تقدیم به آنان که محبت را میشناسند و أرزانی میدارند بی هیچ منتی...؛

الهه صبر و محبت مادرم

الگوی پایمردی و رفاقت پدرم

و سنگ صبور زندگی ام همسرم.

// تقدیر و تشکر

سپاس یگانه معلم هستی را که در همه مراحل زندگی الطاف بی پایانش را شامل حال این بنده حقیر نموده است.

از اساتید گرامی جناب آقای دکتر امیریافی، جناب آقای دکتر محسن آقاجانی، جناب آقای دکتر علی سلیمان جهان و سرکار خانم دکتر هیرو صارمی سپاسگذارم.

و اما: همسر صبور و خانواده گرامی ام صبرتان را سپاس، دلگرمی هایتان را درود، عشقتان را سلام و محبتتان را قدر دانم.

چکیده

در این پایان‌نامه، فرض می‌شود R یک حلقه جابجای، موضعی، نوتری و L و L'، R−مدول باشند. بعضی از ویژگی‌های فانکتورهای $\mathrm{Ext}_R^i(L,-)$ و $\mathrm{Tor}_i^R(L,-)$ بررسی می‌شود. از جمله:

(a) اگر L و L' آرتینی باشند آنگاه $\mathrm{Tor}_i^R(L,L')$ آرتینی و $\mathrm{Ext}_R^i(L,L')$ نوتری روی $\widehat{R}$ هستند.

(b) اگر L آرتینی و L' انعکاسی ماتلیس باشند، آنگاه $\mathrm{Ext}_R^i(L,L')$، $\mathrm{Ext}_R^i(L',L)$ و $\mathrm{Tor}_{\mathrm{i}}^R(L,L')$ انعکاسی ماتلیس هستند.

همچنین صفرشدن فانکتورهای $\mathrm{Ext}_R^i(L,-)$ و $\mathrm{Tor}_i^R(L,-)$ بررسی می‌شود.

واژگان کلیدی: مدول‌های آرتینی، مدول‌های مینی‌ماکس، مدول‌های انعکاسی.

فهرست مطالب

پیشگفتار

در طول این پایان‌نامه، فرض کنید R یک حلقه جابجایی نوتری و موضعی، با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ و میدان خارج‌قسمتی $k = R/\mathfrak{m}$ باشد. فرض کنید $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل از R باشد، $\mathfrak{a}-$ادیک R را با $\widehat{R^{\mathfrak{a}}}$ و $\mathfrak{m}-$ادیک کامل از R را با $\widehat{R}$ و پوشش انژکتیو از k را با $E = E_R(k)$ نشان می‌دهیم. $(-)^\vee = \mathrm{Hom}_R(-, E)$ فانکتور دوگان‌ماتلیس است. این پایان نامه متشکل از بعضی از خاصیت‌های فانکتورهای $\mathrm{Hom}_R(A, -)$ و $A \otimes_R -$ است که A، $R-$مدول آرتینی است. اگر A و A'، $R-$مدول‌های آرتینی باشند، آنگاه $A \otimes_R A'$ دارای طول متناهی است، این مطلب در گزاره ۱.۶ [۹] ثابت شده است. اگر N، $R-$مدول نوتری باشد، آنگاه $\mathrm{Hom}_R(A, N)$ دارای طول متناهی است. این مطالب در نتیجه‌های ۳.۳.۳ و ۳.۳.۴ بیان شده است. و بعضی از ویژگی‌های فانکتورهای $\mathrm{Ext}_R^i(A, -)$ و $\mathrm{Tor}_i^R(A, -)$ بررسی می‌شود. در حالت کلی مدول‌های $\mathrm{Ext}_R^i(A, N)$ و $\mathrm{Tor}_i^R(A, A')$ دارای طول متناهی نیستند.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱.۱ تعاریف مقدماتی

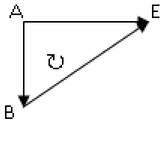
تمامی تعاریف در این بخش از رفرنس‌های [۱]،[۵]، [۸]، [۱۶]، [۷]، [۲۰] ، [۲۲] و [۲۳] بیان شده است.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم M یک $R-$ مدول باشد. محمل[۱] M را با $\mathrm{Supp}(M)$ یا $\mathrm{Supp}_R(M)$ نمایش می‌دهند و به صورت $\mathrm{Supp}_R(M)=\{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(R)|M_{\mathfrak{p}}\neq 0\}$ تعریف می‌شود.

