فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم اولیه و معرفی برخی توابع خاص

۱ــ۱ توابع پایه حساب کسری

مقدمه:

می دانیم توابع متعالی نقش بسیار مهمی در حساب کسری دارند که حساب مربوط به مشتق و انتگرال گیری با مرتبه کسری نیازمند به این توابع همراه با خواصشان می باشد، لذا مناسب دیده می شود به معرفی توابعی نظیر گاما، بتا، میتاگ ــ لفلر که در حل تحلیلی و عددی معادلات دیفرانسیل کسری مورد استفاده قرار می گیرند، بپردازیم.

۱ــ۱ــ۱ تابع گاما

تابع گاما که با $\Gamma(z)$ نمایش داده می شود چنین تعریف میگردد:

$$\Gamma(z) = \int_{0}^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \tag{1.1}$$

به سادگی ملاحظه می شود

$$\begin{aligned}\Gamma(x+iy) &= \int_{0}^{\infty} e^{-t} t^{x-1+iy} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-t} t^{x-1} e^{iylog(t)} dt \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-t} t^{x-1} [cos(y\, log(t)) + isin(y\, log(t))] dt.\end{aligned}$$

لذا عبارت داخل براکت انتگرال فوق، به ازای هر t کراندار است ، همگرایی در بی نهایت با وجود عامل e^{-t} برقرار می شود، برای همگرایی در $t = 0$ باید $Re(z) > 1$ باشد.

- **خواصی از تابع گاما**

برخی از خواص مهم تابع گاما رادر زیر بیان می کنیم .

$$i)\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

$$ii)\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)...(z+n)}$$

$$iii)\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+k)}{z(z+1)...(z+k-1)} \quad z \neq 0, -1, -2, ..., -k+1, \quad Re(z) > -k$$

$$iv)\Gamma(z)\Gamma(z-1)=\frac{\pi}{sin(\pi z)} \quad z\neq 0,\pm 1,\pm 2,...$$

$$v)\Gamma(n+1)=n! \quad n=0,1,2,...$$

$$vi)\Gamma(n+1)\simeq\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n} \quad n\to\infty$$

$$vii)log\Gamma(z)=\int_0^\infty [z-1-\frac{1-exp\,(z-1)t}{1-exp\,(-t)}]\frac{e^{-tz}}{t}dt, \quad Re(z)>0$$

که دستورهای (vi) و (vii) به ترتیب منسوب به استرلینگ و مالمستن[1] می باشند.[برای دیدن اثبات روابط فوق به مرجع[۱۶] و [۲۸] مراجعه شود]

۱–۱–۲ تابع بتا

تابع بتا که به صورت $B(x,y)$ نمایش داده می شود چنین تعریف می گردد:

$$B(x,y)=\int_0^1 \tau^{x-1}(1-\tau)^{y-1}d\tau, \quad Re(x)>0\,,\,Re(y)>0 \qquad (۲.۱)$$

ملاحظه می شود رابطه بین تابع گاما و تابع بتا به صورت زیر می باشد:

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad (۳.۱)$$

- **خواصی از تابع بتا**

$$i)B(x,y)=B(y,x)$$

$$ii)B(x,y+1)=\frac{y}{x}B(x+1,y)=\frac{y}{x+y}B(x,y)$$

$$iii)B(x,y)B(x+y,z)=B(y,z)B(y+z,x)=B(z,x)B(z+x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)\Gamma(z)}{\Gamma(x+y+z)}$$

$$iv)B(\frac{x}{z},y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t^z)^{y-1}dt, \quad z>0$$

البته به کمک تابع بتا می توان خاصیت هایی از تابع گاما را نیز به دست آورد

$$\Gamma(z)\Gamma(z-1)=\frac{\pi}{sin(\pi z)} \quad z\neq 0,\pm 1,\pm 2,...$$

[1] malmeston

اگر در رابطه فوق $z = \frac{1}{2}$ باشد در این صورت داریم :

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

همچنین خاصیت دیگر عبارت است از:

$$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\, 2^{2z-1}\,\Gamma(2z) \quad 2z \neq 0, -1, -2, ...$$

که با قراردادن $z = n + \frac{1}{2}$ در آن به مجموعه ای از مقادیر خاص تابع گاما به صورت زیر می رسیم

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2n+1)}{2^{2n}\,\Gamma(n+1)} = \frac{\sqrt{\pi}\,(2n)!}{2^{2n}\,n!}$$

برای اثبات روابط بالا به مرجع [۲۸] مراجعه شود.

