٨٧/١/٥/١٥٢٦
٨٧/١٠/١٤

بسم الله الرحمن الرحيم

١٥٨٥٥٦

دانشگاه شیراز

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض(جبر)

چند جمله ایهای مثبت روی یک مجموعه غیر فشرده

بوسیله ی:

صمد قوامی

استاد راهنما:

دکتر مهدی ذکاوت

شهریور ماه ۱۳۸۶

به نام خدا

چند جمله ایهای مثبت روی یک مجموعه غیر فشرده

به وسیله ی:

صمد قوامی

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی
از فعالیت های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته ی:

ریاضی محض

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته پایان نامه با درجه: خیلی خوب

دکتر مهدی ذکاوت،استادیاربخش ریاضی(رئیس کمیته) ....

دکتر عبدالرسول عزیزی، استادیاربخش ریاضی ....

دکترشهره نمازی، استادیاربخش ریاضی ....

شهریور ماه ۱۳۸۶

تقدیم به

درگاه پاک و تجلی گاه حیات خداوند دانا و توانا که زیبنده هر ثناست، آنچه داده است بیشتر از شایستگی من است اگر چه در خور بخشندگی اوست.

تقدیم به پدر بزرگوارم:

اسطوره همیشه جاوید داستان زندگی ام، آنکه فروغ گمگشته آرزوهایش را در غرور شکوفایی فرزندانش می نگرد.

تقدیم به مادر مهربانم:

طلایه دار کیش مهرورزی که تفسیر و تفصیل وفاداریش به وصف در نیاید.

تقدیم به همسر وفادارم:

اسطوره صبر و استقامت که کمک هایش همواره گرمابخش وجودم بود.

تقدیم به فرزندانم:

پرنیان و آیدا که نبود مرا در سالهای تحصیلم تحمل کردند.

و تقدیم به

همه انسانهایی که با سوختن خود موجب تنویر اندیشه های دیگران می شوند.

سپاسگزاری

اکنون که این رساله به پایان رسیده است بر خود واجب می دانم که از استاد عزیزم جناب آقای دکتر مهدی ذکاوت که همچون پدری مهربان و معلمی دلسوز با راهنمایی های خود چراغ راه من بودند تشکر و قدردانی نمایم و نیز از اساتید مشاور جناب آقای دکترعبدالرسول عزیزی و سرکار خانم دکتر شهره نمازی و نماینده محترم تحصیلات تکمیلی جناب آقای دکتر شیر دره و دیگر اساتید محترم بخش ریاضی از جمله آقای دکتر شریف، آقای دکتر ارشاد و آقای دکتر اسلام زاده کمال تشکر و امتنان را دارم.

همچنین از بهترین سرمایه های زندگی ام خانواده بزرگوارم، فرزندان دوست داشتنی ام و بویژه همسرگرامی ام که همواره مشوق من بودند از صمیم قلب تشکر و قدر دانی می نمایم.

در پایان از دوست عزیزم جناب آقای دکتر رسول مجرد و تمام عزیزانی که مرا یاری نموده اند سپاسگذارم.

چکیده

چند جمله ایهای مثبت روی یک مجموعه غیر فشرده

به وسیله ی:

صمد قوامی

هدف از این پایان نامه بیان تعمیمی از قضیه پوزیتیوستلنساتز ارشمیدسی می باشد که برای هر مجموعه نیمه جبری بسته اساسی در R^n در حالت فشرده یا غیر فشرده صادق است. اثبات یک توسیع از اثبات Wörman می باشد. همچنین ترتیب روی میدان و ترتیب روی حلقه بررسی می شود.

به علاوه الگوریتمی برای نمایش یک جمع از مربعات چند جمله ای حقیقی مثبت متناظر با یک ماتریس حقیقی متقارن و مثبت تعریف شده که درایه های آن در یک معادله خطی مشخص صدق می کنند ار ائه می شود.

فهرست مطالب

فصل اول

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱- تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل پس از مقدمه، اهداف کلی پایان نامه آورده می‌شود. با این وصف که مفاهیم حلقه، میدان‌های بسته حقیقی و مجموعه‌های جبری و نیمه جبری دانسته فرض می شود. در پایان این فصل تعاریف و قضایای مقدماتی که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند بیان می گردد.

۱-۱ مقدمه

در سراسر این پایان نامه A یک حلقه جابجایی و یکدار است و همواره $Q \subseteq A$ (Q حلقه اعداد گویا). این پایان نامه از مراجع [۹]، [۱۴] و [۱۶] برگرفته شده است.

یادآوری می کنیم که مجموعه $\{a \in \boldsymbol{R}^n | f(a) = 0, \forall f \in B\}$ که درآن $B \subseteq \boldsymbol{R}[x_1, \cdots, x_n]$ است را یک مجموعه جبری از $\boldsymbol{R}^n$ گویند. همچنین زیر مجموعه های نیمه جبری $\boldsymbol{R}^n$ کوچکترین خانواده از زیر مجموعه هایی اند که شامل تمام مجموعه های $\{a \in \boldsymbol{R}^n | f(a) > 0\}$ جائیکه $f \in \boldsymbol{R}[x_1, \cdots, x_n]$ هستند و نسبت به اشتراک متناهی، اجتماع متناهی و مکمل گیری بسته اند.

