A^* موجود باشد به‌طوری که به ازای هر $a \in A_\varphi$ و $f \in A^*$،

$$m(\varphi) = ۱, \quad m(f.a) = m(a.f).$$

فصول این پایان نامه به شرح زیر است:

در فصل اول به مفاهیم و نمادهایی که در فصول بعدی مورد نیاز است پرداخته و سعی شده است که تنها مواردی که در فصول بعدی نیاز است مورد بررسی و مطالعه قرار گیرد. از آوردن برهان در حد امکان خودداری شده و فرض براین است که خواننده اطلاعات کافی در این زمینه دارد.

فصل ۲، میانگین پذیری، $\varphi-$ میانگین پذیری و کرکتر میانگین پذیری روی جبر باناخ در این فصل تعریف شده و سعی بر این داشتیم که خواننده با این مفاهیم آشنایی لازم را پیدا کند. در بخش آخر این فصل نیز مفهوم میانگین پذیری درونی را روی جبر لائو تعریف و بررسی می‌کنیم. از جمله کتابها و مقالات نوشته شده در این زمینه ها می توان به [۲]، [۹]، [۱۱]، [۱۲]، [۱۹]، [۲۰]، [۲۲] و [۲۴] اشاره کرد.

فصل ۳، در این فصل به بیان مفهوم $\varphi-$ میانگین پذیری درونی روی جبرهای باناخ می‌پردازیم که عنوان و بحث اصلی این پایان نامه خواهد بود. همچنین نشان خواهیم داد که هر جبر باناخ با واحد تقریبی راست کراندار به ازای هر $\varphi \in \triangle(A)$، $\varphi-$ میانگین پذیر درونی است و یکی از نتایج این فصل این خواهد بود که هر جبر باناخ میانگین پذیر، $\varphi-$ میانگین پذیر درونی است. اکثر مطالب این فصل از مقاله[۱۰] گرفته شده است.

فصل ۴، در فصل آخر $\varphi-$ میانگین پذیری درونی را روی جبرهای باناخ خاص $A\hat{\otimes}B$، $A \times_\theta B$ و $A \oplus X$ بررسی و شرط لازم و کافی برای $\varphi-$ میانگین پذیری درونی آن‌ها را بیان می‌کنیم. در این فصل از مقالات [۴] و [۲۱] استفاده شده است.

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

هدف از این فصل معرفی نمادها و اثبات بعضی قضایای مقدماتی است که در فصول بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند. سعی شده است که از آوردن برهان‌ها برای بعضی از قضایا خودداری شود. قضایای مهم جهت یادآوری برای خواننده ارائه کرده‌ایم. برای دیدن اثبات آنها خواننده می تواند به منابع ذکر شده در انتهای پایان‌نامه مراجعه کند. در این فصل ابتدا به بیان فضاهای توپولوژیک و فضاهای برداری توپولوژیک پرداخته و کوچکترین توپولوژی را روی X^* که با آن توپولوژی همه عناصر X^* پیوسته هستند را تعریف می‌کنیم. در بخش آخر این فصل نیز مقدماتی را برای مطالعه در زمینه جبرهای باناخ فراهم خواهیم کرد.

۲.۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۲.۱ تابع $||.|| : X \to \mathbb{R}$ یک نرم روی فضای برداری X است، هرگاه

۱) برای هر $x \in X$، $||x|| > \circ$ و $||x|| = \circ$ اگر و تنها اگر $x = \circ$،

۲) برای هر $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{C}$، $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$،

۳) برای هر $y, x \in X$، $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.

در این صورت $(X, ||.||)$ را یک فضای نرمدار گوییم.

هر گاه X با متر $d(x,y) = \|x-y\|$ یک فضای متریک کامل باشد، در این صورت به آن یک فضای باناخ گوییم.