۱–۱–۳ تابع میتاگ – لفلر

تابع میتاگ – لفلر تابع مهمی است که در زمینه حساب کسری مورد استفاده فراوانی قرار می گیرد. میتاگ – لفلر ریاضیدان سوئدی تعاریف پایه ای مربوط به این تابع را ارائه داده است [۲۱، ۲۰]. تابع $E_\alpha(z)$ که به صورت زیر تعریف شده است راتابع تک پارامتری میتاگ – لفلر[۲] گویند:

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad \alpha \geq 0 \tag{۴.۱}$$

در واقع این تابع تعمیمی از تابع نمایی است .

بویژه به ازای $\alpha = 1$ و $\alpha = 2$:

$$E_1(z) = e^z \quad , \quad E_2(z) = cosh(\sqrt{z})$$

تابع دو پارامتری میتاگ – لفلرکه توسط آگراوال[۳] [۲] ارائه شده، چنین است:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (\alpha \geq 0,\, \beta \geq 0) \tag{۵.۱}$$

[۲] G. M. Mittag Leffler

[۳] R. P. Agrawal

لذا ملاحظه می شود

$$
\begin{aligned}
E_{\alpha,1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} = E_\alpha(z) \\
E_{1,1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = e^z \\
E_{1,2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{e^z-1}{z} \\
E_{2,1}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k+1)!} = cosh(z) \\
E_{2,2}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{sinh(z)}{z}
\end{aligned}
$$

بنابراین طبق دو خاصیت اخیرداریم که $sinh$ و $cosh$ نیز نمونه هایی خاص از تابع میتاگ — لفلر دو پارامتری (۵.۱) هستند.

۱—۲ حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری

مقدمه:

بسیاری از پدیده ها در مسائل فیزیک، شیمی و دیگر علوم را می توان با استفاده از ابزار ریاضی حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری به صورت مدل ریاضی بیان کرد. تعاریف زیادی در خصوص مفهوم مشتق و انتگرال از مرتبه غیرصحیح وجود دارد. در این فصل تعاریف گرانولد — لتنیکوف، ریمان لیوویل و کاپوتو را ارائه می دهیم .

۱—۲—۱ مشتق و انتگرال کسری گرانوالد — لتنیکوف

فرض کنیم تابع f در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد که از این پس با علامت $f(x) \in C[a,b]$ نشان می دهیم.می دانیم مشتق مرتبه اول تابع $f(x)$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$
f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \qquad (6.1)
$$

به کمک تعریف فوق مشتق مرتبه دوم بصورت زیر بدست می آید:

$$f''(x) = \frac{d^{2}f}{dx^{2}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^{2}} \tag{7.1}$$

بسادگی ملاحظه می شود:

$$f'''(x) = \frac{d^{3}f}{dx^{3}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - 3f(x-h) + 3f(x-2h) - f(x-3h)}{h^{3}} \tag{8.1}$$

با ادامه همین روند و به کمک استقراء ملاحظه می شود

$$f^{n}(x) = \frac{d^{n}f}{dx^{n}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{n}} \sum_{r=0}^{n} (-1)^{r} \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} f(x-rh) \tag{9.1}$$

که در آن:

$$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!} = \frac{\Gamma(n+1)}{r!\,\Gamma(n-r+1)} \tag{10.1}$$

در تعمیم مفهوم قبل به جای عدد صحیح n، عدد حقیقی α (یا حتی مختلط) قرار داده، عبارت زیر را در نظر می گیریم :

$$f_{h}^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{r=0}^{n} (-1)^{r} \begin{pmatrix} \alpha \\ r \end{pmatrix} f(x-rh) \tag{11.1}$$

که در آن:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ r \end{pmatrix} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{r!\,\Gamma(\alpha-r+1)}$$

که با گرفتن حد از عبارت (۱۱.۱) داریم :

$$f^{(\alpha)}(x) = \lim_{h\to 0} f_{h}^{(\alpha)}(x) = {}_{a}D_{x}^{\alpha} = \frac{1}{h^{\alpha}} \lim_{h\to 0} \sum_{r=0}^{\frac{x-a}{h}} (-1)^{r} \begin{pmatrix} \alpha \\ r \end{pmatrix} f(x-rh) \tag{12.1}$$

در رابطه بالا مقدار $f^{(\alpha)}(x)$ را با نماد ${}_{a}D_{x}^{\alpha}f(x)$ مشخص می کنیم که یک عملگر خاص اعمال شده بر تابع $f(x)$ را مشخص می کند و a و x حدود بالا و پایین مربوط به این عملگر هستند.