فرض کنید V یک مجموعه جبری $\boldsymbol{R}^n$ باشد. حلقه همه توابع چند جمله‌ای $f : V \rightarrow \boldsymbol{R}$ را حلقه مختصات V گویند و با نماد $\boldsymbol{R}[V]$ نمایش داده می‌شود. $\boldsymbol{R}[V]$ به عنوان یک $\boldsymbol{R}-$ جبر بوسیله $x_1, x_2, \ldots, x_n$ تولید می‌شود جائیکه هر $x_i : V \rightarrow \boldsymbol{R}$ نمایش تابع $i-$ امین مولفه است.

برای هر زیر مجموعه متناهی $S = \{f_1, \ldots, f_r\}$ از $\boldsymbol{R}[V]$ فرض کنید $K = K_S$ یک مجموعه نیمه جبری بسته اساسی در V باشد که بوسیله r نامعادله $f_i \geq 0$ ، $i = 1, \ldots, n$ تعریف می‌شود یعنی $K = \{a \in V | f_1(a) \geq 0, \ldots, f_r(a) \geq 0\}$.

همچنین فرض کنید $T = T_S$ نمایش یک شبه ترتیب از $\boldsymbol{R}[V]$ باشد که توسط $f_1, \ldots, f_r$ تولید می‌شود یعنی مجموعه همه توابع به فرم $f = \sum_{e \in \{0,1\}^r} h_e f_1^{e_1} \ldots f_r^{e_r}$ می‌باشد که در آن $e = (e_1, \cdots, e_r)$ و هر h_e یک جمع از مربعات در $\boldsymbol{R}[V]$ است.

به طور مشابه شبه اول تولید شده توسط $f_1,\dots,f_r$ مجموعه همه توابع به فرم $f = \sum_{i\in\{0,1\}^r} a_i f_1^{i_1}\dots f_r^{i_r}$ می باشد جائیکه $i=(i_1,\cdots,i_r)\in \mathbb{N}^r$ و $a_i \in \mathbb{Q}^+$ است.

قضیه. ۱. ۱. (اشمادگن) فرض کنید S یک زیر مجموعه متناهی از $\mathbb{R}[V]$ و K_S فشرده باشد. در این صورت برای $f\in \mathbb{R}[V]$ اگر $f>0$ روی K_S آنگاه $f\in T_S$.

اثبات. (3.1) از $[12]$. ■

اشمادگن در $[12]$ یک اثبات به روش آنالیز تابعی ارائه داد و لی Wörman یک اثبات جبری برای قضیه فوق ارائه داد که در آخر فصل این اثبات آورده می شود.

مثال ۱. ۲. فرض کنید $A=\mathbb{R}[x]$، T شبه ترتیب تولید شده توسط $1-x^4$ باشد. در این صورت $K=\{a\in\mathbb{R}\,|\,1-a^4\geq 0\}=\{a\,|\,a^4\leq 1\}=[-1,1]$ فشرده است. چون $2-x^2>0$ روی K، لذا طبق قضیه اشمادگن، $2-x^2\in T$. لذا $2-x^2=h_1+h_2(1-x^4)$ جائیکه $h_2=1$ و $h_1=\left(\frac{1}{2}-x^2\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

مثال ۱. ۳. فرض کنید $A=\mathbb{R}[x,y]$ و $T=<1-x,1-y,x,y>$ یک شبه ترتیب از A باشد. در این صورت

$$K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,1-x\geq 0,1-y\geq 0,x\geq 0,y\geq 0\}=\{(x,y)\,|\,0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 1\}$$

فشرده است. واضح است که $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-y^2>0$ روی K. لذا $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-y^2\in T$ و

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-y^2=(1-x)^2+y(1-y)+\left(\sqrt{3}\right)^2(1-x)+(1-y)+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$

لم ۱. ۴. فرض کنید $f\in\mathbb{R}[V]$ و K فشرده باشد. در این صورت اگر $f>0$ روی K، آنگاه عدد صحیح $N\geq 1$ وجود دارد به قسمی که $f>\frac{1}{N}$.

اثبات. (برهان خلف) فرض کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$ یک $x_n \in K$ موجود باشد به قسمی که $f(x_n) \le \frac{1}{n}$. دنباله $\{x_n\}$ از K را در نظر می گیریم. چون K فشرده است پس زیر دنباله $\{x_{n_k}\}$ از $\{x_n\}$ وجود دارد به طوری که به عضوی از K مانند $x_\circ$ همگراست یعنی $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_\circ$. لذا $\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x_\circ)$. اما $\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) \le \lim_{k \to \infty} \frac{1}{n_k} = \circ$ پس $f(x_\circ) \le \circ$ و این تناقض است. ■

قضیه ۱. ۵. با مفروضات قضیه اشمادگن برای هر $f \in \mathbb{R}[V]$ موارد زیر با هم معادلند:

(۱) اگر $f > \circ$ روی K، آنگاه $f \in T$.

(۲) اگر $f \ge \circ$ روی K، آنگاه $f + \varepsilon \in T$ برای هر عدد گویای $\varepsilon > \circ$.