یادآوری:مجموعه همه های اول از حلقه R را با $\mathrm{Spec}(R)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۲.۱.۱. رادیکال جیکبسون حلقه R، اشتراک تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال از R است، و با $J(R)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۳.۱.۱. یک $R-$ مدول E انژکتیو است، هرگاه به‌ازای هر دو مدول A و B که $A\subset B$ و همریختی $f: A\longrightarrow E$، همریختی $g: B\longrightarrow E$ موجود باشد که $g|_A=f$ و نمودار زیر جابجای باشد:



[۱] Supprt

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید M یک زیر مدول از $R-$مدول انژکتیو E باشد، آنگاه E را یک توسیع انژکتیو از M می‌گویند.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید M و N دو $R-$مدول، و $N \subset M$ باشد. هرگاه برای هر زیرمدول A از M، $A \cap N = 0$ نتیجه دهد $A = 0$ است، آنگاه M را یک توسیع اساسی از N می‌گویند.

تعریف ۶.۱.۱. $R-$مدول انژکتیو E، را یک پوشش انژکتیو[۲] از $R-$مدول M می‌گویند، هرگاه توسیع اساسی M باشد.

تعریف ۷.۱.۱. $R-$مدول M را مدول ساده می‌گویند هرگاه تنها زیرمدول‌هایش، زیرمدول‌های بدیهی باشند.

تعریف ۸.۱.۱. $R-$مدول M را نیم‌ساده گویند، هرگاه M جمع مستقیم از مدول‌های ساده باشد. همچنین M نیم‌ساده است، اگروتنها اگر هر زیرمدولش یک جمع‌وند مستقیم از M باشد [۸].

تعریف ۹.۱.۱. $R-$مدول M را یکدست گویند هرگاه به‌ازای هر رشته دقیق $0 \to N \to N'$ از $R-$مدول‌ها و $R-$همریختی‌ها، رشته $0 \to M \otimes_R N \to M \otimes_R N'$ دقیق باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱. $R-$مدول M را یکدست باوفا گویند هرگاه M یکدست باشد و برای هر $R-$مدول N اگر $M \otimes_R N = 0$ آنگاه $N = 0$.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید Rیک حلقه و M یک $R-$مدول باشد. یک زنجیر از زیر مدول‌های M، $0 = M_n \subset M_{n-1} \subset \cdots M_1 \subset M_0 = M$ را یک سری ترکیبی برای M می‌گویند، هرگاهM_i/M_{i+1} ساده باشند. طول[۳] سری ترکیبی از یک مدول به انتخاب سری ترکیبی بستگی ندارد. طول مدول M طول سری ترکیبی آن مدول است، و با $\operatorname{len}_R M$ نشان داده می‌شود.

---
[۲] Injective hull
[۳] Length

تعریف ۱.۱.۱۲. فرض کنید R یک حلقه جابجایی و $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اوّل از R باشد. ارتفاع[۴] $\mathfrak{p}$ را به‌صورت $ht(\mathfrak{p}) = \sup\{s|\ \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{0} \supset \mathfrak{p}_{1} \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_s, \mathfrak{p}_i \in \mathrm{Spec}(R)\}$ تعریف می‌کنند. سوپریمم ارتفاع $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Spec}(R)$ را بعد[۵] R می‌گویند و با $\dim(R)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱.۱.۱۳. فرض کنید R حلقه جابجایی و V زیر مجموعه‌ای از $\mathrm{Spec}(R)$ باشد. سوپریمم طول زنجیرهای نزولی اکید $\mathfrak{p}_{0} \supset \mathfrak{p}_{1} \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_s$ از ایده‌آل‌های اوّل در V، را بعد V می‌گویند و با $\dim(V)$ نشان می‌دهند. بنابراین $\dim(R) = \dim(\mathrm{Spec}(R))$ است. فرض کنید M یک $R-$مدول باشد، آنگاه $\dim(\mathrm{Supp}(M))$ را بعد M می‌گویند و با $\dim(M)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱.۱.۱۴. فرض کنید R حلقه نوتری، M یک $R-$مدول متناهی و I ایده‌آلی از R باشد که $IM \neq M$. طول $M-$دنباله ماکسیمال در I را درجه I روی M می‌گویند و با $\mathrm{grade}(I,M)$ نشان می‌دهند. اگر $IM = M$ آنگاه $\mathrm{grade}(I,M) = \infty$ تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۱.۱۵. فرض کنید $(R,\mathfrak{m},k)$ یک حلقه موضعی نوتری و N یک $R-$مدول متناهی باشد. درجه ایده‌آل $\mathfrak{m}$ را نسبت به N عمق برای N می‌گویند و با $\mathrm{depth}\, N$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱.۱.۱۶. فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی[۶] نوتری و $M \neq 0$ یک $R-$مدول با تولید متناهی باشد. هرگاه $\mathrm{depth}_R(M) = \dim(M)$ آنگاه M را $R-$مدول کوهن-مکالی می‌گویند. اگر R به‌عنوان $R-$مدول، کوهن-مکالی باشد آنگاه R را حلقه کوهن-مکالی[۷] می‌گویند.