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنیم $\preceq$ رابطه ای روی D باشد، $(D, \preceq)$ را جهت دار شده گوییم هرگاه:

۱) $\preceq$ انعکاسی باشد؛

۲) $\preceq$ متعدی باشد؛

۳) برای هر α و β از D، $\gamma \in D$ ای موجود باشد که $\alpha \preceq \gamma$ و $\beta \preceq \gamma$. هر تابع از مجموعه جهتدار شده D بتوی یک فضای توپولوژیک، یک تور نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنید X یک فضای برداری و τ یک توپولوژی روی X باشد. X را یک فضای برداری توپولوژیک گوییم هرگاه

۱) هر تک نقطه‌ای بسته باشد.

۲) اعمال فضای برداری پیوسته باشند.

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیک باشد. X را محدب موضعی گوییم، هرگاه صفر دارای پایه‌ای موضعی باشد که هر عضوش محدب است.

یکی از مهمترین موضوعات در این قسمت این است که یک خانواده از شبه نرم‌های جداکننده نقاط، یک فضای برداری توپولوژیک محدب موضعی مشخص خواهد کرد که ما در اینجا به بررسی این موضوع می‌پردازیم. ابتدا تعریف شبه نرم را بیان خواهیم‌کرد.

تعریف ۵.۲.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری باشد. نگاشت $p : X \to \mathbb{R}$ را شبه نرم گوییم هرگاه برای هر $x, y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{C}$، ۱) $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$.

۲) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$.

تعریف ۶.۲.۱ فرض کنید X فضای برداری و A زیر مجموعه‌ای از X باشد. A را موزون گوییم هرگاه برای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ که $|\alpha| \leq 1$، $\alpha A \subseteq A$.

تعریف ۷.۲.۱ فرض کنید ρ یک خانواده از شبه نرم‌ها روی فضای برداری X باشد. خانواده ρ از شبه نرم ها را جداکننده گوییم، هرگاه برای هر $x \in X \neq 0$ یک $p \in \rho$ موجود باشد که $p(x) \neq 0$.

قضیه ۸.۲.۱ فرض کنید ρ یک خانواده از شبه نرم‌های جدا کننده نقاط روی X باشد. برای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر $p \in P$ قرار می‌دهیم $V(p,n) = \{x;\ p(x) < \frac{1}{n}\}$ در آن صورت $B = \{\cap_{i=1}^{n} V(p_i, n_i);\ n \in \mathbb{N},\ n_i \in \mathbb{N},\ p_i \in \rho\}$ یک پایه محدب موضعی برای یک توپولوژی روی X است و X با این توپولوژی یک فضای برداری توپولوژیک است.

برهان: به قضیه ۳۷.۱ از مرجع [۲۵] رجوع شود. □

تعریف ۹.۲.۱ یک جبر مختلط، یک فضای برداری A همراه با یک ضرب روی A است که این ضرب در خواص زیر صدق می کند:

۱) برای هر $x,y,z \in A$، $x(yz) = (xy)z$، $x(y+z) = xy + xz$ و $(x+y)z = xz + yz$.

۲) برای هر $x,y \in A$ و $\alpha \in \mathbb{C}$، $\alpha(xy) = (\alpha x)y$.

تعریف ۱۰.۲.۱ جبر A روی میدان $\mathbb{C}$ را یک جبر نرمدار گوییم، هرگاه A به عنوان یک فضای برداری نرمدار با نرم $\|.\|$ به ازای هر $x,y \in A$، در شرط زیر صدق کند:

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|.$$

تعریف ۱۱.۲.۱ فرض کنید A یک جبر مختلط و φ تابعک خطی غیر صفر روی A باشد. φ را یک همریختی روی A گوییم هرگاه برای هر $x, y \in A$، $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.

قضیه ۱۲.۲.۱ فرض کنید M یک ایده‌آل از هم بعد یک در جبر مختلط A باشد. به ازای $\varphi \in \triangle(A)$ی، $M = \ker \varphi$ یا $A^۲ \subseteq M$.