عبارت (۱۲.۱) تعریف مشتق گرانولد – لتنیکوف از مرتبه دلخواه α تابع $f(x)$ می باشد. با محاسبه حد عبارت (۱۲.۱) به رابطه زیر می رسیم

$$\begin{aligned} {}_a^G D_x^\alpha f(x) &= \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)\,(x-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)} \int_a^x (x-\tau)^{m-\alpha} f^{(m+1)}(\tau)d\tau \qquad (۱۳.۱) \end{aligned}$$

برای اثبات رابطه بالا از قضیه زیر استفاده می کنیم

قضیه ۱.۱ گیریم $\alpha_{n,k}$ و β_k دنباله هایی به صورت زیر باشند:

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to\infty} \beta_k = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_{n,k} = 0 \quad \forall k, \\ &\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k} = A \quad \forall k, \quad \sum_{k=1}^{n} \mid \alpha_{n,k} \mid < K \quad \forall n. \end{aligned}$$

سپس خواهیم داشت :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k}\beta_k = A.$$

اثبات: برای به دست آوردن رابطه (۱۲.۱) به صورت زیر عمل می کنیم :

ابتدا این رابطه را به شکل زیر تغییر می دهیم، برای این کار از خاصیت ضرائب دوجمله ای استفاده می کنیم

$$\binom{\alpha}{r} = \binom{\alpha-1}{r} + \binom{\alpha-1}{r-1}$$

بنابراین می توان نوشت :

$$\begin{aligned} f_h^{(\alpha)}(x) &= h^{-\alpha} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{\alpha-1}{r} f(x-rh) \\ &\quad + h^{-\alpha} \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \binom{\alpha-1}{r-1} f(x-rh) \\ &= h^{-\alpha} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{\alpha-1}{r} f(x-rh) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+h^{-\alpha}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{r+1}\begin{pmatrix}\alpha-1\\ r\end{pmatrix}f(x-(r+1)h)\\
=\;&(-1)^{n}\begin{pmatrix}\alpha-1\\ n\end{pmatrix}h^{-\alpha}f(a)\\
&+h^{-\alpha}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{r+1}\begin{pmatrix}\alpha-1\\ r\end{pmatrix}\triangle f(x-rh), \qquad (۱۴.۱)
\end{aligned}
$$

که در آن :

$$
\triangle f(x-rh)=f(x-rh)-f(x-(r+1)h). \qquad (۱۵.۱)
$$

حال با به کار بردن ضرائب دوجمله ای در رابطه (۱۴.۱) و تکرار این امر بعد از m مرتبه خواهیم داشت :

$$
\begin{aligned}
f_h^{(\alpha)}(x)\;=\;&(-1)^{n}\begin{pmatrix}\alpha-1\\ n\end{pmatrix}h^{-\alpha}f(a)+(-1)^{n-1}\begin{pmatrix}\alpha-2\\ n-1\end{pmatrix}h^{-\alpha}\triangle f(a+h)\\
&+h^{-\alpha}\sum_{r=0}^{n-2}(-1)^{r}\begin{pmatrix}\alpha-2\\ r\end{pmatrix}\triangle^{2}f(x-rh)\\
=\;&(-1)^{n}\begin{pmatrix}\alpha-1\\ n\end{pmatrix}h^{-\alpha}f(a)+(-1)^{n-1}\begin{pmatrix}\alpha-2\\ n-1\end{pmatrix}h^{-\alpha}\triangle f(a+h)\\
&+(-1)^{n-2}\begin{pmatrix}\alpha-3\\ n-3\end{pmatrix}h^{-\alpha}\triangle^{2}f(a+2h)\\
&+h^{-\alpha}\sum_{r=0}^{n-3}(-1)^{r}\begin{pmatrix}\alpha-3\\ r\end{pmatrix}\triangle^{3}f(x-rh)\\
=\;&\ldots\\
=\;&\sum_{k=0}^{m}(-1)^{n-k}\begin{pmatrix}\alpha-k-1\\ n-k\end{pmatrix}h^{-\alpha}\triangle^{k}f(a+kh)\\
&+h^{-\alpha}\sum_{r=0}^{n-m-1}(-1)^{r}\begin{pmatrix}\alpha-m-1\\ r\end{pmatrix}\triangle^{m+1}f(x-rh). \qquad (۱۶.۱)
\end{aligned}
$$