تعریف ۱.۱.۱۷. فرض کنیم X مجموعه‌ای ناتهی و τ گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های X باشد. τ را توپولوژی روی X می‌نامیم در صورتی که شرایط زیر برقرار باشد:

---
[۴] Height
[۵] Dimension
[۶] Local ring
[۷] Cohen-Macauly ring

(a) $\emptyset \in \tau$ و $X \in \tau$

(b) اگر $A_i \subseteq \tau$، آنگاه $\bigcup A_i \in \tau$

(c) اگر $A, B \in \tau$، آنگاه $A \cap B \in \tau$.

تعریف ۱.۱.۱۸. فرض کنیم X فضای توپولوژی باشد فضای X را هاوسدورف می‌نامیم، هرگاه برای هر دو نقطه متمایز $x, y \in X$، مجموعه‌های بازِ U_x و V_y به قسمی وجود داشته باشند که

$x \in U_x, y \in V_y$ و $U_x \bigcap V_y = \emptyset$.

تعریف ۱.۱.۱۹. فرض کنید R روی فضای توپولوژی X حلقه باشد. R را حلقه توپولوژی گویند هرگاه نگاشت‌های عمل‌های حلقه از $R \times R$ به R پوشا باشند.

تعریف ۱.۱.۲۰. فرض کنید $\mathcal{D}$ یک گردایه که شامل دو رده، مورفیسم‌ها و عضوها است. اگر رده مورفیسم‌ها شامل مورفیسم همانی باشد و ترکیب مورفیسم‌ها خصوصیت شرکت‌پذیری را داشته باشد و ترکیب هر مورفیسم با مورفیسم همانی، همان مورفیسم شود، آنگاه به این گردایه رسته یا کاتگوری[۸] می‌گویند.

تعریف ۱.۱.۲۱. فرض کنید $\mathcal{G}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته باشند. $F : \mathcal{G} \to \mathcal{D}$ را یک فانکتور می‌گویند هرگاه در شرایط زیر صدق کند

(a) به ازای هر $A \in \mathcal{G}$ آنگاه $F(A) \in \mathcal{D}$.

(b) اگر $f : A \to B$ مورفیسمی در $\mathcal{G}$ باشد، آنگاه $F(f) : F(A) \to F(B)$ مورفیسمی در $\mathcal{D}$ است.

(c) اگر $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ مورفیسم‌هایی در $\mathcal{G}$ باشد، آنگاه $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

(d) برای هر $A \in \mathcal{G}$، آنگاه $F(۱_A) = ۱_{F(A)}$ باشد.

[8] Category

قرارداد: تعریف بیان شده برای فانکتور همورد است. اگر شرط سوّم به‌صورت $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ تغییر کند فانکتور را پادورد می‌گویند.

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنید R حلقه جابجای و یکدار، $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل از R، M یک $R-$مدول و N زیر مدولی از Mباشد. آنگاه فانکتور کوهمولوژی N نسبت به $\mathfrak{a}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$N :_M < \mathfrak{a} > := \{m \in M | \ \exists \, n > 0, \mathfrak{a}^n \, .m \subseteq N\}$$

$$N :_M \mathfrak{a} := \{m \in M| \, , \mathfrak{a} \, .m \subseteq N\}$$

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) := 0 :_M < \mathfrak{a} >= \bigcup_{k=1}^{\infty} (0 :_M \mathfrak{a}^k)$$

به $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ فانکتور کوهمولوژی موضعی نسبت به $\mathfrak{a}$ می‌گویند.