برهان: به قضیه ۳۷.۳.۱ از مرجع [۳] مراجعه شود. □

تعریف ۱۳.۲.۱ فرض کنید X، Y و Z سه فضای برداری و $B : X \times Y \to Z$ یک نگاشت باشد. برای هر $x \in X$ و $y \in Y$، نگاشت‌های $B_x : Y \to Z$ و $B^y : X \to Z$ را با ضابطه‌های $B_x(y) = B(x, y) = B^y(x)$ تعریف می‌کنیم. B را دو خطی گوییم هر گاه B_x و B^y خطی باشند.

تعریف ۱۴.۲.۱ فرض کنید X و Y دو فضای نرمدار باشند. تبدیل خطی پیوسته $T : X \to Y$ را در نظر می‌گیریم. تعریف می‌کنیم

$$||T|| = \sup\{||T(x)||;\ ||x|| \leq ۱\}.$$

به سادگی می‌توان دید که $||.||$ یک نرم روی فضای همه تبدیلات خطی پیوسته از X به Y است. مجموعه همه تبدیلات خطی پیوسته از X به Y را با نماد $B(X, Y)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۵.۲.۱ $BL(X, \mathbb{C})$ را با X^* نمایش داده و آنرا دوگان X می‌نامیم. در واقع X^* فضای برداری متشکل از همه تابعک‌های خطی پیوسته روی X است.

تعریف ۱۶.۲.۱ فرض کنید X و Y دو فضای باناخ و $f : X \to Y$ خطی و پوشا باشد. f را یکریختی طولپا گوییم هرگاه برای هر $x \in X$، $||f(x)|| = ||x||$.

تعریف ۱۷.۲.۱ فرض کنید A یک جبر نرمدار باشد. تور $\{e_\alpha\}_{\alpha \in D}$ (D مجموعه جهت دار شده است.) را یک واحد تقریبی چپ گوییم هرگاه برای هر $x \in A$، $e_\alpha x \to x$.

واحد تقریبی چپ $\{e_\alpha\}_{\alpha\in D}$ در A را کراندار گوییم هرگاه عدد ثابت مثبت k موجود باشد که برای هر $\alpha \in D$، $\|e_\alpha\| \leq k$.

به همین صورت واحد تقریبی راست و واحد تقریبی راست کراندار تعریف می شود. واحد تقریبی راست و چپ کراندار را یک واحد تقریبی کراندار گوییم.

۳.۱ توپولوژی ضعیف و توپولوژی ضعیف ستاره

فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیک و نیز X^* فضای برداری متشکل از همه تابعک های خطی پیوسته روی X باشد. می‌دانیم با توپولوژی موجود روی X همه عناصر X^* پیوسته هستند. سوال این است که ارتباط بین این توپولوژی و کوچکترین توپولوژی روی X که همه عناصر X^* پیوسته هستند، چیست؟ توپولوژی اخیر را توپولوژی ضعیف روی X نامیم و بدین شکل تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیک و X^* نقاط X را جدا کند. کوچکترین توپولوژی روی X که همه اعضای X^* پیوسته هستند را توپولوژی ضعیف روی X می گوییم و با نماد τ_w نمایش می‌دهیم.

گزاره ۲.۳.۱ فرض کنید X فضای برداری توپولوژیکی باشد که X^* نقاط X را جدا کند. دنباله $\{x_n\}$ در X به عنصری چون x در توپولوژی ضعیف همگراست اگر و فقط اگر برای هر $\Lambda \in X^*$، $\Lambda(x_n) \to \Lambda(x)$.

برهان: به بخش ۱۱.۳ از [۲۵] رجوع شود. □

قضیه ۳.۳.۱ اگر $E \subseteq X$ محدب و X یک فضای برداری توپولوژیک محدب موضعی باشد آن‌گاه $\overline{E}^w = \overline{E}$ که در آن $\overline{E}^w$ بستار E نسبت به توپولوژی ضعیف است.