اثبات. (۱) $\Leftarrow$(۲) فرض کنید $f \ge \circ$ روی K در این صورت $f + \varepsilon > \circ$ برای هر عدد گویای $\varepsilon > \circ$. بنابراین $f + \varepsilon \in T$.

(۲) $\Leftarrow$(۱) فرض کنید $f > \circ$ روی K در این صورت طبق لم قبل عدد صحیح $N \ge 1$ وجود دارد به قسمی که $f > \frac{1}{N}$. لذا $f - \frac{1}{N} > \circ$ و طبق (۲)، $f - \frac{1}{N} + \varepsilon \in T$ برای هر عدد گویای $\varepsilon > \circ$. قرار دهید $\varepsilon = \frac{1}{N}$. بنابراین $f = f - \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \in T$. ■

لم ۱. ۶. برای هر $f \in \mathbb{R}[V]$، اگر $f + \varepsilon \in T$ برای هر عدد گویای $\varepsilon > \circ$، آنگاه $f \ge \circ$ روی K.

اثبات. فرض کنید یک $x_\circ \in K$ وجود داشته باشد به قسمی که $f(x_\circ) < \circ$. در این صورت $\varepsilon > \circ$ وجود دارد به طوری که $f(x_\circ) < -\varepsilon$. لذا $f(x_\circ) + \varepsilon < \circ$. اما $f(x_\circ) + \varepsilon \in T$. بنابراین

$$f(x_\circ) + \varepsilon = \sum_{e \in \{\circ,1\}^r} h_e^2 f_1^{e_1}(x_\circ) \cdots f_r^{e_r}(x_\circ) \ge \circ$$

و این تناقض است. ■

طبق قضیه ۱. ۵ و لم فوق معادل قضیه اشمادگن به صورت زیر می باشد که ما به عنوان پوزیتیوستلنساتز ارشمیدسی از آن نام می‌بریم.

برای هر $f \in \mathbb{R}[V]$، $f \ge \circ$ روی K اگر و فقط اگر $f + \varepsilon \in T$ برای هر عدد گویای $\varepsilon > \circ$.

قضیه ۱. ۷. (پوزیتیوستلنساتز) فرض کنید S یک زیر مجموعه متناهی از $R[V]$ و $K=K_S$ و $T=T_S$ همان مجموعه‌های از قبل تعریف شده باشند. در این صورت برای هر $f\in R[V]$، $f>0$ روی K اگر و فقط اگر عناصر $s,t\in T$ موجود باشند به قسمی که $(1+s)f=1+t$.

اثبات. (۷. ۵) از [۷]. ■

مفروضات قضیه اشمادگن قویتر است زیرا در پوزیتیوستلنساتز، K لزوماً فشرده نیست.

اگر K فشرده و $0<f$ روی K باشد، آنگاه طبق فشردگی K عدد صحیح $N\geq 1$ وجود دارد به قسمی که $f>\frac{1}{N}$ روی K. بنابراین $f-\frac{1}{N}>0$ روی K لذا طبق قضیه اشمادگن، $f-\frac{1}{N}\in T$، در نتیجه $Nf=1+N\left(f-\frac{1}{N}\right)\in 1+T$ اما $N=(N-1)+1$ و $N-1\in T$. این مطلب نشان می‌دهد که نتیجه گیری در قضیه اشمادگن قویتر است.

۱-۲ اهداف کلی پایان نامه

در این پایان نامه بعد از بیان پوزیتیوستلنساتز ارشمیدسی و ارائه مثال‌هایی از آن، این قضیه را تعمیم می دهیم. همچنین ترتیب روی میدان (یاد آوری از هندسه جبری حقیقی) و ترتیب روی حلقه را مورد بررسی قرار می دهیم.

در فصل دوم ابتدا ماتریس گرام را معرفی کرده و سپس نشان می‌دهیم که اگر $f\in R[x_1,\dots,x_n]$ یک چند جمله‌ای از درجه $2m$ باشد، آنگاه f یک جمع از مربعات در $R[x_1,\dots,x_n]$ است اگر و فقط اگر ماتریس گرام B موجود باشد به قسمی که $f=\overline{x}.B.\overline{x}^t$ و برای چنین ماتریس B از رتبه ℓ می‌توان f را به صورت مجموع ℓ مربع نمایش داد (۲. ۲).

در واقع در این فصل ما یک الگوریتم ارائه می‌دهیم که نمایش مربعات f را مشخص می‌کند. این الگوریتم نشان می‌دهد که یک جمع از مربعات یک چند جمله‌ای حقیقی متناظر با یک ماتریس حقیقی، متقارن و مثبت تعریف شده می‌باشد که درایه‌های آن در یک معادله خطی مشخص صدق می‌کنند

در فصل سوم ابتدا یک تعمیم از نتیجه ای که در طول اثبات پوزیتوستلنساتز اشمادگن بدست آمد ارائه می‌دهیم. اثبات یک توسیع از اثبات Wörman در [۱۴] و [۱۵] می‌باشد.

ایده این است که تابع ثابت ۱ را به وسیله هر تابع $p\in 1+T$ جایگزین کنیم به شرطی که اعداد صحیح $k,M\geq 0$ وجود داشته باشند به طوریکه $Mp^k\geq \pm x_i$ برای هر $i=1,\dots,n$ روی K برقرار باشد. همچنین نشان داده می‌شود که چنین تابع p همیشه وجود دارد (۳. ۵).