تعریف ۲۳.۱.۱. C را همبافت[۹] از $R-$مدول‌ها می‌گویند هرگاه دنباله

$$C : \cdots \xrightarrow{\sigma_3} C_2 \xrightarrow{\sigma_2} C_1 \xrightarrow{\sigma_1} C_0 \xrightarrow{\sigma_0} C_{-1} \xrightarrow{\sigma_{-1}} \cdots$$

از $R-$مدول‌ها و $R-$همریختی‌ها موجود باشد، که به‌ازای هر $n \in Z$، $\sigma_{n-1} o \sigma_n = 0$ و C را با $((C_n), (\sigma_n))$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض کنید M یک $R-$مدول باشد. دنباله دقیق $0 \to M \to I^0 \xrightarrow{d_0} I^1 \xrightarrow{d_1} I^2 \xrightarrow{d_2} \cdots$ را یک تحلیل انژکتیو[۱۰] برای M می‌گویند هرگاه I^n یک $R-$مدول انژکتیو باشد.

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنید M یک $R-$مدول باشد. $I^* : 0 \to I^0 \xrightarrow{d_0} I^1 \xrightarrow{d_1} I^2 \xrightarrow{d_2} \cdots$ را یک تحلیل انژکتیو مینیمال برای M می‌گویند هرگاه یک تحلیل انژکتیو برای M و I^n یک توسیع اساسی برای $\ker d^n$ باشد.

---

[۹] Complex

[۱۰] Injective resolution

تعریف ۲۶.۱.۱. فرض کنید M یک $R-$مدول باشد. دنباله دقیق $0 \to M \to F^0 \xrightarrow{d_0} F^1 \xrightarrow{d_1} F^2 \xrightarrow{d_2} \cdots$ را یک تحلیل آزاد[11] برای M می‌گویند هرگاه F^n یک $R-$مدول آزاد باشد.

تعریف ۲۷.۱.۱. فرض کنید C_R کاتگوری $R-$مدول‌ها و $R-$همریختی‌ها و $T(-) : C_R \longrightarrow C_R$ یک فانکتور همورد جمعی باشد. همچنین فرض کنید

$$\ldots \to F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \ldots \to F_0 \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$$

یک تحلیل آزاد[12] برای $R-$مدول M باشد. بنابراین، همبافت زیر را داریم

$$\ldots \to T(F_i) \xrightarrow{T(d_i)} T(F_{i-1}) \xrightarrow{T(d_{i-1})} \ldots \to T(F_0) \xrightarrow{T(d_0)} 0.$$

برای هر $i \geqslant 0$، $R-$مدول $\dfrac{\ker(T(d_n))}{Im(T(d_{n+1}))}$ را با نماد $L_nT(M)$ نشان می‌دهند و به آن n امین فانکتور مشتق شده چپ می‌گویند.

قرارداد: فرض کنید N یک $R-$مدول چپ باشد. n امین فانکتور مشتق شده چپ $T(-) = - \otimes_R N$ را با علامت $\mathrm{Tor}_n^R(-, N)$ نشان می‌دهند و به آن فانکتور تابی می‌گویند.

تعریف ۲۸.۱.۱. فرض کنید C_R کاتگوری $R-$مدول‌ها و $R-$همریختی‌ها و $T(-) : C_R \longrightarrow C_R$ یک فانکتور همورد جمعی باشد. همچنین فرض کنید

$$0 \to M \xrightarrow{\epsilon} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \to \cdots$$

یک تحلیل انژکتیو برای $R-$مدول M باشد. بنابراین همبافت زیر را داریم

$$0 \to T(E^0) \xrightarrow{T(d^0)} T(E^1) \xrightarrow{T(d^1)} T(E^2) \to \cdots$$

[11] Free resolution

[12] Free resolution

برای هر $i \geqslant 0$، $R-$مدول $\frac{\ker(T(d^n))}{Im(T(d^{n-1}))}$ را با نماد $R^nT(M)$ نشان می‌دهند و به آن n امین فانکتور مشتق شده راست $T(-)$ می‌گویند.

قرارداد: فرض کنید N یک $R-$مدول چپ باشد. n امین فانکتور مشتق شده راست $T(-)=\mathrm{Hom}_R(N,-)$ را با علامت $\mathrm{Ext}^n_R(N,-)$ نشان می‌دهند و به آن فانکتور توسیع می‌گویند.

تعریف ۲۹.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه نوتری و $\mathfrak{m}$ یک ایده‌آل از R باشد. هرگاه هر عضو $\mathfrak{m}+1$ وارون‌پذیر باشند، آنگاه به R حلقه زارسکی[۱۳] می‌گویند.

مثال ۳۰.۱.۱. حلقه‌های موضعی و $\mathfrak{a}-$ادیک کامل ،حلقه های زارسکی می‌باشند.