برهان: به قضیه ۱۲.۳ از [۲۵] رجوع شود. □

اکنون یک توپولوژی روی دوگان X قرار می‌دهیم که از توپولوژی اولیه روی X^* ضعیف تر باشد. فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیک و X^* دوگان X باشد. برای هر $x \in X$، نگاشت

$\hat{x}: X^* \to \mathbb{C}$ را با ضابطه $\hat{x}(\Lambda) = \Lambda(x)$ تعریف می‌کنیم. قرار می‌دهیم

$$(X^*)' = \{\hat{x};\ x \in X\}.$$

اگر $\Lambda_۲ \neq \Lambda_۱$، پس $x \in X$ موجود است که $\Lambda_۲(x) \neq \Lambda_۱(x)$. پس $\hat{x}(\Lambda_۲) \neq \hat{x}(\Lambda_۱)$، لذا $(X^*)'$ نقاط X^* را جدا می‌کند.

تعریف ۴.۳.۱ کوچکترین توپولوژی روی X^* که همه عناصر فضای برداری $(X^*)'$ پیوسته باشند را توپولوژی ضعیف ستاره روی X^* می‌گوییم. متداول است که از نماد $\sigma(X^*, X)$ نیز برای نمایش توپولوژی ضعیف ستاره استفاده شود.

تذکر ۵.۳.۱ توجه کنید که توپولوژی ضعیف ستاره روی X^*، این فضا را به یک فضای برداری توپولوژیک محدب موضعی تبدیل می‌کند. همه تابعک‌های خطی روی X^* که نسبت به توپولوژی ضعیف ستاره پیوسته هستند، دقیقاً به صورت $\{\hat{x};\ \ x \in X\}$ می‌باشند.

قضیه ۶.۳.۱ (باناخ — آلاگلو) [1] اگر X یک فضای برداری توپولوژیک و V یک همسایگی از صفر باشد، در آن صورت

$$K = \{\Lambda \in X^*;\ \forall x \in V\ \ |\Lambda(x)| \leq ۱\}$$

با توپولوژی ضعیف ستاره فشرده است.

برهان: به قضیه ۱۵.۳ از [۲۵] رجوع شود. □

قضیه ۷.۳.۱ (گلدشتاین) [2] فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد. در آن صورت X در X^{**} با توپولوژی ضعیف ستاره چگال است.

برهان: به قضیه $A.۳.۲۹.(i)$ از مرجع [۳] رجوع کنید. □

تعریف ۸.۳.۱ فضای باناخ X را انعکاسی گوییم هرگاه نگاشت $x \mapsto \hat{x}$ تابعی پوشا از X برروی X^{**} باشد.

---
[1] $Banach - Alaoglu$
[2] $Goldstine$

۴.۱ جبر باناخ و ضرب‌های آرنز

در این بخش جبر باناخ را معرفی می‌کنیم و ضرب‌های آرنز اول و دوم روی دوگان دوم جبر باناخ A را بیان می‌کنیم. این ضرب‌ها زمینه را برای مطالعه جبرهای باناخ فراهم می‌سازد.

تعریف ۱.۴.۱ جبر نرمدار A روی میدان $\mathbb{C}$ را یک جبر باناخ گوییم، هرگاه A یک فضای باناخ باشد.

اولین چیزی که در یک جبر باناخ مطرح است این است که آیا این جبر باناخ دارای عضو همانی است؟ آیا این جبر باناخ دارای واحد تقریبی کراندار است؟ از آنجا که جبرگروهی $L^1(G)$ از اهمیت خاصی برخوردار است ما نیز به بررسی این سوالات در مورد آن می‌پردازیم.
یادآوری می کنیم که اگر G یک گروه با یک توپولوژی باشد به طوری که عمل وارون و عمل گروه پیوسته باشد به آن گروه توپولوژیک گوییم. می دانیم هر گروه هاسدورف و فشرده موضعی مانند G دارای یک اندازه هار است که شبیه اندازه لبگ روی $\mathbb{R}$ عمل می‌کند. بنابراین برای هر $1 \leq p \leq \infty$، $L^p(G)$ تعریف می‌شود.

