وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه تفرش

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان

# تکرارهای نقطه ثابت برای نگاشتهای غیر انبساطی و غیر انبساطی مجانبی در فضاهای باناخ

استاد راهنما

**دکتر اسماعیل نظری**

نگارش

**سعیدعسکری**

شهریور ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه تفرش

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

**پایان‌نامه کارشناسی ارشد**

عنوان

# تکرارهای نقطه ثابت برای نگاشتهای غیر انبساطی و غیر انبساطی مجانبی در فضاهای باناخ

استاد راهنما

**دکتر اسماعیل نظری**

نگارش

**سعید عسکری**

شهریور ۱۳۹۱

تاریخ: ۱۳۹۱/۸/۲
شماره: ۶۵۴۹/۱۶/۰۲
پیوست: ..............

دانشگاه تفرش
مدیریت تحصیلات تکمیلی

# صورتجلسه دفاعیه پایان نامه کارشناسی ارشد

نام و نام خانوادگی: سعید عسگری  شماره دانشجویی: ۸۹۱۱۲۱۰۰۲  گروه: ریاضی
رشته تحصیلی/گرایش: ریاضی محض/ هندسه

**عنوان پروژه: تکرارهای نقطه ثابت برای نگاشتهای غیر انبساطی و غیر انبساطی مجانبی در فضاهای باناخ**

تعداد واحد: ۶  تاریخ تصویب: ۱۳۹۰/۰۸/۲۳  تاریخ دفاع: ۱۳۹۱/۰۶/۳۰
نمره نهایی  به عدد: ۱۹  به حروف: نوزده (۲۰)

| نام و نام خانوادگی | سمت | رتبه | محل اشتغال | محل امضا |
|---|---|---|---|---|
| دکتر اسماعیل نظری | استاد راهنمای اول | استادیار | دانشگاه تفرش | |
| - | استاد راهنمای دوم | | - | |
| - | استاد مشاور | | - | |
| دکتر علی پارسیان | داور داخلی | استادیار | دانشگاه تفرش | |
| دکتر محمد اکبری | داور خارجی | استادیار | دانشگاه شاهد | |
| دکتر علی پارسیان | نماینده تحصیلات تکمیلی | استادیار | دانشگاه تفرش | |

مدیر گروه: دکتر مهدی رمضانی
امضاء:
تاریخ: ۹۱/۸/۱
مهر:

دانشگاه تفرش گروه ریاضی

مدیر تحصیلات تکمیلی دانشگاه: دکتر حمید رضا دهقانپور
امضاء:
تاریخ:
مهر:

دانشگاه تفرش اداره کل تحصیلات تکمیلی

بار الها

برای دوستی که قلب مرا شکست، مهربانی

برای آنکه روح مرا آزرد، بخشایش

و برای خویشتن خویش آگاهی و عشق می طلبم...

# سپاس گزاری

«سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود آدمی را به زیور عقل آراست.»

در آغاز بر خود لازم می‌دانم سپاس بی‌پایان خود را به استاد گرانقدرم، جناب آقای دکتر اسماعیل نظری که با زحمات بی‌شایبه و راهنمایی‌های خردمندانه ، این‌جانب را در انجام امور آموزشی، پژوهشی، نگارش و تدوین این پایان‌نامه یاری فرمودند، تقدیم و مراتب امتنان خالصانه خود را نسبت به ایشان ابراز نمایم. سپس از همراهی پدر و مادر ارجمندم و نیز تلاش‌های دوستان عزیزم که این‌جانب را در مراحل سخت و دشوار کار همراهی نمودند و در آماده کردن این پایان نامه از انتقادات و پیشنهادات ایشان استفاده نمودم، نهایت قدردانی را دارم.

عسکری،شهریور ۱۳۹۱

# چکیده

در این پایان نامه برخی روشهای تکراری ، تکرارترکیبی وکلی را برای نگاشت های غیر انبساطی روی فضای باناخ تعریف می کنیم و با در نظر گرفتن شرایطی روی فضا های باناخ ، قضایای همگرایی قوی را مورد بررسی قرار می دهیم .