حال در این قسمت حد مجموع اول را محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}(-1)^{n-k}\begin{pmatrix}\alpha-k-1\\ n-k\end{pmatrix}h^{-\alpha}\triangle^k f(a+kh)\\
=\ &\lim_{h\to 0}(-1)^{n-k}\begin{pmatrix}\alpha-k-1\\ n-k\end{pmatrix}(n-k)^{\alpha-k}\times(\frac{n}{n-k})^{\alpha-k}(nh)^{-\alpha+k}\,\frac{\triangle^k f(a+kh)}{h^k}\\
=\ &(x-a)^{-\alpha+k}\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-k}\begin{pmatrix}\alpha-k-1\\ n-k\end{pmatrix}(n-k)^{\alpha-k}\\
&\qquad\qquad\times\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n-k})^{\alpha-k}\times\lim_{h\to 0}\frac{\triangle^k f(a+kh)}{h^k}\\
&=\frac{f^{(k)}(a)\,(x-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)}
\end{aligned}$$

زیرا:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-k}\begin{pmatrix}\alpha-k-1\\ n-k\end{pmatrix}(n-k)^{\alpha-k}=\frac{1}{\Gamma(-\alpha-k-1)},\\
&\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n-k})^{\alpha-k}=1,\\
&\lim_{h\to 0}\frac{\triangle^k f(a+kh)}{h^k}=f^{(k)}(a).
\end{aligned}$$

حال برای به دست آوردن حد مجموع دوم، آن را به فرم زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)}\ &\sum_{r=0}^{n-m-1}(-1)^r\,\Gamma(-\alpha+m+1)\begin{pmatrix}\alpha-m-1\\ r\end{pmatrix}r^{-m+\alpha}\\
&\times h\,(rh)^{m-\alpha}\frac{\triangle^{m+1}f(x-rh)}{h^{m+1}}.
\end{aligned}$$

سپس، طبق قضیه (۱.۱) خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}
\beta_r &= (-1)^r\Gamma(-\alpha+m+1)\begin{pmatrix}\alpha-m-1\\ r\end{pmatrix}r^{-m+\alpha},\\
\alpha_{n,r} &= h\,(rh)^{m-\alpha}\frac{\triangle^{m+1}f(x-rh)}{h^{m+1}},\quad h=\frac{x-a}{n}.
\end{aligned}$$

داریم :

$$\lim_{r\to\infty}\beta_r = \lim_{r\to\infty}(-1)^r\Gamma(-\alpha+m+1)\begin{pmatrix}\alpha-m-1\\ r\end{pmatrix}r^{-m+\alpha} = 1. \qquad (17.1)$$

به علاوه، اگر$m-\alpha>-1$ آنگاه :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{n-m-1}\alpha_{n,r} &= \lim_{h\to 0}\sum_{r=0}^{n-m-1} h\,(rh)^{m-\alpha}\frac{\triangle^{m+1}f(x-rh)}{h^{m+1}}\\ &= \int_a^x (x-\tau)^{m-\alpha}f^{m+1}(\tau)d\tau. \qquad (18.1)\end{aligned}$$

حال با استفاده از رابطه (۱۷.۱) و (۱۸.۱) و همچنین با استفاده از قضیه (۱.۱) خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}h^{-\alpha}\sum_{r=0}^{n-m-1}(-1)^r\begin{pmatrix}\alpha-m-1\\ r\end{pmatrix}\triangle^{m+1}f(x-rh)\\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)}\int_a^x (x-\tau)^{m-\alpha}f^{m+1}(\tau)d\tau \qquad (19.1)\end{aligned}$$

بنابراین از روابط بالا، نتیجه زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned}{}_a^G D_x^\alpha f(x) &= \sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(a)\,(x-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)}\\ &+\frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)}\int_a^x (x-\tau)^{m-\alpha}\,f^{(m+1)}(\tau)d\tau \qquad (20.1)\end{aligned}$$

□

در دستور بالا $f^{(k)}(x)$ $(k=1,2,...,m+1)$ در فاصله $[a,x]$ پیوسته فرض شده اند همچنین $m\in N$ و $m<\alpha<m+1$ می باشد.

