٩٦١٥٧

دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل
دانشکده مهندسی مکانیک

موضوع:

تحلیل نظری و عددی یک سیستم ارتعاشی با میراگرهای غیر خطی مختلف

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته مهندسی مکانیک – گرایش طراحی کاربردی

استاد راهنما:
دکتر هادی پاشایی

استاد مشاور:
دکتر داود دومیری گنجی

نگارش:
مهدی اکبرزاده

۱۳۸۷ /۱۵/ -۴

اردیبهشت ۸۷

۹۶۱۵۷

باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی
نوشیروانی بابل

تحصیلات تکمیلی

ارزشیابی پایان نامه در جلسه دفاعیه

نام و نام خانوادگی دانشجو: مهدی اکبرزاده — شماره دانشجویی: ۸۵۵۱۳۶۷۰۰۱

رشته تحصیلی: مهندسی مکانیک – طراحی کاربردی — مقطع: کارشناسی ارشد

عنوان پایان نامه:

«تحلیل نظری و عددی یک سیستم ارتعاشی با میراگرهای غیر خطی مختلف»

تاریخ دفاع: ۸۷/۳/۲۵

نمره پایان نامه (به عدد): ۱۹/۵

نمره پایان نامه (به حروف): نوزده و پنج

هیات داوران:

استاد راهنما: دکتر هادی پاشائی — امضا

استاد مشاور: دکتر داود دومیری گنجی — امضا

استاد مدعو: دکتر علیرضا فتحی — امضا ۸۷/۳/۲۵

استاد مدعو: دکتر محمد حسن قاسمی — امضا

نماینده کمیته تحصیلات تکمیلی: دکتر محمد حسن حجتی — امضا

تشکر و قدردانی

سپاس و ستایش خداوند متعال را که من را یاری نمود تا پس از ماه ها تلاش وپیگیری مداوم بتوانم نگارش این پایان نامه را به پایان برسانم. لازم می دانم تا از استاد محترم جناب آقای دکتر پاشایی، استاد راهنما که در جهت بهبود این اثر از هیچ کوششی دریغ نفرمودند و در تمامی مراحل انجام پایان نامه همواره بزرگترین پشتوانه علمی و فکری اینجانب بودند، مراتب تشکر و قدردانی خود را عرض نمایم. همچنین از استاد مشاور جناب آقای دکتر دومیری که با راهنمایی و مساعدت های ارزشمند خویش در تمامی مراحل همواره گره گشای مسایل و مشکلات اینجانب بوده اند، قدر دانی می نماییم.

در پایان وظیفه می دانم از پدرم، مادرم، همسرم و تمامی دوستانی که با توجه و همیاری خویش مشوق و راهنمای من بوده اند تشکر نمایم و برای همه این عزیزان از درگاه خداوند متعال سلامتی و سرفرازی را آرزومندم.

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

و

همسر مهربانم

چکیده

تمام سیستم های مهندسی کـه دارای جـرم و الاستیـسیته هـستند مـستعد ارتعاشـات آزاد می باشند. برای چنین سیستم هایی تعین فرکانس های طبیعی و بررسی معادله حرکت برای پیش بینی رفتار سیستم ضرورت می یابد. در صورتی که فرکانس های طبیعی یـک سیـستم مشخص شود، می توان از بروز حالت تشدید و اثرات نامطلوب آن جلـوگیری کـرد. همچنـین برای جلوگیری از ظهور دامنه های بزرگ ارتعاشی بحث در مورد اسـتفاده از ضـربه گیرهـا و میرا کننده ها و کاربرد هوشمندانه آنها اهمیت پیدا مـی کنـد. در ایـن پایـان نامـه محاسـبه فرکانس طبیعی سیستم های غیر خطی و رابطه آن بـا دامنـه ارتعاشـات مـورد بررسـی قـرار گرفته است از آنجا که در سیستم های غیر خطی فرکانس طبیعی سیستم به دامنـه ارتعـاش بستگی دارد، محاسبه دقیق فرکانس طبیعی اهمیت زیادی می یابد. همچنین مـدل سـازی و کاربرد میراکننده ها به عنوان ضربه گیر و بررسی معادلات حرکت آنها از فعالیت هـای انجـام شده در این پایان نامه می باشد .