تعریف ۳۱.۱.۱. فرض کنید M یک مدول روی حلقه R باشد. $x \in R$ را روی M منظم می‌گویند هرگاه به ازای هر $(z \in M)$ اگر $xz = 0$ آنگاه $z = 0$.

تعریف ۳۲.۱.۱. فرض کنید I یک مجموعه جزئاً مرتب و برای هر $i, j \in I$ وجود دارد $k \in I$ که $i, j \leqslant k$ و $\{M_i\}$ خانواده‌ای از $R-$مدول‌ها باشد. هرگاه $R-$همریختی $f_{ij} : M_j \to M_i$ وجود داشته باشد که در شرایط زیر صدق کند

(a) $f_{ii} = id_{M_i}$

(b) اگر $i \leqslant j \leqslant k$ آنگاه $f_{ik} = f_{ij} \circ f_{jk}$

به $((M_i), (f_{ij}))$ یک دستگاه معکوس از $R-$مدول‌های M_i می‌گویند.

تعریف ۳۳.۱.۱. فرض کنید $((M_i), (f_{ij}))$ یک دستگاه معکوس از $R-$مدول‌ها و $R-$همریختی‌ها باشد. $R-$مدول M و $R-$همریختی $f_i : M \to M_i \quad i \in I$ که $f_i = f_{ij} \circ f_j$، $i \leqslant j$ را در نظر بگیرید.

[۱۳] Zariski Ring

$(M, (f_i))$ را حد معکوس $((M_i), (f_{ij}))$ می‌گویند، هرگاه به‌ازای $R-$مدول N و خانواده $R-$همریختی‌های $h_i : N \to M_i$ که $h_i = f_{ij} \circ h_j$ است، همریختی منحصربه‌فرد $f : N \to M$ وجود داشته باشد که $h_i = f_i \circ f$ است.

تعریف ۳۴.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه، I یک ایده‌آل از R و M یک $R-$مدول باشد. سپس

$$M \supset IM \supset I^{۲}M \supset I^{۳}M \cdots$$

همچنین $R-$همریخی‌های $f_{ij} : M/I^jM \to M/I^iM$ را با تعریف $f_{ij}(x + I^jM) = x + I^iM$ که $i \leq j$ را داریم. بنابراین $((M/I^iM), (f_{ij}))$ دستگاه معکوس روی Z_+است. حد معکوس این دستگاه معکوس را $I-$ادیک کامل[۱۴] M می‌گویند و با $\widehat{M}$نشان می‌دهند.

$$\widehat{M} = \varprojlim M/I^nM = \{(x + IM, x + I^{۲}M, \cdots) : x_i + I^iM = f_{ii+۱}(x + I^{i+۱}M)\}$$

$$= \{(x + IM, x + I^{۲}M, \cdots) : x_i \overset{I^iM}{\equiv} x_{i+۱}\}$$

تعریف ۳۵.۱.۱. فرض کنید R حلقه، I ایده‌آلی از R و M یک $R-$مدول باشد. هرگاه $\widehat{M} \cong M$، M را $I-$ادیک‌کامل می‌گویند. R را یک $I-$ادیک‌کامل می‌گویند، هرگاه بعنوان $R-$مدول، $I-$ادیک‌کامل باشد.

تعریف ۳۶.۱.۱. فرض کنید M یک $R-$مدول باشد. $\mathrm{Ann}_R(M) = \{r \in R : rx = ۰, \forall x \in M\}$ را پوچساز Mمی‌گویند. پوچساز $x \in M$ به‌صورت $\mathrm{Ann}_R(x) = \{r \in R : rx = ۰\}$ تعریف می‌شود. پوچساز M یک ایده‌آل برای R است. $\mathrm{Ann}_R(M) = \bigcap_{x\in M} \mathrm{Ann}_R(x)$ واضح است.

تعریف ۳۷.۱.۱. فرض کنید R حلقه کوهن-مکالی و موضعی با میدان خارج قسمتی k باشد. $R-$مدول متناهیاً تولید شده D را مدول دوگان برای R می‌گویند هرگاه

$$\mathrm{Ext}^i_R(k, D) \cong \begin{cases} ۰ & i \neq \dim(R) \\ k & i = \dim(R) \end{cases}$$

بنابر تبصره ۱۵.۵.۹ از [۸] اگر R حلقه موضعی گورنشتاین باشد مدول دوگانش R می‌شود.