با جایگزین کردن α در عبارت (۱۲.۱)با $-\alpha$ به رابطه زیر می رسیم

$${}_a^G D_x^{-\alpha}f(x) = \lim_{h\to 0}h^{\alpha}\sum_{r=0}^{\frac{x-a}{h}}(-1)^r\begin{pmatrix}-\alpha\\ r\end{pmatrix}f(x-rh) \qquad (21.1)$$

که در آن

$$\begin{pmatrix}-\alpha\\ r\end{pmatrix} = \frac{(-1)^r\,\Gamma(\alpha+1)}{r!\,\Gamma(\alpha)}, \quad \alpha>0$$

حال عبارت (۱۱.۱) را برای حالت های مختلف بررسی می کنیم

برای $\alpha = 1$ داریم:

$$f_h^{(-1)}(x) = h \sum_{r=0}^{n} f(x - rh) \tag{۲۲.۱}$$

با توجه به پیوستگی تابع f و اینکه $x - nh = a$، نتیجه می گیریم که:

$$\lim_{h\to 0} f_h^{(-1)}(x) = {}_aD_x^{-1} = \int_0^{nh=x-a} f(x-z)dz = \int_a^x f(\tau)d\tau. \tag{۲۳.۱}$$

برای $\alpha = 2$ داریم:

$$f_h^{(-2)}(x) = h \sum_{r=0}^{n} (r+1)\, h\, f(x - rh) \tag{۲۴.۱}$$

با تغییر متغیر $y = x + h$ داریم

$$f_h^{(-2)}(y - h) = h \sum_{r=0}^{n+1} (rh)\, f(y - rh) \tag{۲۵.۱}$$

حال با توجه به اینکه اگر $h \to 0$، آنگاه $y \to x$:

$$\lim_{h\to 0} f_h^{(-2)}(x) = {}_aD_x^{-2} = \int_0^{x-a} zf(x-z)dz = \int_a^x (x-\tau)f(\tau)d\tau. \tag{۲۶.۱}$$

با ادامه این روند و محاسبه مقادیر بالاتر برای α وبه کمک استقراء به عبارت زیر می رسیم

$$\begin{aligned} {}_aD_x^{-\alpha} f(x) &= \lim_{h\to 0} h^\alpha \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \begin{pmatrix} -\alpha \\ r \end{pmatrix} f(x - rh) \\ &= \frac{1}{(\alpha-1)!} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{۲۷.۱}$$

که عبارت (۲۷.۱) به انتگرال کسری گرانولد − لتنیکوف معروف است.

با انتگرال گیری جزء به جزء و به شرط آنکه $f'(x)$ پیوسته باشد خواهیم داشت :

$${}_a^GD_x^{-\alpha} f(x) = \frac{f(a)\,(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x (x-\tau)^\alpha\, f'(\tau)d\tau \tag{۲۸.۱}$$

حال به شرط آنکه $f(x)$، $m+1$ بار مشتق پیوسته داشته باشد خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} {}_a^G D_x^{-\alpha} f(x) &= \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)\,(x-a)^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha+m+1)} \int_a^x (x-\tau)^{m+\alpha}\, f^{(m+1)}(\tau) d\tau \end{aligned} \qquad (۲۹.۱)$$

شرح کامل اثبات در مرجع [۲۸] آمده است .

- **ترکیب مشتق کسری گرانوالد — لتنیکوف با مشتق مرتبه صحیح**

مشتق مرتبه n مشتق کسری مرتبه α به صورت زیر محاسبه شده است [۲۸]

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n}\left({}_a^G D_x^{\alpha} f(x) \right) &= \sum_{k=0}^{m+n} \frac{f^{(k)}(a)\,(x-a)^{-\alpha-n+k}}{\Gamma(-\alpha-n+k+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)} \int_a^x (x-\tau)^{(m-\alpha)}\, f^{(m+n+1)}(\tau) d\tau \end{aligned} \qquad (۳۰.۱)$$

و به عکس برای مشتق کسری مرتبه α مشتق مرتبه n داریم :

$$\begin{aligned} {}_a^G D_x^{\alpha}\left(\tfrac{d^n}{dx^n} f(x) \right) &= \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(n+k)}(a)\,(x-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)} \int_a^x (x-\tau)^{(m-\alpha)}\, f^{(m+n+1)}(\tau) d\tau \end{aligned} \qquad (۳۱.۱)$$

ملاحظه می گردد که با جابجایی ترتیب مشتق گیری، این دو عبارت (دو ترکیب مشتق) برابر نیستند اما اگر