فرض کنیم $\mu \in M(G)$، $\nu \in M_a(G)$ و برای $f \in L^p(G)$ که $1 \leq p \leq \infty$، $d\nu = fd\lambda$. در آن صورت $\mu * f,\ f * \mu \in L^p(G)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mu * f(x) = \int f(y^{-1}x)d\mu(y), \quad f * \mu(x) = \int \Delta(y^{-1})f(xy^{-1})d\mu(y).$$

قضیه ۲.۴.۱ الف) فرض کنیم $f \in L^p(G)$، $1 \leq p < \infty$ و $\epsilon > 0$ داده شده باشد. $M(G)$ را مجموعه همه اندازه های مختلط بورل منظم روی G در نظر می گیریم. در آن صورت همسایگی فشرده نسبی U از e موجود است که برای هر اندازه احتمال $\mu \in M(G)$ که $\mu(U^c) = \{0\}$، $||\mu * f - f||_p < \epsilon$.
ب) یک همسایگی V موجود است که برای هر اندازه احتمال $\mu \in M(G)$ که $\mu(V^c) = \{0\}$، $||f * \mu - f||_p < \epsilon$.

برهان: به قضیه ۲۰.۱۵ از [۸] رجوع شود. □

تذکر ۳.۴.۱ $L^1(G)$ دارای واحد تقریبی است که این واحد تقریبی از اندازه احتمال است.

برهان: قرار دهید $D = \{U :$ باز شامل همانی باشد $U\}$. در آنصورت $(D, \supseteq)$ یک مجموعه جهت دار است. برای هر $U \in D$ که $\lambda(U) < \infty$، قرار می دهیم $Q_U = \frac{\chi_U}{\lambda(U)} \in L^1(G)$. فرض کنیم $A \subseteq D$ مجموعه همه Uهایی باشد که اندازه‌ی آن متناهی است. ثابت می‌کنیم $\{Q_U\}_{U\in A}$ یک واحد تقریبی کراندار برای $L^1(G)$ است. برای این منظور، فرض کنیم $f \in L^1(G)$ و $\epsilon > 0$ نیز داده شده باشد. بنابه قضیه‌ی ۲.۴.۱ یک U_0 باز با اندازه متناهی موجود است که برای هر اندازه احتمال $\mu \in M(G)$ که $\mu(U_0^c) = \{0\}$، $\|f * \mu - f\|_1 < \epsilon$ و $\|\mu * f - f\|_1 < \epsilon$. اگر $U \leq U_0$ آن‌گاه $U \subseteq U_0$. لذا $\|f * Q_U - f\|_1 < \epsilon$ و $\|Q_U * f - f\|_1 < \epsilon$. چون $\|Q_U\|_1 = \int \frac{1}{\lambda(U)}|\chi_U(x)|dx = 1$، پس $\{Q_U\}$ یک واحد تقریبی کراندار از اندازه احتمال برای $L^1(G)$ است. □

گزاره ۴.۴.۱ اگر جبر باناخ A دارای همانی نباشد، قرار می‌دهیم $A_1 = \{(x, \alpha);\ x \in A,\ \alpha \in \mathbb{C}\}$. برای هر عنصر $(x, \alpha), (y, \beta) \in A_1$، تعریف می کنیم $(x, \alpha)(y, \beta) = (xy + \alpha y + \beta x, \alpha\beta)$ و همچنین قرار می‌دهیم $\|(x, \alpha)\| = \|x\| + |\alpha|$. به آسانی دیده می شود که نگاشت $x \longmapsto (x, \alpha)$ یک یکریختی طولپا از A بروی ایده‌آلی از A_1 است. در واقع A در جبر باناخ یکداری قابل نشاندن است.