[۱۴] adic complete

تعریف ۳۸.۱.۱. فرض کنید R حلقه و M یک $R-$مدول باشد. $m \in M$ را بخش‌پذیر بر $r \in R$ می‌گویند، هرگاه عنصری چون $m' \in M$ موجود باشد که $rm' = m$. مدول M را بخش‌پذیر می‌گویند هرگاه به ازای هر $m \in M$ بر هر مقسوم علیه غیر صفر $r \in R$ بخش‌پذیر باشد.

تعریف ۳۹.۱.۱. حلقه موضعی و نوتری R را گورنشتاین می‌گویند، هرگاه در یکی از شرایط قضیه ۵۴.۲.۱ صدق کند.

۲.۱ قضایا و گزاره‌های مقدماتی

گزاره ۱.۲.۱. *فرض کنید R یک حلقه نوتری، موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ باشد، آنگاه دقیقاً یکی از شرطهای زیر درست است:*

(a) *برای هر* $n \in \mathbb{N}_0$، $\mathfrak{m}^n \neq \mathfrak{m}^{n+1}$.

(b) $n \in \mathbb{N}_0$ *موجود است که* $\mathfrak{m}^n = 0$، *در این مورد* R *یک حلقه موضعی آرتینی است.*

برهان: *به گزاره ۶.۸ از* [۱] *مراجعه کنید.*

گزاره ۲.۲.۱. *فرض کنید M یک $R-$مدول، $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل از R و $i \in N$ باشد، آنگاه*

$$\operatorname{Supp}_R(H^i_{\mathfrak{a}}(M)) \subseteq \operatorname{Supp}_R(M) \cap V(\mathfrak{a})$$

همچنین اگر M با تولید متناهی و $\mathfrak{a}\, M = M$ باشد، آنگاه برای هر $j \in N_0$، $H^j_{\mathfrak{a}}(M) = 0$.

برهان: *به تمرین ۶.۲.۶ از* [۵] *مراجعه کنید.*

گزاره ۳.۲.۱. *فرض کنید R حلقه و $a-$ادیک کامل R، با $\widehat{R}$ نشان داده شود. اگر $\widehat{R}_n$ یک زیر گروه از $\widehat{R}$، آنگاه $\widehat{R}/\widehat{R}_n \cong R/R_n$.*

برهان: به نتیجه ۴.۱۰ از [۱] مراجعه کنید.

لم ۴.۲.۱. فرض کنید G یک گروه آبلی توپولوژی و H اشتراک همه همسایگی‌های صفر در G باشد، آنگاه

(a) H زیرگروه است.

(b) H بستاری از صفر.

(c) G/H هاسدرف است.

(d) G هاسدروف است اگروتنها اگر $H = 0$.

برهان: به لم ۱.۱۰ از [۱] مراجعه کنید.

گزاره ۵.۲.۱. فرض کنید R یک حلقه نوتری، $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ ایده‌آل‌هایی در R باشند. آنگاه $R-$ مدول، $\mathfrak{a}-$ادیک کامل M را با $\widehat{M}^{\mathfrak{a}}$ و $\mathfrak{b}-$ادیک کامل را با $\widehat{M}^{\mathfrak{b}}$ نشان می‌دهند. اگر M متناهی مولد باشد، آنگاه $\widehat{M}^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} = \widehat{(\widehat{M}^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{b}}}$.

برهان: به تمرین ۵.۱۰ از [۱] مراجعه کنید.

گزاره ۶.۲.۱. فرض کنید R حلقه نوتری و $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل از R باشد. آنگاه $\widehat{R^{\mathfrak{a}}}$ روی R باوفا یکدست است، اگروتنها اگر R یک حلقه زارسکی برای $\mathfrak{a}-$توپولوژی باشد.

برهان: به تمرین ۷.۱۰ از [۱] مراجعه کنید.

قضیه ۷.۲.۱. فرض کنید $f : R \to S$ یک همریختی حلقه‌ای یکدست باوفا و S یکدار باشد.

(a) برای هر $R-$مدول M، اگر $M \to M \otimes_R S$، $(m \mapsto m \otimes 1)$ انژکتیو باشد، آنگاه f انژکتیو است.

(b) اگر $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل از R باشد، آنگاه $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}S \cap R$.

برهان: به قضیه ۵.۷ از [۱۶] مراجعه کنید.