فهرست

فهرست جداول

فهرست شکل ها

فهرست علائم

فهرست پیوست ها

عنوان	صفحه
فصل اول: مقدمه	۱
۱-۱- ارتعاشات آزاد و اجباری	۲
۱-۲- ارتعاشات خطی و غیر خطی	۳
۱-۳- معادله حرکت	۵
۱-۴- ساختار پایان نامه	۶
فصل دوم: اجزای تشکیل دهنده سیستم های ارتعاشی و روابط بین اجزا	۸
۲-۱- جرم	۹
۲-۲- سختی	۱۰
۲-۲-۱- رابطه نیرو – تغییر مکان	۱۱
۲-۲-۲- تست کشش برای یک میله	۱۲
۲-۲-۳- فرمولسازی برای ثابت فنریت	۱۴
۲-۲-۴- فنرهای سری و فنرهای موازی	۱۵
۲-۲-۵- روابط فنرهای غیر خطی	۱۷
۲-۳- میرایی	۱۹
۲-۳-۱- میرایی داخلی	۱۹
۲-۳-۲- میرایی اصطکاکی	۲۰
۲-۳-۳- میرایی ویسکوز	۲۲

۲-۴- المان های میرا کننده ۲۳

۲-۴-۱- المان دمپر ساده ۲۴

۲-۴-۲- نمایش دمپر در سیستمهای مکانیکی ۲۷

۲-۴-۳- مکانیزم نگهدارنده در ۲۸

۲-۴-۴- ضربه گیر ۳۰

۲-۴-۵- دمپرهای لزجتی ۳۴

۲-۴-۶- تاثیر عدد رینولدز بر میرا کننده های ویسکوز ۳۹

۲-۴-۷-دمپرهای سری و دمپرهای موازی ۴۰

۲-۵- معادله دافینگ ۴۲

۲-۶- اندازه گیری میرایی در نوسانات میرا ۴۷

۲-۷- سیستم یک درجه آزادی ۵۰

۲-۷-۱- حرکت نوسانی یا حالت تحت میرا ۵۳

۲-۷-۲- حرکت غیر نوسانی یا حالت فوق میرا ۵۴

۲-۷-۳- حرکت با میرایی بحرانی ۵۵

۲-۸- سیستم های با دو یا چند درجه آزادی ۵۶

۲-۸-۱- تعامد بردارهای ویژه ۶۲

فصل سوم: بررسی روشهای حل و تحلیل انواع ارتعاشات غیر خطی ۶۴

۳-۱- روش عددی رانج کوتا ۶۵

۳-۲- روش پرتوربیشن ۶۷

۳-۲-۱- نوسان غیرخطی بلبرینگ ۶۹

۳-۲-۲- نوسانگر دافینگ ۷۳

۳-۳- روش هموتوپی پرتوربیشن ۷۵

۳-۳-۱- اساس روش هموتوپی پرتوربیشن ۷۶

۳-۳-۲- حرکت ارتعاشی یک پاندول ساده بدون در نظر گرفت اصطکاک ۷۸

۳-۳-۳- معادله ارتعاشی دافینگ ۸۰

۳-۴ روش حساب تغییرات تکراری ۸۲

۳-۴-۱- اساس روش حساب تغییرات تکراری ۸۲

۳-۴-۲- معادله ارتعاشی دافینگ از مرتبه غیرخطی سوم ۸۳

۳-۴-۳- نوسانات بلبرینگ ۸۵

۳-۵- روش بالانس انرژی ۸۶

۳-۵-۱- معادله ارتعاشی دافینگ ۸۸

۳-۵-۲- نوسانات غیر خطی بلبرینگ ۸۹

فصل چهارم: بررسی فرکانس طبیعی و معادلات حرکت در سیستم های غیر خطی ارتعاشاتی ۹۱

۴-۱- بررسی فرکانس طبیعی در معادلات غیر خطی ارتعاشاتی ۹۱

۴-۱-۱- محاسبه فرکانس طبیعی برای سیستم های کنسرواتیو با نیروهای الاستیک به شکل توابع چند جمله ای و نمایی ۹۱