در آخر این فصل یک تعمیم از قضیه Kadison-Dubios را اثبات می‌کنیم و با استفاده از ان پوزیتیوستلنساتز ارشمیدسی را تعمیم داده به طوریکه برای هر مجموعه نیمه جبری بسته اساسی در R^n در حالت فشرده و یا غیر فشرده برقرار است. در واقع برای تابع p که وجود آن ثابت می شود داریم $f \geq ٠$ روی K اگر و فقط اگر عدد صحیح m موجود باشد به قسمی که به ازای هر عدد گویای $\varepsilon > ٠$ یک عدد صحیح $\ell \geq ٠$ وجود دارد به طوریکه $p^{\ell}\left(f + \varepsilon p^{m}\right) \in T$ (۳. ۱۳).

اگر K فشرده باشد آنگاه p=۱ در نظر می‌گیریم و این دقیقاً همان پوزیتیوستلنساتز ارشمیدسی است.

۱-۳ تعاریف و نمادها

در این بخش به معرقی نمادها و تعاریف پرداخته و قضایا و لم هایی که مکرراً مورد استفاده قرار می‌گیرند، بیان می‌شود.

یادآوری می کنیم که یک ترتیب روی میدان F یک رابطه ترتیب کلی $(\leq)$است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) برای هر $x, y, z \in F$ اگر $x \leq y$، آنگاه $x + z \leq y + z$.

۲) برای هر $x, y \in F$ اگر $٠ \leq x$ و $٠ \leq y$، آنگاه $٠ \leq xy$.

منظور از میدان مرتب $(F, \leq)$ ، یک میدان F مجهز به ترتیب $\leq$ است.

دقت کنید که $x \leq y$ با $y \geq x$ معادل است. به علاوه داریم $x \geq ٠ \Leftrightarrow (-x) \leq ٠$.

تعریف ۱. ۸. زیر مجموعه P از میدان F را یک مخروط برای F گویند هرگاه $P + P \subseteq P$ ،$PP \subseteq P$ و برای هر $x \in F$ ،$x^{۲} \in P$. به علاوه اگر $-۱ \notin P$، آنگاه مخروط P را محض گویند.

مثال ۱. ۹. فرض کنید $(F, \leq)$ یک میدان مرتب باشد. به سادگی دیده می شود که مجموعه $P = \{x \in F | x \geq ٠\}$ یک مخروط از Fاست و مخروط مثبت F نظیر ترتیب $\leq$ نامیده می شود.

تعریف ۱. ۱۰. مخروط محض P را یک ترتیب روی F نامند هرگاه داشته باشیم: $P \bigcup -P = F$ و $P \bigcap -P = \{٠\}$ جائیکه $-P = \{x \in F | -x \in P\}$.

قضیه ۱. ۱۱. تعریف فوق با تعریف ترتیب $\leq$ روی $(F, \leq)$ معادل است.

اثبات. فرض کنید $(F, \leq)$ یک میدان مرتب باشد. در این صورت مخروط مثبت P از $(F, \leq)$ یک ترتیب رویF است. زیرا اولاً $-۱ \notin P$. همچنین اگر $x \in P \bigcap -P$ ، آنگاه $x \in P$ و $x \in -P$. در نتیجه $x = ٠$ یعنی $P \bigcap -P = \{٠\}$.

داریم $P \bigcup -P \subseteq F$. ثابت می کنیم که $F \subseteq P \bigcup -P$.

فرض کنید $x\in F$. در این صورت $x\in P$ یا $x\notin P$. حال اگر $x\in P$ ، آنگاه $x\in P\bigcup -P$ و اگر $x\notin P$، آنگاه $x<0$. درنتیجه $-x>0$ لذا $-x\in P$.یعنی $x\in -P$. بنابراین $x\in P\bigcup -P$.
درنتیجه P یک ترتیب روی F است.

برعکس فرض کنید زیر مجموعه $P\subseteq F$ یک ترتیب روی F باشد. در این صورت F به صورت زیر مرتب می شود: برای هر $x,y\in F$، $x\leq y \Leftrightarrow y-x\in P$.

ابتدا نشان می دهیم که رابطه فوق یک رابطه ترتیب کلی است.

فرض کنید $x,y,z\in F$. در این صورت $y-x\in F=P\bigcup -P$. لذا $y-x\in P$ یا $x-y\in P$. بنابراین $y\leq x$ یا $x\leq y$. به علاوه $x-x=0\in P$ پس $x\leq x$. حال اگر $x\leq y$ و $y\leq x$. آنگاه $y-x\in P$ و $x-y\in P$. در نتیجه $y-x\in P\bigcap -P=\{0\}$. پس $x=y$. نهایتاً اگر $x\leq y$ و $y\leq z$، آنگاه $y-x\in P$ و $z-y\in P$. لذا $z-x=(z-y)+(y-x)\in P$. بنابراین $x\leq z$. از اینرو رابطه یک رابطه ترتیب کلی است. حال دو شرط در تعریف ترتیب روی میدان $(F,\leq)$ را بررسی می کنیم.