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad (k = 0, 1, ..., n-1)$$

خواهیم داشت :

$$\frac{d^n}{dx^n}\left({}_a^G D_x^{\alpha} f(x) \right) = {}_a^G D_x^{\alpha}\left(\tfrac{d^n}{dx^n} f(x) \right) = {}_a^G D_x^{\alpha+n} f(x) \qquad (۳۲.۱)$$

- **ترکیب مشتق و انتگرال کسری گرانوالد – لتنیکوف با مشتق وانتگرال مرتبه کسری**

در این قسمت روابط بدست آمده از بررسی مشتق وانتگرال کسری از مرتبه β ی یک مشتق وانتگرال کسری از مرتبه α را ارائه می دهیم :

$$
\begin{aligned}
&i) \quad {}_a^G D_x^{-\beta}\left({}_a^G D_x^{-\alpha} f(x) \right) = {}_a^G D_x^{-(\alpha+\beta)} f(x), \quad \alpha\,,\,\beta > ۰\\
&ii) \quad {}_a^G D_x^{\beta}\left({}_a^G D_x^{-\alpha} f(x) \right) = {}_a^G D_x^{-\alpha+\beta} f(x), \quad \alpha > ۰,\ ۰ < n < \beta < n+۱\\
&iii) \quad {}_a^G D_x^{-\beta}\left({}_a^G D_x^{\alpha} f(x) \right) = {}_a^G D_x^{\alpha-\beta} f(x), \quad \beta > ۰,\ ۰ \le m < \alpha < m+۱\\
&iv) \quad {}_a^G D_x^{\beta}\left({}_a^G D_x^{\alpha} f(x) \right) = {}_a^G D_x^{\alpha+\beta} f(x), \quad ۰ \le n < \beta < n+۱,\ ۰ \le m < \alpha < m+۱
\end{aligned}
\tag{۳۳.۱}
$$

البته در شرط (iii) و (iv) بایستی به ترتیب شروط زیر برقرار باشد:

$$f^{(k)}(a) = ۰, \quad (k = ۰, ۱, ..., m-۱)$$

$$f^{(k)}(a) = ۰, \quad (k = ۰, ۱, ..., r-۱)$$

که $r = max(m,n)$ است .

۱–۲–۲　مشتق کسری ریمان لیوویل

فرض می کنیم $f \in C[a,b]$، مشتق ریمان لیوویل از مرتبه دلخواه α به طوری که $n-۱ < \alpha \le n$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$ {}_aD_x^{\alpha} f(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{۱}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x f(t)\,(x-t)^{n-\alpha-۱} dt \right] \tag{۳۴.۱}$$

$$ {}_xD_b^{\alpha} f(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{۱}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b f(t)\,(x-t)^{n-\alpha-۱} dt \right] \tag{۳۵.۱}$$

تعاریف (۳۴.۱) و(۳۵.۱) به ترتیب مشتق کسری چپ و راست ریمان لیوویل نامیده می شوند.[۱۶، ۲۹]

• **برخی خواص مشتق کسری ریمان لیوویل**

۱)برای مقدار ثابت c، مشتق کسری ریمان لیوویل برابر است با

$$ {}_{\circ}D_x^{\alpha}\, c = \frac{c\, x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \tag{۳۶.۱} $$

۲)مشتق کسری ریمان لیوویل x^{γ}، $\gamma > -1$ برابر است با

$$ {}_{\circ}D_x^{\alpha}\, x^{\gamma} = \frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma-\alpha)}, \quad n-1 \leqslant \alpha < n \tag{۳۷.۱} $$

۳) فرض می کنیم $f \in C[a,b]$ و α عدد حقیقی دلخواه باشد $n-1 \leqslant \alpha < n$ و $m-1 \leqslant \beta < m$، اگر $r = max(m,n)$، در اینصورت داریم :

$$ {}_aD_x^{\alpha}\left[\ {}_aD_x^{\beta}\, f(x)\ \right] = {}_aD_x^{\beta}\left[\ {}_aD_x^{\alpha}\, f(x)\ \right] = {}_aD_x^{\alpha+\beta}\, f(x) \tag{۳۸.۱} $$

به شرطی که :

$$ f^{(j)}(a) = 0, \quad (j = 1, 2, 3, ..., r-1) $$

• **ترکیب مشتق کسری ریمان لیوویل با مشتق مرتبه صحیح**

مشتق مرتبه صحیح n مشتق کسری مرتبه α به صورت زیراست

$$ \frac{d^n}{dx^n}\left[\ {}_aD_x^{\alpha}\, f(x)\ \right] = {}_aD_x^{\alpha+n}\, f(x) \tag{۳۹.۱} $$