۴-۱-۲- محاسبه فرکانس طبیعی برای نوسانگر غیر خطی دارای گسستگی ۱۰۱

۴-۱-۳- نوسانگر هارمونیک دافینگ ۱۰۴

۴-۱-۴- ارتعاشات غیر خطی جرم متصل به وسط یک سیم الاستیک ۱۰۵

۴-۱-۵- معادله ارتعاشی دافینگ با ضریب فنریت منفی ۱۰۸

۴-۱-۶- مدل ریاضی پاندول ساده با ارتعاشات آزاد غیر خطی ۱۱۰

۴-۱-۷- معادله دافینگ از مرتبه غیر خطی پنجم ۱۱۲

۴-۱-۸- نوسانگر غیر خطی با الاستیسته غیر خطی مرتبه n ۱۱۵

۴-۲- بررسی معادلات حرکت ضربه گیرهای غیر خطی ۱۱۷

۴-۲-۱- ارتعاشات ضربه گیر با نیروی میرا کننده غیر خطی متناسب با توان سوم سرعت ۱۱۸

۴-۲-۲- ارتعاشات ضربه گیر با نیروی میرا کننده خطی و نیروی میرا کننده غیر خطی متناسب با توان سوم سرعت ۱۲۱

۴-۲-۳- ارتعاشات ضربه گیر با میراگر و فنر غیر خطی ۱۲۳

۴-۲-۴- ارتعاشات با میرایی سازه ای ۱۲۶

فصل پنجم: نتیجه گیری و ارائه پیشنهادات ۱۳۰

۵-۱- خلاصه فعالیت های انجام شده در تحقیق و نتیجه گیری ۱۳۰

۵-۲- ارائه پیشنهادات ۱۳۳

پیوست ها ۱۳۴

منابع ۱۳۹

فهرست جداول

عنوان **صفحه**

جدول ۲-۱ مقدار ثابت فنریت برای چند المان مکانیکی ۱۵

جدول ۳-۱ محاسبات روش عددی رانج کوتا ۶۷

جدول ۴-۱ فرکانس طبیعی به ازای مقادیر مختلف جابه جایی اولیه A از دو روش بالانس انرژی و پارامتر اکسپندینگ (بخش ۴-۱-۱) ۹۴

جدول ۴-۲ فرکانس طبیعی به ازای مقادیر مختلف جابه جایی اولیه A از دو روش بالانس انرژی و پارامتر اکسپندینگ (بخش ۴-۱-۱) ۹۶

جدول ۴-۳ زمان ارتعاشات به ازای مقادیر مختلف جابه جایی اولیه A از دو روش بالانس انرژی و دقیق (بخش ۴-۱-۲) ۱۰۴

جدول ۴-۴ فرکانس ارتعاشات به ازای مقادیر مختلف جابه جایی اولیه A از دو روش بالانس انرژی و دقیق (بخش ۴-۱-۳) ۱۰۵

جدول ۴-۵ فرکانس ارتعاشات به ازای مقادیر مختلف جابه جایی اولیه A از دو روش بالانس انرژی و هارمونیک بالانس (بخش ۴-۱-۴) ۱۰۷

جدول ۴-۶ فرکانس ارتعاشات به ازای مقادیر مختلف جابه جایی اولیه A از دو روش بالانس انرژی و هموتوپی پرتوربیشن (بخش ۴-۱-۶) ۱۱۱

جدول ۴-۷ فرکانس ارتعاشات به ازای مقادیر مختلف جابه جایی اولیه A از دو روش بالانس انرژی و هموتوپی پرتوربیشن (بخش ۴-۱-۷) ۱۱۴

جدول ۴-۸ فرکانس ارتعاشات به ازای مقادیر مختلف جابه جایی اولیه A از دو روش بالانس انرژی و هارمونیک بالانس (n=0.5)، (بخش ۴-۱-۸) ۱۱۶

جدول ۴-۹ فرکانس ارتعاشات به ازای مقادیر مختلف جابه جایی اولیه A از دو روش بالانس انرژی و هارمونیک بالانس (n=0.8)، (بخش ۴-۱-۸) ۱۱۶

جدول ۴-۱۰ فرکانس ارتعاشات به ازای مقادیر مختلف جابه جایی اولیه A از دو روش بالانس انرژی و هارمونیک بالانس (n=2)، (بخش ۴-۱-۸) ۱۱۷