قضیه ۸.۲.۱. *فرض کنید R و S دو حلقه یکدار، A یک $R-$مدول راست، C یک $S-$مدول راست و B هم $(S-R)-$دومدول باشند، آنگاه یکریختی $\tau : \mathrm{Hom}_S(B \otimes_R A, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C))$ موجود است. و در حالتی که C یک $S-$مدول راست، B یک $(R-S)-$دو مدول و A یک $R-$مدول راست باشند، یکریختی $\tau' : \mathrm{Hom}_S(A \otimes_R B, C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C))$ موجود است.*

برهان: به قضیه ۲ .۱۱ از [۱۹] مراجعه کنید.

قضیه ۹.۲.۱. *فرض کنید R حلقه نوتری و یکدار باشد، آنگاه برای $(R-S)-$دومدول E ، شرایط زیر هم‌ارزند*

(a) *E یک $R-$مدول انژکتیو است؛*

(b) *برای $S-$مدول‌های انژکتیو E' ، $\mathrm{Hom}_S(E, E')$ یک $R-$مدول راست یکدست است.*

برهان: به قضیه ۳ .۲ .۱۶ از [۸] مراجعه کنید.

قضیه ۱۰.۲.۱. *فرض کنید $T(A)$ یک فانکتور جمعی دقیق از یک مدول دلخواه A ، و X یک همبافت باشد. اگر T فانکتور هموردا در A باشد، آنگاه برای هر n، $H_n(T(X)) \cong T(H_n(X))$. و اگر T فانکتور پادوردا باشد، آنگاه $H_n(T(X)) \cong T(H^n(X))$ است.*

برهان: به قضیه ۶ .۱ از [۱۸] مراجعه کنید.

لم ۱۱.۲.۱. *فرض کنید S و R حلقه‌های یکدار، C یک $S-$مدول راست، B یک $(R-S)-$دومدول و A یک $R-$مدول چپ باشند. اگر A با تولید متناهی و C انژکتیو باشد، آنگاه*

$$\mathrm{Hom}_S(B, C) \otimes_R A \cong \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Hom}_R(A, B), C).$$

برهان: به قضیه ۳ .۶۰ از [۲۰] مراجعه کنید.

قضیه ۱.۲.۱۲. فرض کنید S و R حلقه‌های یکدار، A یک $R-$مدول چپ، B یک $(S-R)-$دومدول و C یک $S-$مدول چپ انژکتیو باشند، آنگاه

$$\operatorname{Ext}_R^i(A, \operatorname{Hom}_S(B, C)) \cong \operatorname{Hom}_S(\operatorname{Tor}_i^R(B, A), C).$$

برهان: به قضیه ۱.۲.۳ از [۸] مراجعه کنید.

قضیه ۱.۲.۱۳. فرض کنید R یک حلقه نوتری، M یک $R-$مدول و $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ باشد، آنگاه:

$$\mu_i(\mathfrak{p}, M) = \dim_{k(\mathfrak{p})} \operatorname{Ext}_{R_\mathfrak{p}}^i(k(\mathfrak{p}), M_\mathfrak{p}) = \dim_{k(\mathfrak{p})}(\operatorname{Ext}_R^i(R/\mathfrak{p}, M))_\mathfrak{p}$$

که $k(\mathfrak{p}) = R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p} R_\mathfrak{p}$ میدان خارج قسمتی از حلقه موضعی $R_\mathfrak{p}$. اگر M یک $R-$مدول با تولید متناهی باشد، آنگاه $\mu_i(\mathfrak{p}, M) < \infty$ است.

برهان: به قضیه ۱۸.۷ از [۱۶] مراجعه کنید.

قضیه ۱.۲.۱۴. فرض کنید $(R, \mathfrak{m}, k)$ حلقه موضعی نوتری و $E = E(k)$ پوشش انژکتیو از k باشد. برای هر $R-$مدول M، $M^\vee := \operatorname{Hom}_R(M, E)$ را در نظر می‌گیریم.

(a) اگر M یک $R-$مدول با طول متناهی باشد، آنگاه $\operatorname{len}_R(M) = \operatorname{len}_R(M^\vee)$ و نگاشت $M \to M^{\vee\vee}$ یکریختی است.

(b) E به عنوان یک $R-$مدول آرتینی است و همچنین بعنوان $\widehat{R}-$مدول. رسته $R-$مدول‌های نوتری را با $\mathcal{N}$ و رسته $R-$مدول‌های آرتینی را با $\mathcal{A}$ نمایش می‌دهیم. اگر $M \in \mathcal{N}$ آنگاه $M^\vee \in \mathcal{A}$ و $M \cong M^{\vee\vee}$. همچنین اگر $M \in \mathcal{A}$ آنگاه $M^\vee \in \mathcal{N}$ و $M \cong M^{\vee\vee}$.