فرض کنید $x,y,z\in F$.

(i) اگر $x\leq y$، آنگاه $y-x\in P$. لذا $(y+z)-(z+x)=y-x\in P$. بنابراین $x+z\leq y+z$.

(ii) اگر $0\leq x$ و $0\leq y$ آنگاه $x\in P$ و $y\in P$. درنتیجه $xy\in P$ یعنی $0\leq xy$. بنابراین $(F,\leq)$ یک میدان مرتب است. ■

مثال ۱. ۱۲. روی Q میدان اعداد گویا تنها یک ترتیب وجود دارد.

اثبات. فرض کنید P یک ترتیب دلخواه روی Q است. در این صورت $1=1^2\in P$ و $0=0^2\in P$ و بوسیله استقرا به سادگی دیده می شود که برای هر $n\in N$، $n\in P$. بنابراین برای هر $m,n\in N$ داریم $mn\in P$ و $\left(\frac{1}{n}\right)^2\in P$. در نتیجه $n\left(\frac{1}{n}\right)^2=\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}\in P$ و بنابراین $\frac{m}{n}\in P$. این مطلب نشان می دهد که $P\supseteq\left\{\frac{m}{n}\mid m,n\in N\right\}\bigcup\{0\}$.

حال نشان می دهیم که $P=\left\{\frac{m}{n}\mid m,n\in N\right\}\bigcup\{0\}$.

فرض کنید $W=\left\{\frac{m}{n}\mid m,n\in N\right\}\bigcup\{0\}$. در نتیجه $W\subseteq P$. نشان می دهیم $P\subseteq W$. اگر $x\in P$ پس $x=\frac{m}{n}$ جائیکه $n\in N, m\in Z$.

حالت اول: اگر $m=0$، آنگاه $x=0$. لذا $x\in W$.

حالت دوم: اگر $m\in \mathbb{N}$، آنگاه طبق توضیحات قبل $x\in W$.

حالت سوم: اگر $m\notin \mathbb{N}$ و $m\neq 0$، آنگاه $-m\in \mathbb{N}$. لذا $\frac{-m}{n}\in P$. حال اگر $\frac{m}{n}\in P$، آنگاه $\frac{n}{m}\in P$ و در نتیجه $\left(\frac{-m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right)\in P$ یعنی $-1\in P$ و این تناقض است. در نتیجه حالت سوم اتفاق نمی افتد یعنی $x\in W$. ■

لم ۱. ۱۳. فرض کنید P یک مخروط محض از میدان F باشد. در این صورت موارد زیر برقرارند:

(i) اگر $a\in F$ و $-a\notin P$، آنگاه $P[a]=\{x+ay|x,y\in F\}$ یک مخروط محض از F است.

(ii) مخروط محض P در یک مخروط مثبت از یک ترتیب روی F قرار دارد.

اثبات. $(۷.۱.۱)$ از $[۵]$. ■

قضیه ۱. ۱۴. فرض کنید که F یک میدان است. در این صورت موراد زیر معادلند:

(i) F ترتیب پذیر است.

(ii) F دارای یک مخروط محض است.

(iii) $-1\notin \sum F^2$.

(iv) برای هر $x_1,\ldots,x_n\in F$ اگر $\sum_{i=1}^{n} x_i^2=0$ آنگاه $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$.

اثبات. $(۸.۱.۱)$ از $[۵]$. ■

هر میدان F که در خو اص قضیه فوق صدق کند یک میدان حقیقی می‌نامیم.

تعریف ۱. ۱۵. هر میدان حقیقی F که هیچ توسیع جبری حقیقی نداشته باشد را میدان بسته حقیقی نامند.

مثال ۱. ۱۶. میدان $\mathbb{R}$ (اعداد حقیقی) تنها یک ترتیب دارد زیرا هر میدان بسته حقیقی تنها یک ترتیب دارد و $\mathbb{R}$ نیز چنین است.

تعریف ۱. ۱۷. ایده آل I از A حقیقی گویند هر گاه به ازای هر $a_1,\ldots,a_n\in A$ به طوری که $\sum_{i=1}^{n} a_i^2\in I$ داشته باشیم $a_i\in I$ برای هر $i=1,\cdots,n$.

لم ۱. ۱۸. فرض کنید I یک ایده آل حقیقی از A باشد. در این صورت ایده آل I رادیکال است.

اثبات. باید ثابت کنیم که $I=r(I)$ جائیکه $r(I)=\{a\in A \mid \exists n\in \mathbb{N}\ s.t\ a^n\in I\}$. واضح است که $I\subseteq r(I)$. فرض کنید $a\in r(I)$. در این صورت عدد صحیح $n>۱$ وجود دارد به طوری که $a^n\in I$. حال اگر n زوج باشد آنگاه $(a^{\frac{n}{۲}})^۲=a^n\in I$ و چون I حقیقی است لذا $a^{\frac{n}{۲}}\in I$. به طور مشابه اگر n فرد باشد آنگاه $a^{\frac{n+۱}{۲}}\in I$. در هر دو مورد توان a کاهش پیدا می کند پس با ادامه این روش به دست میآوریم $a\in I$. بنابراین $r(I)\subseteq I$ در نتیجه I رادیکال است. ■

توجه کنید که طبق لم قبل هر ایده آل حقیقی I رادیکال و بنابراین اول است. پس $\frac{A}{I}$ یک دامنه صحیح است.