فهرست شکل ها

عنوان	صفحه
شکل ۱-۱ نمونه ای ساده از حرکت هارمونیک	۶
شکل۲-۱ فنر مارپیچ ساده	۱۱
شکل ۲-۲ تست کشش برای یک میله	۱۳
شکل ۲-۳ دو فنر موازی	۱۶
شکل ۲-۴ دو فنر سری	۱۶
شکل ۲-۵ یک فنر نرم، یک فنر سخت و یک فنر خطی	۱۸
شکل ۲-۶ منحنی هیسترزیس	۲۰
شکل ۲-۷ لغزش جسم روی سطح زبر	۲۱
شکل۲-۸ نمودار نیروی اصطکاک- سرعت	۲۲
شکل ۲- ۹ بلوکی که روی سطح روغن کاری شده ای می لغزد	۲۳
شکل ۲-۱۰ المان دمپر ساده	۲۵
شکل ۲-۱۱ نمودار میرایی غیر خطی	۲۶
شکل ۲-۱۲ نمایش دمپر در سیستم های مکانیکی	۲۷
شکل ۲-۱۳ دمپر پیچشی	۲۷
شکل ۲-۱۴ دمپر چرخشی	۲۸
شکل ۲-۱۵ مکانیزم نگهدارنده در	۲۸
شکل ۳-۱۶ اجزای مکانیزم نگهدارنده در	۲۹
شکل ۲-۱۷ دمپر چرخشی	۳۰
شکل ۲-۱۸ مکانیزم ضربه گیر	۳۱
شکل۲-۱۹ مکانیزم ضربه گیر با استفاده از شیر و فنر	۳۱
شکل ۲-۲۰ منحنی سرعت – نیرو برای حرکت پیستون و نیروی میرا کننده	۳۲
شکل۲-۲۱ منحنی سرعت – نیرو برای میرا کننده وابسته به جهت حرکت سیال	۳۲
شکل ۲-۲۲ ضربه گیر هواپیما	۳۳
شکل ۲-۲۳ منحنی پیش رونده، منحنی کاهنده و منحنی خطی میرایی	۳۴

شکل ۲-۲۴ یک صفحه متحرک با سرعت v روی لایه روغن ۳۵

شکل۲-۲۵ یاتاقان روغنی با لقی ε ۳۶

شکل ۲-۲۶ یک سیلندر پیستون شامل یک روزنه (یا اریفیس) ۳۸

شکل۲-۲۷ دو دمپر موازی ۴۱

شکل ۲-۲۸ دو میراکننده سری ۴۱

شکل۲-۲۹ تیر دو سرگیردار که تحت تحریک پایه مرتعش می شود ۴۳

شکل ۲-۳۰ پاندول ساده ۴۴

شکل۲-۳۱ جسمی به جرم m که به یک سیم کشیده شده با کشش اولیه T متصل می باشد ۴۶

شکل ۲-۳۲ نمودار کاهش دامنه در نوسانات میرا ۴۸

شکل۲-۳۳ سیستم یک درجه آزادی ۵۰

شکل۲-۳۴ حرکت نوسانی یا حالت تحت میرا ۵۴

شکل ۲-۳۵ حرکت غیر نوسانی یا حالت فوق میرا ۵۵

شکل ۲-۳۶ حرکت با میرایی بحرانی ۵۵

شکل۲-۳۷ سیستم دو درجه آزادی نامیرا ۵۹

شکل۳-۱ نوسان غیرخطی بلبرینگ ۶۹

شکل۳-۲ $u(t)$ به ازای $A=1, \varepsilon = 10$ ۷۳

شکل۳-۳ $u(t)$ به ازای $A=1, \varepsilon = 100$ ۷۳

شکل۳-۴ $u(t)$ به ازای $A=1, \varepsilon = 100$ ۷۵

شکل۳-۵ $u(t)$ به ازای $A=1, \varepsilon = 100$ ۷۵

شکل ۴-۱ مقایسه دو روش بالانس انرژی (خط پر) و پارامتر اکسپندینگ (خط چین) A=1 (بخش ۴-۱-۱) ۹۴

شکل ۴-۲ مقایسه دو روش بالانس انرژی (خط پر) و پارامتر اکسپندینگ (خط چین) A=100 (بخش ۴-۱-۱) ۹۵

شکل ۴-۳ مقایسه دو روش بالانس انرژی (خط پر) و پارامتر اکسپندینگ (خط چین) A=0.1 (بخش ۴-۱-۱) ۹۷