برهان: به قضیه ۱۸.۶ از [۱۶] مراجعه کنید.

گزاره ۱.۲.۱۵. فرض کنید $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل از R ، E یک $R-$مدول انژکتیو باوفا و M یک همبافت از $R-$مدول‌ها باشند، آنگاه

$$\operatorname{depth}_R(\mathfrak{a}, M) = \operatorname{width}_R(\mathfrak{a}, M^\vee)$$

$$\operatorname{width}_R(\mathfrak{a}, M) = \operatorname{depth}_R(\mathfrak{a}, M^\vee).$$

برهان: به گزاره ۴.۴ از [۱۰] مراجعه کنید.

گزاره ۱.۲.۱۶. فرض کنید R یک حلقه باشد. M و N ، دو $R-$مدول و $I = \operatorname{Ann}(N)$ باشد.

(a) اگر I شامل یک عضو $M-$منظم باشد، آنگاه $\operatorname{Hom}_R(N, M) = 0$ است.

(b) اگر N با تولید متناهی، R نوتری و $\operatorname{Hom}_R(N, M) = 0$ باشد، آنگاه I شامل یک عضو $M-$منظم است.

برهان: به گزاره ۱.۲.۳ از [۷] مراجعه کنید.

قضیه ۱.۲.۱۷. فرض کنید $(R, \mathfrak{m}, k)$ حلقه موضعی و $E = E(k)$ پوشش انژکتیو از k باشد. یک $R-$مدول M آرتینی است، اگروتنها اگر $n \geqslant 1$ موجود باشد که $M \subset E(k)^n$.

برهان: به گزاره ۳.۴.۳ از [۸] مراجعه کنید.

گزاره ۱.۲.۱۸. فرض کنید R حلقه جابجای و یکدار باشد، آنگاه $R-$مدول M نوتری است، اگروتنها اگر $M^\vee$ آرتینی باشد.

برهان: به نتیجه ۳.۴.۴ از [۸] مراجعه کنید.

گزاره ۱.۲.۱۹. فرض کنید $(R, \mathfrak{m}, k)$ حلقه موضعی نوتری و $E = E(k)$ پوشش انژکتیو از k باشد. اگر $M^\vee$ روی R نوتری باشد، آنگاه M روی R آرتینی است ($(-)^\vee = \operatorname{Hom}_R(-, E)$).

برهان: به نتیجه ۳.۴.۵ از [۸] مراجعه کنید.

قضیه ۱.۲.۲۰. یک $R-$مدول M انعکاسی ماتلیس است، اگروتنها اگر M دارای یک زیر مدول با تولید متناهی S باشد، که M/S آرتینی است و R/I حلقه موضعی کامل باشد، $I = \text{Ann}(M)$ است.

برهان: به قضیه ۱۲ از [۴] مراجعه کنید.

قضیه ۱.۲.۲۱. فرض کنید $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ یک دنباله دقیق از $R-$مدول‌ها باشد آنگاه M نوتری (آرتینی) است، اگروتنها اگر M' و M'' نوتری (آرتینی) باشند.

برهان: به قضیه ۲.۳.۷ از [۸] مراجعه کنید.

قضیه ۱.۲.۲۲. فرض کنید R حلقه باشد. $R-$مدول M متناهی طول است، اگروتنها اگر M آرتینی و نوتری باشد.

برهان: به قضیه ۲.۳.۱۷ از [۸] مراجعه کنید.

گزاره ۱.۲.۲۳. فرض کنید R یک حلقه که $R/J(R)$ نیم‌ساده و $J(R)$ پوچ توان باشد، آنگاه $R-$مدول M نوتری است، اگروتنها اگر M یک $R-$مدول آرتینی باشد.

برهان: به گزاره ۲.۳.۲۰ از [۸] مراجعه کنید.

گزاره ۱.۲.۲۴. فرض کنید R حلقه آرتینی باشد، آنگاه $R/J(R)$ نیم‌ساده و $J(R)$ پوچ توان است.

برهان: به گزاره ۲.۳.۲۲ از [۸] مراجعه کنید.

گزاره ۱.۲.۲۵. اگر $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ یک دنباله دقیق از $R-$مدول‌ها باشد، آنگاه M انعکاسی ماتلیس است، اگروتنها اگر M' و M'' انعکاسی ماتلیس باشند.

برهان: به تمرین ۳.۲ از [۸] مراجعه کنید.