و به عکس برای مشتق کسری مرتبه α مشتق مرتبه صحیح n داریم :

$$ {}_aD_x^{\alpha}\left[\ \tfrac{d^n}{dx^n}\, f(x)\ \right] = {}_aD_x^{\alpha+n}\, f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)\,(x-a)^{k-\alpha-n}}{\Gamma(k+1-\alpha-n)} \tag{۴۰.۱} $$

اگر

$$ f^{(k)}(a) = 0, \quad (k = 1, 2, 3, ..., n-1) $$

آنگاه داریم :

$$ \frac{d^n}{dx^n}\left(\ {}_aD_x^{\alpha}\, f(x)\ \right) = {}_aD_x^{\alpha}\left(\ \tfrac{d^n}{dx^n}\, f(x)\ \right) = {}_aD_x^{\alpha+n}\, f(x) \tag{۴۱.۱} $$

• **ترکیب مشتق کسری ریمان لیوویل با مشتق مرتبه کسری**

فرض می کنیم $m - 1 \leqslant \alpha < m$ و $n - 1 \leqslant \beta < n$، آنگاه ترکیب دو مشتق کسری ریمان لیوویل ${}_aD_x^{\alpha}$ و ${}_aD_x^{\beta}$ عبارت زیر را به دست می دهد

$$ {}_aD_x^{\alpha}\left({}_aD_x^{\beta} f(x) \right) = {}_aD_x^{\alpha+\beta} f(x) - \sum_{j=1}^{n} \left[{}_aD_x^{\beta-j} f(x) \right]_{x=a} \frac{(x-a)^{-\alpha-j}}{\Gamma(1-\alpha-j)} \qquad (۴۲.۱)$$

با جابجا کردن α و β داریم :

$$ {}_aD_x^{\beta}\left({}_aD_x^{\alpha} f(x) \right) = {}_aD_x^{\alpha+\beta} f(x) - \sum_{j=1}^{m} \left[{}_aD_x^{\alpha-j} f(x) \right]_{x=a} \frac{(x-a)^{-\beta-j}}{\Gamma(1-\beta-j)} \qquad (۴۳.۱)$$

بنابراین عملگرهای مشتق کسری ریمان لیوویل برای $\alpha \neq \beta$ خاصیت جابجایی ندارند. در صورتی که شروط زیر برقرار باشند این عملگرها خاصیت جابجایی پیدا خواهند کرد

$$\begin{aligned} \left[{}_aD_x^{\alpha-j} f(x) \right]_{x=a} &= 0, \quad (j = 1, 2, ..., m) \\ \left[{}_aD_x^{\beta-j} f(x) \right]_{x=a} &= 0, \quad (j = 1, 2, ..., n) \end{aligned} \qquad (۴۴.۱)$$

یعنی داریم :

$$ {}_aD_x^{\alpha}\left({}_aD_x^{\beta} f(x) \right) = {}_aD_x^{\beta}\left({}_aD_x^{\alpha} f(x) \right) = {}_aD_x^{\alpha+\beta} f(x) \qquad (۴۵.۱)$$

۱–۲–۳ انتگرال کسری ریمان لیوویل

انتگرال کسری ریمان لیوویل با تعمیم فرمول کوشی بدست می آید، فقط کافیست عدد صحیح n در فرمول کوشی را به مقادیر غیر صحیح (اعداد حقیقی یا حتی مختلط) تعمیم دهیم در این صورت به انتگرال کسری ریمان لیوویل می رسیم . فرمول انتگرال کوشی را به صورت زیر داریم :

$$\int_a^x dt \int_a^{x_1} dt ... \int_a^{x_{n-1}} f(t)dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f(t)\,(x-t)^{n-1}dt \qquad (۴۶.۱)$$

با فرض اینکه $f \in C[a, b]$ و $\alpha > 0$ انتگرال کسری ریمان لیوویل به صورت زیر تعریف می شود:

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x f(t)\,(x-t)^{\alpha-1}dt \quad x > a \qquad (۴۷.۱)$$

$$I_{b^-}^{\alpha}\, f(x) \;=\; \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b f(t)\,(x-t)^{\alpha-1} dt \quad x\;<\;b \tag{۴۸.۱}$$

تعاریف (۴۷.۱) و(۴۸.۱) به ترتیب انتگرال کسری چپ و راست ریمان لیوویل نامیده می شوند.[۱٦]

نکته ۲.۱ لازم به تذکر است به جای نوشتن $I_{0^+}^{\alpha}\, f(x)$ از $I^{\alpha}\, f(x)$ استفاده می کنیم .

- **برخی خواص انتگرال کسری ریمان لیوویل**

۱)اگر f یک تابع پیوسته روی $[0, b]$ باشد و $\alpha\,,\,\beta\;>\;0$، برای $x\;>\;0$ داریم:

$$I^{\alpha}\left[\; I^{\beta}\, f(x)\;\right] = I^{\beta}\left[\; I^{\alpha}\, f(x)\;\right] = I^{\alpha+\beta}\, f(x) \tag{۴۹.۱}$$

برای اثبات خاصیت فوق از یک لم استفاده می کنیم

لم ۳.۱ با فرض اینکهf تابعی پیوسته و $\alpha\,,\,\beta\;>\;0$ اعداد مثبت باشند، داریم :

$$\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} dt \int_0^t (t-y)^{\beta-1} f(y)dy = B(\alpha,\beta) \int_0^x (x-y)^{\alpha+\beta-1} f(y)dy \tag{۵۰.۱}$$

اثبات: با توجه به تعریف (۴۸.۱) داریم

$$\begin{aligned} I^{\alpha}\left[\; I^{\beta}\, f(x)\;\right] \;&=\; \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} dt \left[\; \tfrac{1}{\Gamma(\beta)} \textstyle\int_0^t (t-y)^{\beta-1} f(y)dy\;\right] dt \\ &=\; \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} dt \left[\; \textstyle\int_0^t (t-y)^{\beta-1} f(y)dy\;\right] dt \end{aligned}$$

با توجه به لم (۳.۱) داریم

$$I^{\alpha}\left[\; I^{\beta}\, f(x)\;\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^x (x-y)^{\alpha+\beta-1} f(y)dy \tag{۵۱.۱}$$

و همچنین با توجه به تعریف (۴۷.۱) داریم

$$I^{\alpha+\beta}\, f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t)dt \tag{۵۲.۱}$$

با توجه به معادلات (۵۱.۱) و (۵۲.۱) داریم

$$I^{\alpha} I^{\beta} f(x) = I^{\alpha+\beta} f(x) \tag{۵۳.۱}$$

حال در اثبات بالا اگر جای $\alpha\,,\beta$ را عوض کنیم خواهیم داشت

$$I^{\beta} I^{\alpha} f(x) = I^{\alpha+\beta} f(x) \tag{۵۴.۱}$$

از روابط (۵۳.۱)و (۵۴.۱) به نتیجه زیر می رسیم و اثبات تمام است

$$I^{\alpha} I^{\beta} f(x) = I^{\beta} I^{\alpha} f(x) = I^{\alpha+\beta} f(x) \tag{۵۵.۱}$$

□

۲)یکی دیگر از خواص انتگرال کسری ریمان لیوویل :

$$I_a^{\circ} f(x) = f(x)$$

اثبات: با استفاده از قاعده انتگرال گیری جزء به جزء در دستورانتگرال گیری کسری ریمان لیوویل (۴۷.۱) خواهیم داشت

$$I_a^{\alpha} f(x) = \frac{(x-a)^{\alpha} f(a)}{\Gamma(\alpha+۱)} + \frac{۱}{\Gamma(\alpha+۱)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha} f'(\tau) d\tau \tag{۵۶.۱}$$

$\alpha = ۰$ را قرار می دهیم

$$I_a^{\circ} f(x) = f(a) + \int_a^x f'(\tau) d\tau = f(a) + f(x) - f(a) = f(x) \tag{۵۷.۱}$$

و اثبات تمام است □

۳)و خاصیت سوّم $I^{\alpha} x^{\gamma} = \dfrac{\Gamma(\gamma+۱)}{\Gamma(\alpha+\gamma+۱)} x^{\alpha+\gamma}$

نکته ۴.۱ عملگر کسری ${}_aD_x^{\alpha}$ را به صورت زیر نیز می توان نوشت :

$$ {}_aD_x^{\alpha} = \frac{d^n}{dx^n} {}_aI_x^{n-\alpha} \tag{۵۸.۱}$$

$$ {}_xD_b^{\alpha} = (-۱)^n \frac{d^n}{dx^n} {}_aI_x^{n-\alpha}. \tag{۵۹.۱}$$