شکل ۴-۴ مقایسه دو روش بالانس انرژی (خط پر) و پارامتر اکسپندینگ (خط چین) A=1 (بخش ۴-۱-۱) ۹۷

شکل ۴-۵ مقایسه بالانس انرژی (خط پر) و دقیق(خط چین) A=0.1 (بخش ۴-۱-۱) ۹۹

شکل ۴-۶ مقایسه بالانس انرژی (خط پر) و دقیق(خط چین) A=100 (بخش ۴-۱-۱) ۹۹

شکل ۴-۷ مقایسه بالانس انرژی (خط پر) و دقیق(خط چین) A=1 (بخش ۴-۱-۱) ۱۰۱

شکل ۴-۸ مقایسه بالانس انرژی (خط پر) و دقیق(خط چین) A=10 (بخش ۴-۱-۱) ۱۰۱

شکل۴-۹ جسم به جرم m متصل به وسط یک سیم الاستیک ۱۰۵
شکل ۴-۱۰ مقایسه بالانس انرژی (خط پر) و هارمونیک بالانس (خط چین) A=1 (بخش ۴-۱-۴) ۱۰۸
شکل ۴-۱۱ مقایسه بالانس انرژی (خط پر) و هارمونیک بالانس (خط چین) A=10 (بخش ۴-۱-۴) ۱۰۸
شکل ۴-۱۲ پاندول ساده ۱۱۰
شکل ۴-۱۳ مقایسه بالانس انرژی (خط پر) و هموتوپی پرتوربیشن (خط چین) A=1.5 (بخش ۴-۱-۶) ۱۱۲
شکل ۴-۱۴ مقایسه بالانس انرژی (خط پر) و هموتوپی پرتوربیشن (خط چین) A=1 (بخش ۴-۱-۶) ۱۱۲
شکل ۴-۱۵ مقایسه بالانس انرژی (خط پر) و هموتوپی پرتوربیشن (خط چین) A=1 (بخش ۴-۱-۷) ۱۱۴
شکل ۴-۱۶ مقایسه بالانس انرژی (خط پر) و هموتوپی پرتوربیشن (خط چین) A=0.5 (بخش ۴-۱-۷) ۱۱۴
شکل ۴-۱۷ مقایسه روش عددی رانج کوتا (خط پر) و هموتوپی اصلاح شده (خط چین)، (بخش ۴-۲-۱) ۱۲۰
شکل ۴-۱۸ مقایسه روش عددی رانج کوتا (خط پر) و هموتوپی اصلاح شده (خط چین)، (بخش ۴-۲-۲) ۱۲۳
شکل ۴-۱۹ مقایسه روش عددی رانج کوتا (خط پر) و هموتوپی اصلاح شده (خط چین)، (بخش ۴-۲-۳) ۱۲۵
شکل ۴-۲۰ مقایسه روش عددی رانج کوتا (خط پر) و هموتوپی اصلاح شده (خط چین)، (بخش ۴-۲-۴) ۱۲۸
شکل ۴-۲۱ مقایسه روش عددی رانج کوتا (خط پر) و هموتوپی اصلاح شده (خط چین)، (بخش ۴-۱-۸) ۱۲۹

فهرست علائم لاتین

T	زمان تناوب یا پریود نوسانات
t	زمان
x	فاصله از موقعیت تعادل
A	دامنه نوسان
f_n	فرکانس طبیعی
L	طول آزاد فنر
k	ثابت فنر
f	نیرو
E	مدول الاستیسیته
G	مدول برشی
L	طول میله
D	قطر میله
d	قطر سیم فنر
R	شعاع حلقه فنر مارپیچ
h	طول سطح مقطع تیر
w	عرض سطح مقطع تیر
P	فشار
V	حجم

A	مساحت سطح مقطع
k_1	ضریب فنریت خطی
k_2	ضریب فنریت غیر خطی
N	N نیروی عمود بر سطح
m	جرم
g	شتاب جاذبه گرانشی
v	سرعت
c	ضریب میرا کنندگی
T	گشتاور
y	فاصله نسبت به یک نقطه مرجع
u	سرعت سیال
d	ارتفاع لایه سیال
$f(x)$	نیروی فنر
$\frac{du}{dy}$	گرادیان سرعت یک بعدی درون سیال در مختصات کارتزین
D	قطر شافت
$\frac{du}{dr}$	گرادیان سرعت یک بعدی درون سیال در مختصات قطبی
ΔP	اختلاف فشار
R	ضریب ثابت در معادله نرخ شارش جرم از داخل یک روزنه
q	نرخ شارش جرم از داخل یک روزنه