قضیه ۱. ۱۹. ایده آل اول I از A حقیقی است اگر و تنها اگر میدان کسرهای $\frac{A}{I}$ حقیقی باشد.

اثبات. $\Leftarrow$) فرض کنید I ایده آل اول حقیقی باشد و $\sum_{i=۱}^{n}\overline{a}_i^۲=I$ جائیکه $\overline{a}_i=a_i+I$ برای هر $a_i\in A$ و $i=۱,\ldots,n$. در این صورت $\sum_{i=۱}^{n}a_i^۲+I=I$. لذا $\sum_{i=۱}^{n}a_i^۲\in I$ و از آنجا که I حقیقی است داریم $a_i\in I$ برای هر $i=۱,\ldots,n$. بنابراین $a_i+I=I$. بنابراین $\frac{A}{I}$ حقیقی است.

$\Rightarrow$) فرض کنید میدان $\frac{A}{I}$ حقیقی و $\sum_{i=۱}^{n}a_i^۲\in I$ جائیکه $a_i\in A$ $(۱\le i\le n)$. در این صورت $\sum_{i=۱}^{n}a_i^۲+I=I$ در نتیجه $\sum_{i=۱}^{n}(a_i+I)^۲=I$ و طبق قسمت چهارم قضیه ۱. ۱۴، $a_i+I=I$ یعنی $a_i\in I$ و I حقیقی است. ■

تعریف ۱. ۲۰. زیر مجموعه $P\subseteq A$ را یک ترتیب از حلقه A نامند هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $PP\subseteq P,\ P+P\subseteq P$.

(۲) $P\bigcup -P=A$.

(۳) $P\bigcap -P$ یک ایده آل اول از A باشد جائیکه $-P=\{a\in A \mid -a\in P\}$.

نتیجه ۱. ۲۱. فرض کنید P یک ترتیب از A باشد. در این صورت موارد زیر برقرارند:

(i) برای هر $a\in A$، $a^{۲}\in P$.
(ii) $-۱\notin P$.

اثبات. (i) فرض کنید $a\in A$. در این صورت $a\in P$ یا $a\in -P$. حال اگر $a\in P$، آنگاه $a^{۲}\in P$ و اگر $a\in -P$ آنگاه $-a\in P$ لذا $a^{۲}=(-a)(-a)\in P$.

(ii) فرض کنید $-۱\in P$. در این صورت $۱\in -P$ و از طرفی $۱=۱^{۲}\in P$. بنابراین $۱\in P\bigcap -P$ و این تناقض است زیرا $P\bigcap -P$ یک ایده آل اول A می‌باشد. ■

مثال ۱. ۲۲. فرض کنید $A=R[x]$. در این صورت $P=\{f\in A|f(۰)\geq ۰\}$ یک ترتیب از Aاست. زیرا به وضوح $PP\subseteq P, P+P\subseteq P$ و از آنجا که $-P=\{f\in A|f(۰)\leq ۰\}$، لذا $P\bigcup -P=A$. به علاوه اگر $f\in P\bigcap -P$ آنگاه $f(۰)=۰$. لذا $f\in <x>$ و برعکس. بنابراین $P\bigcap -P=<x>$ یک ایده آل اول از A می‌باشد. یعنی P یک ترتیب روی A است.

لم ۱. ۲۳. اگر $\varphi: A\to B$ همریختی حلقه‌ای و P یک ترتیب از B باشد آنگاه $\varphi^{-۱}(P)$ ترتیب از Aاست.

اثبات. فرض کنید $a_۱,a_۲\in \varphi^{-۱}(P)$. در این صورت $\varphi(a_۱),\varphi(a_۲)\in P$. چون P یک ترتیب است پس $\varphi(a_۱)+\varphi(a_۲)\in P$ و $\varphi(a_۱)\varphi(a_۲)\in P$. از طرفی φ همریختی حلقه ای است لذا $\varphi(a_۱+a_۲)\in P$ و $\varphi(a_۱a_۲)\in P$. در نتیجه $a_۱+a_۲\in\varphi^{-۱}(P)$ و $a_۱a_۲\in\varphi^{-۱}(P)$ این. نشان می دهد که $\varphi^{-۱}(P)$ نسبت به جمع و ضرب بسته است.

همچنین به طور واضح $\varphi^{-۱}(P)\bigcup -\varphi^{-۱}(P)=A$. از طرفی نقش معکوس یک ایده آل اول B یک ایده آل اول از A می باشد و چون $\varphi^{-۱}(P\bigcap -P)=\varphi^{-۱}(P)\bigcap -\varphi^{-۱}(P)$ و $P\bigcap -P$ یک ایده آل اول B است و پس نتیجه حاصل می‌شود. ■

تعریف ۱. ۲۴. زیر مجموعه T از A را یک شبه ترتیب نامند هر گاه داشته باشیم: $T+T\subseteq T$، $TT\subseteq T$ و برای هر $a\in A$، $a^{۲}\in T$.

به سادگی دیده می شود که ترتیب P از A یک شبه ترتیب از A است به قسمی که $P\bigcup -P=A$ و $P\bigcap -P$ یک ایده آل اول از A می باشد.