قضیه ۵.۴.۱ (تجزیه کوهن)[۳] فرض کنید A جبر باناخ دلخواه و دارای واحد تقریبی کراندار برای X باشد و همچنین فرض کنید $z \in X$ و $\delta > 0$. در این صورت $a \in A$ و $y \in X$ چنان موجود است که $z = ay$ و $||z - y|| \leq \delta$

برهان: به قضیه ۱۰.۱۱ از مرجع [۲] رجوع کنید. □

قضیه ۶.۴.۱ فرض کنید A جبر باناخ جابجایی و فرض کنید $\triangle(A)$ مجموعه همه همریختی‌های مختلط از A باشد. در این صورت

۱) هر ایده‌آل ماکزیمال از A هسته یک همریختی مختلط روی A است.

۲) اگر $h \in \triangle(A)$، در آن صورت $\ker h$ ایده‌آل ماکزیمال از A است.

برهان: به بخش ۴.۱۱ از مرجع [۲۵] رجوع شود. □

---

[۳] $Cohne$

تعریف ۷.۴.۱ فرض کنید $\triangle$ مجموعه همه همریختی‌های مختلط روی جبر باناخ جابجایی A باشد. برای هر $x \in A$، تابعک $\hat{x} : \triangle \to \mathbb{C}$ را با ضابطه $\hat{x}(h) = h(x)$ تعریف می‌کنیم. $x \longmapsto \hat{x}$ را تبدیل گلفاند گوییم. قرار می‌دهیم $\hat{A} = \{\hat{x};\ x \in A\}$ و کوچکترین توپولوژی روی $\triangle$ که تحت آن همه عناصر $\hat{A}$ پیوسته است را توپولوژی گلفاند روی $\triangle$ نامیم. بنابراین $\hat{A} \subseteq C(\triangle)$ چون تناظری یک به یک بین همه ایده‌آل‌های ماکزیمال و $\triangle$ وجود دارد، در آن صورت $\triangle$ با توپولوژی گلفاند روی $\triangle$ را فضای ایده‌آل ماکزیمال نامیم.

توجه کنید که رادیکال A، اشتراک همه ایده‌آل‌های ماکزیمال در A بوده که با نماد $radA$ نمایش می‌دهیم. A را نیم‌ساده گوییم هرگاه $radA = \circ$.

قضیه ۸.۴.۱ فرض کنید $\triangle$ فضای ایده‌آل ماکزیمال از جبر باناخ جابجایی A باشد. در این صورت تبدیل گلفاند یک همریختی از A بروی یک زیر جبر $\hat{A}$ از $C(\triangle)$ بوده که هسته آن $radA$ است. تبدیل گلفاند یکریختی است اگر و تنها اگر A نیم‌ساده باشد.

برهان: به قضیه ۹.۱۱ از مرجع [۲۵] رجوع شود. $\square$

تعریف ۹.۴.۱ نگاشت $x \to x^*$ یک برگشت روی جبر A است هرگاه برای هر $x, y \in A$ و $\lambda \in \mathbb{C}$،

۱) $(x+y)^* = x^* + y^*$،

۲) $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$،

۳) $(xy)^* = y^* x^*$،

۴) $x^{**} = x$.

تعریف ۱۰.۴.۱ فرض کنید A یک جبر باناخ با یک برگشت باشد. فرض کنید برای هر $x \in A$، $\|xx^*\| = \|x\|^2$. در این صورت A را یک C^*- جبر گوییم.

تعریف ۱۱.۴.۱ C^*- جبر μ را W^*- جبر نامیم اگر دوگان یک فضای باناخ باشد. در واقع فضای باناخی چون μ_* چنان موجود باشد که $(\mu_*)^* = \mu$.