$f(x)$	تابعی تحلیلی از تغییر مکان
$g(\dot{x})$	تابعی تحلیلی از سرعت
n	عدد ثابت بزرگتر از یک
m	عدد ثابت کوچکتر از یک
w(x,t)	یک مود ارتعاشی در ارتعاش تحریک از پلیه یک تیر دو سر گیردار
U	انرژی کرنشی
g(x)	تابع وابسته به مکان
q(t)	تابع وابسته به زمان
I	ممان اینرسی سطح مقطع تیر
p_0	دامنه نیروی تحریک
L	طول پاندول
G	شتاب جاذبه گرانشی
θ	زاویه انحراف پاندول
x,y	جهت محورهای مختصات
n,t	جهت های محور مختصات مماسی
K.E	انرژی جنبشی پاندول
P.E	انرژی پتانسیل پاندول
y	جابه جایی عمودی جرم
T	کشش اولیه در سیم
L	طول سیم

$a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+m}$	دامنه در نوسانات میرا
Δa_n	اختلاف بین دو دامنه در نوسانات میرا
Δw	انرژی تلف شده در یک سیکل در نوسانات میرا
w	کل انرژی سیکل در نوسانات میرا
$a(t)$	دامنه در نوسانات میرا
s	متغیر معادله مشخصه
A، B	مقادیر ثابت در حل معادله مشخصه
i	عدد مختلط
c_c	میرایی بحرانی
ϕ, X, C_1, C_2	مقادیر ثابت در حل معادله مشخصه وابسته به شرایط اولیه
T_d	زمان نوسانات میرا
N	تعداد درجات آزادی
T	انرژی جنبشی
U	انرژی پتانسیل
$q_1, q_2, \ldots q_n$	محورهای مختصات دلخواه
[M]	ماتریس جرم
$[K]$	ماتریس سختی
$[C]$	ماتریس میرایی
M_{ii}	جرم تعمیم یافته

K_{ii}	سختی تعمیم یافته
$f(t)$	تابع زمانی
$F(x,\dot{x},t)$	تابعی غیر خطی از زمان، مکان و سرعت
$h,\Delta t$	گام زمانی در روش رانج کوتا
T_i, X_i, Y_i, F_i	مقادیر محاسبه شده در روش رانج کوتا
u	جا به جایی از موقعیت تعادل
A	تغییر مکان اولیه
$u_0, u_1, u_2, \ldots$	تقریب هایی از جواب معادله ارتعاشی
a,b,c	مقادیر ثابت
A	عملگر دیفرانسیل کلی در روش هموتوپی پرتوربیشن
f(r)	تابع تحلیلی معلوم در روش هموتوپی پرتوربیشن
B	یک عملگر مرزی
$L(u)$	قسمت خطی معادله دیفرانسیل
$N(u)$	قسمت غیر خطی معادله دیفرانسیل
$H(v,p)$	تابع هموتوپی
u	زاویه انحراف از موقعیت تعادل بری پاندول غیر خطی
$v_1, v_2, v_3, \ldots$	جواب های تقریبی معادله دیفرانسیل در روش هموتوپی پرتوربیشن
$p^0, p^1, p^2, \ldots$	عبارات شامل مجموع جملات ضریب p با توان ۱و۲و۳ در روش هموتوپی پرتوربیشن

$\tilde{\tilde{u}}_n$	متغیر محدود
f	تابع پتانسیل در روش بالانس انرژی
H	تابع هامیلتونین در روش بالانس انرژی
$J(u)$	تابع تغییرات در روش بالانس انرژی
E	انرژی جنبشی
T	انرژی پتانسیل
$R(t)$	تابع باقی مانده در روش بالانس انرژی
d,a	فاصله طولی
f(u)	یک تابع غیرخطی از مرتبه n ام u

بالانویس

.	مشتق مرتبه اول نسبت به زمان
..	مشتق مرتبه دوم نسبت به زمان
~	متغیر محدود