مثال ۱. ۲۵. (a) مجموعه P در مثال ۱. ۲۲ یک شبه ترتیب از A می باشد..

(b) اشتراک یک خانواده دلخواه از شبه ترتیب‌های A یک شبه ترتیب از A می‌باشد.

(c) مجموع مربعات عناصر A را با $\sum A^{2}$ نمایش می دهیم یعنی

$\sum A^{2}=\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^{2} \middle| a_i \in A, 1 \le i \le n\right\}$. واضح است که $\sum A^{2}$ کوچکترین شبه ترتیب می‌باشد یا به عبارتی دیگر $\sum A^{2}$ در هر شبه ترتیب از A قرار دارد زیرا $a^{2} \in T, \forall a \in A$ برای هر شبه ترتیب دلخواه از A.

لم ۱. ۲۶. اگر T یک شبه ترتیب از A باشد آنگاه $A=T-T$.

اثبات. برای هر $a \in A$ داریم $a=\frac{1}{2}(a+1)^{2}-\frac{1}{2}\left(a^{2}+1\right)$ و نتیجه حاصل می‌شود. ■

نتیجه ۱. ۲۷. فرض کنید T یک شبه ترتیب از A باشد. در این صورت اگر $-1 \in T$، آنگاه $A=T$.

اثبات. چون $-1 \in T$، پس $T=(-T)$. لذا طبق لم قبل
$A=T-T=T+(-T)=T+T \subseteq T$ و بنابراین $A=T$. ■
توجه کنید که طبق نتیجه قبل اگر T یک شبه ترتیب محض از A باشد آنگاه $-1 \notin T$.

تعریف ۱. ۲۸. مجموعه همه ترتیب های A را یک طیف حقیقی A گویند و با نماد $Sper(A)$ نمایش داده می‌شود و برای شبه ترتیب T از A مجموعه همه ترتیب های A که شامل T می‌باشند را با نماد $Sper_T(A)$ نمایش می‌دهند یعنی $Sper_T(A)=\{P \in Sper(A) | P \supseteq T\}$.

لم ۱. ۲۹. فرض کنید A یک حلقه مختصات از یک مجموعه جبری $V \subseteq \boldsymbol{R}^{n}$ و $T=T_S$ شبه ترتیب تولید شده توسط زیر مجموعه $S=\{f_1,\cdots,f_r\}$ از A باشد. در این صورت $K_S \subseteq sper_T(A)$ جائیکه $K_S=\{a \in V | f_1(a) \ge 0,\ldots,f_r(a) \ge 0\}$.

اثبات. نگاشت $\Phi: V \rightarrow sper_T(A)$ با ضابطه $x \mapsto P_x$ که در آن $P_x=\{f \in A | f(x) \ge 0\}$ تعریف می کنیم. واضح است که P_x نسبت به جمع و ضرب بسته می باشد و از آنجا که $-P_x=\{f \in A | f(x) \le 0\}$، لذا $P_x \cup -P_x=A$. حال اگر $f \in P_x \cap -P_x$، آنگاه $f(x)=0$. لذا $f=0$. بنابراین $P_x \cap -P_x$ یک ایده آل اول است. از اینرو P_x یک ترتیب روی A می باشد. به علاوه برای هر $f \in T$ داریم $f(x)=\sum_{e \in\{0,1\}} h_e^{2} f_1^{e_1}(x) \cdots f_r^{e_r}(x) \ge 0$. لذا $P_x \supseteq T$.
بنابراین $P_x \in sper_T(A)$. همچنین اگر $x \ne y$، آنگاه $P_x \ne P_y$. پس Φ خوش تعریف است.

به وضوح دیده می شود که Φ یک به یک است. لذا $V \subseteq sper_T(A)$ و در نتیجه $K_S \subseteq sper_T(A)$.

تعریف ۱. ۳۰. زیر مجموعه T از A را یک شبه اول A نامند هر گاه داشته باشیم: $T+T \subseteq T$، $TT \subseteq T$، $Q^+ \subseteq T$ و $-1 \notin T$.

مثال ۱. ۳۱. مجموعه P در مثال ۱. ۲۲ یک شبه اول نیز می باشد زیرا $-1 \notin T$. همچنین قسمت (b) برای اشتراک دلخواه از شبه اول ها نیز برقرار است.

به آسانی دیده می‌شود که شبه اول T یک شبه ترتیب است اگر و فقط اگر برای هر $a \in A$، $a^2 \in T$. همچنین طبق نتیجه۱. ۲۷ واضح است که هر شبه ترتیب محض از A یک شبه اول می باشد.

لم ۱. ۳۲. برای شبه اول T از A مجموعه $A[T]=\{f \in A | \exists N \geq 0 \ s.t \ N \pm f \in T\}$ یک زیر حلقه از A می‌باشد.