**کلمات کلیدی:** نقطه ثابت ، روش‌های تکراری ، نگاشت های غیرانبساطی ، نگاشت های غیر انبساطی مجانبی ، نگاشت های $\Phi$ – کلاشبه غیر انبساطی مجانبی ، نگاشت های انقباضی

# فهرست مطالب

# پیشگفتار

بررسی مسایل زیادی در فیزیک، شیمی، مکانیک ، زیست شناسی و ریاضیات کاربردی منجر به حل معادلات غیر خطی می شوند . به عنوان مثال می توان به رفتار مواد پلاستیکی، امواج سطحی سیالات، نوسانات غیر خطی، فرایند های درون راکتورهای هسته ای و ..... اشاره کرد . یک ابزار مهم برای حل معادلات غیر خطی نظریه نقطه ثابت است که توسط **باناخ** [۱] پایه گذاری شد .

به طور کلی در نظریه ی نقطه ی ثابت سه مساله ی زیر مطرح است :

۱. وجود و یگانگی نقطه ی ثابت ؛

۲. ساختار مجموعه ی نقاط ثابت ؛

۳. روش های تقریب نقاط ثابت و همگرایی آنها .

موضوع این پایان نامه بررسی مساله ی (۳) است .

از آنجا که جواب های معادله ی $f(x) = 0$ ونقاط ثابت نگاشت $F(x) = f(x) + x$ یکسان است و تقریب نقاط ثابت با روش های تکراری امکان پذیر است، مسایل متعددی را می توان به مساله ی پیدا کردن نقاط ثابت نگاشتی مناسب تبدیل کرد که به روش های تکراری قابل حل می باشند .

یکی از مهمترین فرایندهای تکراری برای یافتن نقاط ثابت توسط **هالپرن** [۲] (۱۹۶۷) ارایه شد که به روش تکراری هالپرن مشهور است .اخیرا روش های تکراری برای یافتن نقاط ثابت نگاشت های غیر انبساطی به

[۱] Banach

[۲] Halpern

منظور حل مسایل مینیمم سازی محدب به کار برده شده اند . برای مثال **داتچ ویامادا** [۳] (۱۹۹۸) برای مینیمم سازی توابع محدب روی مجموعه ی حاصل از اشتراک نقاط ثابت نگاشت های غیر انبساطی ، یک روش مبتنی بر تکرار ارایه کردند . همچنین یامادا و همکاران ،(۱۹۹۸) تقریب سازی یک تابع مربعی روی مجموعه ی نقاط ثابت خانواده ای از نگاشت های غیر انبساطی را با یک روش تکرار انجام دادند . سپس **سو** [۴] (۲۰۰۲) الگوریتم هایی مبتنی بر تکرار برای یافتن نقاط ثابت نگاشت های غیر انبساطی متعددی را منتشر و همگرایی قوی آن ها را اثبات کرد . همچنین سو (۲۰۰۳) برای حل مساله بهینه سازی مربعی روی مجموعه ی حاصل از اشتراک نقاط ثابت خانواده ای از نگاشت های غیر انبساطی یک روش تکرار ارایه کرد .

از طرف دیگر **مودافی** [۵] (۲۰۰۰) برای یافتن نقاط ثابت نگاشت های غیر انبساطی یک روش موسوم به روش تقریب سازی ویسکوزیته معرفی کرد .

سو (۲۰۰۶)با مطالعه ای که روی کارهای اشاره شده داشت به یک روش کلی برای یافتن نقاط ثابت نگاشت های غیر انبساطی دست یافت .

در (۲۰۰۵ ) **ماتسوشیتا**[۶] و **تاکاهاشی**[۷] قضیه ی همگرایی قوی برای تقریب یک نقطه ثابت نگاشت غیر انبساطی نسبی در فضای بطور یکنواخت هموار و محدب باناخ $X$ را اثبات کردند و در (۲۰۱۰) **چانگ ایتال** [۸] قضیه همگرایی قوی برای خانواده ای متناهی از نگاشت های $\Phi$ -بطور مجانبی شبه غیر انبساطی را اثبات کرد همچنین او در(۲۰۱۱) برخی از قضایای تقریب سازی نقاط ثابت از نگاشت های $\Phi$ -بطور مجانبی شبه غیر انبساطی در فضای بطور یکنواخت هموار و محدب باناخ $X$را اثبات کرد.

[۳] Dautsch,Yamada

[۴] Xu

[۵] Moudafi

[۶] Matsushita

[۷] Takahashi

[۸] Chang etal

این پایان نامه شامل چهار فصل می باشد .

در فصل اول برخی از تعریف ها و مفاهیم اولیه که در فصول بعدی مورد استفاده قرار می گیرند ، ارایه می گردد .

در فصل دوم برخی روش های تکراری و سپس یک روش تکرار ترکیبی برای نگاشت های غیر انبساطی با روش تقریب ویسکوزیته ارایه می گردد .

در فصل سوم یک روش تکرار کلی برای نگاشت های غیر انبساطی در فضای باناخ استنتاج می شود .

در نهایت در فصل چهارم برخی قضایای همگرایی قوی در فضای اکیدا محدب و بطور یکنواخت هموار باناخ بررسی می شود .

# فصل ۱

# مفاهیم اولیه ومقدمات

## ۱.۱ مقدمه

در این فصل از پایان نامه به طور مختصر و فشرده به بیان مفاهیم اولیه ، یادآوری ها و نتایجی از آنالیز تابعی که در فصل های بعدی این پایان نامه استفاده می شوند، پرداخته ایم.

## ۲.۱ تعاریف

**تعریف ۱.۲.۱.** فضای برداری $X$ یک فضای نرم دار است اگر به ازای هر $x \in X$ یک عدد حقیقی و نامنفی مانند $\|x\|$ به نام نرم $x$ چنان مربوط باشد که برای هر $x, y \in X$ و اسکالر $\alpha$ از میدان فضای برداری $F$ داشته باشیم :

۱. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ؛

۲. $\|\alpha x\| = \mid \alpha \mid \|x\|$ ؛

۳. $\|x\| = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$ .

تذکر . واضح است که هر فضای نرم دار یک فضای متریک است . زیرا اگر تعریف کنیم

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

در این صورت $d$ در شرایط متر بودن صدق می کند .

**مثال ۲.۲.۱.** *فرض کنید $X = R^n$ یک فضای برداری باشد در این صورت $X$ همراه بانرم های زیر یک فضای نرم دار است .*

۱ .

$$\|x\|_۱ = \sum_{i=۱}^{n} \mid x_i \mid, \quad x = (x_۱, x_۲, ......, x_n) \in R^n$$

۲ .

$$\|x\|_p = (\sum_{i=۱}^{n} \mid x_i \mid^p)^{\frac{۱}{p}}, \quad x = (x_۱, x_۲, ......, x_n) \in R^n, \quad ۱ < p < \infty$$

۳ .

$$\|x\|_\infty = max_{۱\leq i\leq n} \mid x_i \mid, \quad x = (x_۱, x_۲, ......, x_n) \in R^n$$

**تعریف ۳.۲.۱.** فرض کنید $X$ و $Y$ دو فضای خطی روی میدان $F$ باشند و $T : X \longrightarrow Y$ عملگری با دامنه ی $Dom(T)$ وبرد $R(T)$ باشد در این صورت $T$ را خطی گوییم هر گاه برای هر $x,y \in X$ و هر $\alpha \in F$ داشته باشیم :

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y)$$

یک عملگر خطی ، تابعک خطی نامیده می شود هر گاه $Y = F$.

**تعریف ۴.۲.۱.** فضای خطی مختلط $X$ (حقیقی ) را یک فضای ضرب داخلی روی میدان $F$ نامیم هرگاه یک تابع مختلط (حقیقی) روی $X \times X$ که آن را با نماد $<\ ,\ >$ نشان می دهیم، وجود داشته باشد بقسمی که بازای هر $x, y, z \in X$ و هر $\alpha \in F$ داشته باشیم :

۱. $<y, x> = \overline{<x, y>}$ ، (علامت بار نشانگر مزدوج مختلط است . )

۲. $<\alpha x + y, z> = \alpha <x, z> + <y, z>$ ،

۳. $<x, x> \geq ۰$

۴. $<x, x> = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$

**تبصره:** با تعریف $\|x\|$ به عنوان ریشه ی دوم نا منفی اسکالر $<x, x>$ ( $\|x\|^۲ = <x, x>$ ) روابط زیر برقرارند :

**نامساوی شوارتز** [۱] .در هر فضای ضرب داخلی داریم :

$$|<x, y>| \leq \|x\|\|y\|$$

**نامساوی مثلث** : به ازای هر $x$ ، $y$ در فضای ضرب داخلی داریم

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

**قاعده متوازی الاضلاع** : به ازای هر $x, y \in X$

$$\|x + y\|^۲ + \|x - y\|^۲ = ۲(\|x\|^۲ + \|y\|^۲)$$

[۱] Schwartz

**تعریف ۱.۲.۵.** فرض کنید $H$ یک فضای ضرب داخلی باشد به طوری که در آن فاصله ی بین $x$ و $y$ به صورت

$$d(x,y) = < x-y, x-y >^{\frac{1}{2}} = \|x-y\|$$

تعریف شده باشد در این صورت تمام اصول موضوع یک فضای متری برقرارند . هر گاه این فضای متری تام باشد یعنی هر زیردنباله ی کوشی در آن همگرا باشد ، $H$ را **فضای هیلبرت** [۲] می نامند .

**تعریف ۱.۲.۶.** فضای نرمدار $X$ را یک **فضای باناخ** [۳] گوییم هر گاه با متر حاصل از نرمش تام باشد .

تذکر . هر فضای هیلبرت یک فضای باناخ است .

**تعریف ۱.۲.۷.** هرگاه برای هر دو عضو دلخواه $x$ و $y$ از مجموعه ای مانند $E$ و عدد $۰ < t < ۱$ داشته باشیم

$$(۱-t)x + ty \in E$$

در آن صورت مجموعه ی $E$ را محدب گوییم .

**تعریف ۱.۲.۸.** فرض کنید $T : X \longrightarrow X$ یک نگاشت روی مجموعه ی $X$ باشد در این صورت نقطه ی ثابت $T$ ، نقطه ای مانند $x \in X$ است به طوری که $T(x) = x$ .

مجموعه ی تمام نقاط ثابت $T$ را با نماد $Fix(T)$ یا $F(T)$ نمایش می دهیم . پس

$$Fix(T) = \{x \in X : Tx = x\} = F(T)$$

**تعریف ۱.۲.۹.** هر گاه $C$ زیرمجموعه ی ناتهی فضای نرم دار $X$ باشد نگاشت $T : C \longrightarrow C$ ،

---

[۲] Hilbert Space

[۳] Banach Space

۱. غیر انبساطی است هرگاه برای هر $x,y \in C$ داشته باشیم :

$$\|T(x)-T(y)\| \leq \|x-y\|$$

۲. انقباضی با ضریب $k$ است هرگاه عدد ثابت $k$ متعلق به بازه ی $[0,1)$ چنان موجود باشد که برای هر $x,y \in C$ داشته باشیم :

$$\|T(x)-T(y)\| \leq k\|x-y\|$$

در برخی منابع از جمله [۱] این نگاشت را نگاشت غیر انبساطی قوی نیز نامیده اند .

مجموعه ی تمام انقباض ها روی $C$ را با نماد $\Pi_C$ نمایش می دهیم .پس

$$\Pi_C = \{f | f : C \longrightarrow C\}$$

که در آن $f$ یک انقباض می باشد .

۳. $L$ - لیپ شیتز است هر گاه برای هر $x,y \in C$ و ثابت $L > 0$ داشته باشیم :

$$\|T(x)-T(y)\| \leq L\|x-y\|$$

**تعریف ۱۰.۲.۱.** فرض کنید $I$ یک بازه از $R$ (مجموعه ی اعداد حقیقی ) باشد . در این صورت اگر $X$ یک فضای توپولوژیک و $r : I \longrightarrow X$ نگاشتی پیوسته باشد آن گاه $r$ را یک خم گوییم .

**تعریف ۱۱.۲.۱.** فرض کنید $X$ یک فضای باناخ باشد در این صورت مجموعه

$$S_x = \{x \in X : \|x\| = 1\}$$

را کره واحد روی فضای باناخ $X$ می گوییم .

**تعریف ۱۲.۲.۱.** فضای باناخ $X$ را اکیدا محدب گوییم، هر گاه برای هر $x,y \in C$ با شرایط

۱. $\|x\| = \|y\| = 1$ .

۲. $x \neq y$ .

داشته باشیم : $\frac{\|x+y\|}{۲} < ۱$ .

**مثال ۱۳.۲.۱.** *فرض کنیم $X = R^n$ با نرم زیر باشد .*

$$\|x\|_۱ = | x_۱ | + ....... + | x_n |, \quad x = (x_۱, ...., x_n) \in R^n$$

*در این صورت $X$ اکیدا محدب نیست. زیرا اگر $x = (۱, ۰, ۰, ......, ۰)$ و $y = (۰, ۱, ۰, ....., ۰)$ در این صورت $\|x\|_۱ = \|y\|_۱ = ۱$ و $\|x + y\|_۱ = ۲$ .*

**تعریف ۱۴.۲.۱.** فضای باناخ$X$ را بطور یکنواخت محدب گوییم ، هر گاه برای هر $\epsilon$ که $۰ < \epsilon \leq ۲$ و $x, y \in X$ که $\|x\| \leq ۱$ و $\|y\| \leq ۱$ ، $\|x - y\| \geq \epsilon$ باشد، آنگاه $\delta(\epsilon) = \delta > ۰$ یافت شود به طوری که $\|\frac{x+y}{۲}\| \leq ۱ - \delta$.

**مثال ۱۵.۲.۱.** *هر فضای هیلبرت مانند $H$ یک فضای محدب یکنواخت است .*

*در واقع با توجه به رابطه ی متوازی الاضلاع در این فضا داریم :*

$$\|x + y\|^۲ = ۲(\|x\|^۲ + \|y\|^۲) - \|x - y\|^۲, \qquad \forall x, y \in H$$

*حال فرض کنیم $x, y \in B_H$ به طوری که $x \neq y$ و $\|x - y\| \geq \epsilon$ لذا داریم :*

$$\|x + y\|^۲ \leq ۴ - \epsilon^۲$$

*و*

$$\frac{\|x + y\|}{۲} \leq ۱ - \delta(\epsilon)$$

*که در اینجا*

$$\delta(\epsilon) = ۱ - \sqrt{۱ - \frac{\epsilon^۲}{۴}}, \qquad ۰ < \epsilon \leq ۲ \Longrightarrow \delta(\epsilon) > ۰$$

*بنابراین $H$ محدب یکنواخت است .*

**مثال ۱.۲.۱۶.** *فضا های $l_{۱}, l_{\infty}$ محدب یکنواخت نیستند.*

*زیرا اگر* $x = (۱, ۰, ۰, ......, ۰)$ *و* $y = (۰, -۱, ۰, ....., ۰)$ *در این صورت* $\|x\|_{۱} = \|y\|_{۱} = ۱$ *و*

$$\|x - y\|_{۱} = ۲ > ۱ = \epsilon, \quad \|\frac{x+y}{۲}\|_{۱} = ۱$$

*بنابراین* $\delta > ۰$ *یافت نمی شود به طوری که* $\|\frac{x+y}{۲}\|_{۱} \leq ۱ - \delta$ *. لذا* $l_{۱}$ *محدب یکنواخت نیست .*

*به طریق مشابه با در نظر گرفتن* $x = (۱, ۱, ۱, ۰, ۰.....)$ *و* $y = (۱, ۱, -۱, ۰, ۰.....)$ *می توان نشان داد که* $l_{\infty}$ *یک فضای محدب یکنواخت نیست .*

***تبصره:*** *هر فضای باناخ محدب یکنواخت ، اکیدا محدب است .*

**تعریف ۱.۲.۱۷.** فضای همه ی تابعک های خطی کراندار روی یک فضای نرم دار مانند$X$ را دوگان$X$ گوییم و با نماد $X^{*}$ نمایش می دهیم. بدیهی است که $X^{*}$ یک فضای نرم دار با نرم زیر می با شد .

$$\|f\|_{*} = sup\{| f(x) |: x \in S_{x}\}.$$

**تعریف ۱.۲.۱۸.** فضای نرم دار $X$ را انعکاسی گوییم هر گاه $X = X^{**}$ .

**مثال ۱.۲.۱۹.** ۱. *$R^{n}$ انعکاسی است .*

۲. *$l_{p}$ و $L_{p}$ $(۱ < p < \infty)$ فضای باناخ انعکاسی می باشند .*

۳. *هر فضای هیلبرت یک فضای باناخ انعکاسی است .*

۴. *$l_{۱}, l_{\infty}, L_{۱}$ و $L_{\infty}$ انعکاسی نیستند .*

**تعریف ۱.۲.۲۰.** فرض کنید $X^{*}$ دوگان فضای باناخ $X$ باشد آن گاه برای $q > ۱$ نگاشت $J_{q} : X \longrightarrow ۲^{X^{*}}$ را نگاشت دوگان تعمیم یافته گوییم اگر

$$J_{q}x = \{f \in X^{*} :< x, f >= \|x\|^{q}, \|f\| = \|x\|^{q-۱}\}$$

در حالتی که $q = ۲$ باشد $J_{q} = J_{۲} = J$ و $J$ را نگاشت دوگان گوییم .

**تعریف ۲۱.۲.۱.** هر گاه $C$ زیر مجموعه ی ناتهی فضای نرم دار از $X$ باشد در اینصورت نگاشت $T : C \longrightarrow C$ $\lambda$ - شبه انقباضی اکید است هر گاه برای هر $x, y \in C$ وجود داشته باشد $\lambda > ۰$ و $j_q(x-y) \in J_q(x-y)$ بطوری که

$$< Tx - Ty, j_q(x-y) > \leq \|x-y\|^q - \lambda\|(I-T)x - (I-T)y\|^q$$

یا بطور معادل

$$< (I-T)x - (I-T)y, j_q(x-y) > \geq \lambda\|(I-T)x - (I-T)y\|^q$$

**تعریف ۲۲.۲.۱.** فرض کنید $f$ یک تابع حقیقی روی فضای باناخ $X$ باشد . هر گاه برای هر $\{x_n\} \subset X$ و $x \in X$ که $x_n \longrightarrow x$ ، داشته باشیم :

$$f(x) \leq \liminf_{n \longrightarrow \infty} f(x_n)$$

در این صورت $f$ نیم پیوسته ی پایینی است .

**تعریف ۲۳.۲.۱.** فرض کنید $X^*$ دوگان فضای باناخ $X$ باشد در این صورت همگرایی یک دنباله در فضای باناخ $X$ معمولا همگرایی در نرم یا همگرایی قوی می باشد، یعنی $\{x_n\}$ در $X$ همگرا به $x$ است ، هرگاه

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|x_n - x\| = ۰$$

در این حالت می نویسیم $x_n \longrightarrow x$ یا $s - \lim_{n \to \infty} x_n = x$ .

این همگرایی مربوط به توپولوژی قوی روی $X$ با پایه ی همسایگی زیر می باشد .

$$B_r(۰) = \{x \in X : \|x\| < r\}, \qquad r > ۰$$

اما توپولوژی ضعیف روی $X$ توسط تابعک های خطی کراندار روی $X$ تولید می شود . در واقع $G \subset X$ نسبت به توپولوژی ضعیف ، باز ( ضعیف باز یا $w$- باز ) است اگر و فقط اگر برای هر $x \in G$ تابعک های