اثبات: فرض کنید $f_1, f_2 \in T$. در این صورت اعداد صحیح $N_1, N_2 \geq 0$ موجودند به طوری که $N_2 \pm f_2, N_1 \pm f_1 \in T$. بنابراین

$$(N_1+N_2) \pm (f_1+f_2) = (N_1 \pm f_1)+(N_2 \pm f_2) \in T$$

و

$$(*) \quad N_1N_2 \pm f_1f_2 = \frac{1}{2}(N_1 \pm f_1)(N_2 - f_2)+\frac{1}{2}(N_1 \pm f_1)(N_2+f_2) \in T$$

لذا $f_1+f_2 \in A[T]$ و $f_1f_2 \in A[T]$. از طرفی $N \pm 1 \in T$ برای هر عدد صحیح $N \geq 0$.
لذا $1 \in A[T]$. بنابراین $N \pm (-1) = N \mp 1 \in T$ یعنی $-1 \in A[T]$.
این مطالب نشان می‌دهند که $A[T]$ یک زیر حلقه از A می باشد. ■

لم ۱. ۳۳. برای هر $a \in A$، $a \in A[T]$ اگر و فقط اگر عدد حقیقی $r \geq 0$ موجود باشد به قسمی که $r \pm a \in T$.

اثبات. $\Leftarrow$) فرض کنید $a \in A[T]$. در این صورت عدد صحیح $M \geq 0$ وجود دارد به قسمی که $M \pm a \in T$. کافیست $r = M$ در نظر بگیریم.
$\Rightarrow$) فرض کنید عدد حقیقی $r \geq 0$ موجود باشد به قسمی که $r \pm a \in T$. در این صورت عدد صحیح $N \geq 0$ موجود است به طوریکه $r < N$. در نتیجه $N - r > 0$. لذا $N - r \in T$ و $N \pm a = (N-r)+(r \pm a) \in T$. بنابراین $a \in A[T]$. ■

نتیجه ۱. ۳۴. اگر $R^+ \subseteq T$ آنگاه $R \subseteq A[T]$.

اثبات. ابتدا فرض کنید $x\in \boldsymbol{R}^{+}$. در این صورت عدد صحیح $N\geq ۰$ وجود دارد به طوریکه $x<N$. لذا $N-x>۰$ و در نتیجه $N-x\in T$. همچنین به وضوح $N+x\in T$. بنابراین $x\in A(T)$ یعنی $\boldsymbol{R}^{+}\subseteq A[T]$.

حال فرض کنید $x<۰$ $(x\in \boldsymbol{R})$. در این صورت $(-x)>۰$ و طبق قسمت قبل عدد صحیح $N\geq ۰$ وجود دارد به قسمی که $N\pm(-x)\in T$. لذا $N\mp x\in T$ یعنی $x\in A[T]$. بنابراین $\boldsymbol{R}\subseteq A[T]$. ■

تعریف ۱. ۳۵. شبه اول T از A را ارشمیدسی گویند هر گاه $A=A[T]$.

لم ۱. ۳۶. فرض کنید $A=\boldsymbol{R}[x_۱,\ldots,x_n]$ یک $\boldsymbol{R}-$ جبر و $\boldsymbol{R}^{+}\subseteq T\subseteq A$ یک شبه اول باشد. در این صورت T در A ارشمیدسی است اگر و فقط اگر عدد صحیح مثبت N موجود باشد به قسمی که $N\pm x_i\in T$ $(۱\leq i\leq n)$.

اثبات. $\Leftarrow$) طبق تعریف شبه اول ارشمیدسی برای هر x_i عدد صحیح مثبت N_i وجود دارد به قسمی که $N_i\pm x_i\in T$. قرار دهید $N=N_۱+\cdots+N_n$. در این صورت $N\pm x_i\in T$ $(۱\leq i\leq n)$.

$\Rightarrow$) فرض کنید عدد صحیح مثبت N موجود باشد به قسمی که $N\pm x_i\in T$ $(۱\leq i\leq n)$. لذا هر $x_i\in A[T]$ و طبق نتیجه ۱. ۳۴، $\boldsymbol{R}\subseteq A[T]$. بنابراین $A\subseteq A[T]$. یعنی T در A ارشمیدسی است. ■

لم ۱. ۳۷. فرض کنید $A=\boldsymbol{R}[x_۱,\ldots,x_n]$ یک $\boldsymbol{R}-$ جبر و $\boldsymbol{R}^{+}\subseteq T\subseteq A$ یک شبه ترتیب باشد. در این صورت T در A ارشمیدسی است اگر و فقط اگر عدد صحیح مثبت N موجود باشد به قسمی که $N-\sum_{i=۱}^{n}x_i^۲\in T$.

اثبات. $\Leftarrow$) چون $\sum_{i=۱}^{n}x_i^۲\in A$ پس طبق تعریف شبه اول ارشمیدسی اثبات واضح است.

$\Rightarrow$) $\quad \frac{۱}{۲}N+\frac{۱}{۲}\pm x_i=\frac{۱}{۲N}\left[(N\pm x_i)^۲+\left(N-\sum_{i=۱}^{n}x_i^۲\right)+\sum_{j\neq i}x_j^۲\right]\in T$ برای هر $i=۱,\cdots,n$. بنابراین طبق لم ۱. ۳۳ و لم قبل نتیجه می‌شود که T در A ارشمیدسی است. ■

مثال ۱. ۳۸. شبه اولهای زیر در $A=\boldsymbol{R}[x_۱,\ldots,x_n]$ ارشمیدسی اند: