بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده مهندسی
گروه مکانیک

عنوان پایان‌نامه:

# تحلیل تیر کامپوزیتی دوار با پیچش ساختاری

نگارنده:

**مهدی اسماعیلی**

ارائه شده جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته

مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی

استاد راهنما:

**دکتر جلیل رضایی پژند**

شهریور ماه ۱۳۹۲

# تائیدیه

گواهی می‌شود که این پایان‌نامه تاکنون برای احراز یک درجه علمی ارائه نشده است و تمامی مطالب آن به جز مواردی که نام مرجع آورده شده است، نتیجه کار پژوهشی دانشجو می‌باشد.

دانشجو: مهدی اسماعیلی امضاء تاریخ

استاد راهنما: دکتر جلیل رضایی پژند امضاء تاریخ

بسمه تعالی

دانشگاه فردوسی مشهد

# صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

جلسه دفاع از پایان نامه آقای مهدی اسماعیلی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **مهندسی مکانیک** گرایش طراحی کاربردی در ساعت ..... روز ...../...../..... در محل **کلاس** ..... دانشکده مهندسی با حضور امضا کنندگان ذیل تشکیل گردید. پس از بررسی های لازم، هیأت داوران پایان نامه نامبرده را با نمره به عدد ..... به حروف ..... و با **درجه** ..... مورد تأیید قرار داد.

## عنوان رساله

**تحلیل تیر کامپوزیتی دوار با پیچش ساختاری**

هیئت داوران امضا

- **داور: دکتر معین فرد**

  **استادیار گروه مکانیک دانشگاه فردوسی مشهد**

- **داور و نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر طهانی**

  **استاد گروه مکانیک دانشگاه فردوسی مشهد**

- **استاد راهنما: دکتر رضایی پژند**

  **استاد گروه مکانیک دانشگاه فردوسی مشهد**

- **مدیر گروه: دکتر نیازمند**

  **استاد گروه مکانیک دانشگاه فردوسی مشهد**

**بسمه تعالی**

**مشخصات پایان نامه تحصیلی مقطع کارشناسی ارشد**

**دانشگاه فردوسی مشهد**

**عنوان پایان نامه:** تحلیل تیر کامپوزیتی دوار با پیچش ساختاری

**نام نویسنده:** مهدی اسماعیلی

**نام استاد راهنما:** دکتر رضایی پژند

| | | |
|---|---|---|
| **دانشکده:** مهندسی | گروه: مکانیک | **رشته تحصیلی:** مهندسی مکانیک- طراحی کاربردی |
| **تاریخ تصویب: ۹۲/۶/۲۰** | | **تاریخ دفاع: ۹۲/۷/۱۵** |
| **مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد** ● | **دکتری** ○ | **تعداد صفحات: ۱۳۳** |

**چکیده پایان نامه:**

هرگاه تیری حول محور خود از ابتدا تا انتها پیچیده باشد به آن تیر با پیچش ساختاری گفته می‌شود. کاربرد روزافزون این دسته از تیرها در صنایع هوافضا و ماشین‌های دوار باعث شده تا مطالعات زیادی پیرامون این موضوع صورت بگیرد. البته بدلیل رفتار متفاوت و پیچیده‌ی این تیرها، عموما از روش‌های تحلیلی برای حل مسائل آن استفاده نشده است. این پیچیدگی رفتار ناشی از وجود کوپلینگ در صفحات مختلف است. در این پایان نامه روشی برای حل تیرهای کامپوزیتی چرخان با پیچش ساختاری ارائه شده و از این روش برای بررسی پارامترهای مختلف طراحی تیر استفاده می‌شود. هدف از این روش ارائه‌ی راهکاری برای تبدیل مسائل سه بعدی به مسئله‌ی تیر یک بعدی ساده و حل آن است. در این راستا ابتدا با کمک روش اجزای محدود و با فرض تیر اویلر برنولی، المان تیر همسانگرد با پیچش ساختاری بدست می‌آید. سپس با تعریف سفتی معادل خمشی مقاطع کامپوزیتی و با کمک تئوری محورهای موازی، از المان مذکور جهت حل تیر کامپوزیتی استفاده می‌شود. در ادامه اثر پارامترهای پیچش ساختاری، سرعت دورانی، بازوی دوران، زاویه‌ی فایبر و هندسه‌ی تیر بر رفتار خمشی و ارتعاشی آن بررسی می‌شود. مشاهدات حاکی از دقت خوب و کاربرد بالای روش حاضر در حل مسائل تیر کامپوزیتی با پیچش ساختاری است. در تمامی مراحل از مدل کردن تیر در نرم افزار اجزای محدود انسیس و مقایسه‌ی آن با روش حل حاضر بهره برده شده است.

**کلید واژه:**

تیر با پیچش ساختاری، تیر چرخان، سفتی خمشی معادل، روش اجزای محدود، تئوری محورهای موازی

**امضای استاد راهنما:.....**

**تاریخ:.....**

# فهرست

**عنوان** **صفحه**

**فصل اول: مقدمه**

۱-۱مقدمه..... ۲

**فصل دوم: مدلسازی اجزای محدود تیر با پیچش ساختاری**

۲-۱)تعریف مختصات..... ۱۶

**۲**-۲)معادلات تعادل..... ۲۲

۲-۳) روش اجزای محدود در حل تیربا پیچش ساختاری..... ۲۴

۲-۴)ماتریس سفتی المان..... ۳۰

۲-۵)تعمیم ماتریس سفتی..... ۳۵

۲-۶)ماتریس سفتی دورانی المان..... ۳۷

۲-۷)ماتریس جرم..... ۳۹

**فصل سوم: محاسبه‌ی خواص الاستیک معادل مقاطع کامپوزیتی**

۳-۱)روابط تنش کرنش برای لایه‌های ارتوتروپیک..... ۴۳

۳-۲) تئوری کلاسیک لایه‌ها ..... ۴۴

۳-۳) انتقال خواص لایه‌ها.... ..... ۴۶

۳-۴) سفتی معادل سطح مقطع..... ۴۹

۳-۴-۱) روش ضریب الاستیک معادل..... ۵۰

۳-۴-۲) روش تیر نازک. ..... ۵۱

۳-۴-۳) روش تیر عریض. ..... ۵۲

۳-۴-۴) روش استفاده‌ی مستقیم از معادله‌ی ارتعاشات.....۵۳

۳-۴-۵) روش کلی تئوری کلاسیک لایه‌ای .....۵۶

۳-۵) سفتی خمشی در جهت عمود بر چیدمان.....۵۸

۳-۶) مرکز سطح صفحه‌ی کامپوزیتی.....۶۰

۳-۷) مرکز سطح مقطع تیر کامپوزیتی.....۶۱

۳-۸) محاسبه‌ی سفتی معادل مقاطع با نرم‌افزار انسیس.....۶۲

**فصل چهارم: مشاهدات و نتایج تیر همسانگرد**

۴-۱) صحت سنجی روش حل.....۶۶

۴-۲) تیر جعبه‌ای.....۷۱

۴-۲-۱) اثر زاویه‌ی پیچش $\varphi_0$.....۷۱

۴-۲-۲) اثر نسبت ابعاد.....۷۶

۴-۲-۳) اثر سرعت چرخش.....۷۶

۴-۳) مقطع ایرفویل.....۷۹

**فصل پنجم: مشاهدات و نتایج تیر کامپوزیتی**

۵-۱) محاسبه‌ی سفتی مقاطع.....۸۵

۵-۱-۱)مقطع دایره‌ای.....۸۵

۵-۱-۲) مقطع ذوزنقه‌ای.....۸۷

۵-۱-۳) مقطع بال پهن.....۸۸

۵-۱-۴) مقطع ایرفویل .....۸۹

۵-۲) تیر کامپوزیتی بدون پیچش ساختاری.....۹۰

۵-۲-۱) مقطع مستطیلی.....۹۰

۵-۲-۲) مقطع جعبه‌ای.....۹۲

۵-۲-۳) مقطع ایرفویل..... ۹۴

۵-۳)تیر کامپوزیتی با پیچش ساختاری..... ۱۰۹

۵-۳-۱) مقطع مستطیلی.. ..... ۱۰۹

۵-۳-۲) مقطع جعبه‌ای..... ۱۱۱

۵-۳-۳) مقطع ایرفویل..... ۱۱۹

**فصل ششم: نتیجه‌گیری و پیشنهادات**

۶-۱) نتیجه‌گیری..... ۱۲۲

۶-۲) پیشنهادات ..... ۱۲۴

**ضمیمه**..... ۱۲۶

**منابع**..... ۱۲۹

| نمادها | | | |
|---|---|---|---|
| واحد | نام انگلیسی | نام فارسی | نماد |
| $m^2$, m, $kg/m^3$ | Cross section area, length, density | سطح مقطع، طول، چگالی | A , L , ρ |
| Degree/m | Uniform rate of twist | نرخ ثابت پیچش | $k$ |
| Degree | Orientation of end section to root section | زاویه‌ی مقطع انتهایی نسبت به ابتدا | $\varphi_0$ |
| Degree | Fiber orientation | زاویه‌ی فایبر | θ |
| m | Displacements of centroid in local x, y directions | جابجایی مرکز سطح مقطع در در مختصات محلیY و Xجهات | u(z) , v(z) |
| m | Displacements of centroid in global X,Y directions | جابجایی مرکز سطح مقطع در در مختصات کلیYو Xجهات | U(Z) , V(Z) |
| N/m | Uniform distributed lateral forces | بار گسترده‌ی خارجی در جهات y و x | $q_x(z)$ , $q_y(z)$ |
| $N.m^2$ | Principle moments of inertia about x, y | گشتاور اینرسی دوم سطح حول y و xمحورهای | $EI_{xx}$ , $EI_{yy}$ |
| -- | Element degree of freedom | درجات آزادی المان تیر | $q_i$ |
| -- | Shape functions for x, y directions | y و xتوابع شکل در جهات | $N_{ui}(z)$ , $N_{vi}(z)$ |
| -- | Nondimentional length | مختصات طولی بی‌بعد المان =z/Lξ | ξ |
| N/m | Element stiffness matrix in local coord. | ماتریس سفتی المان در مختصات محلی | $[\bar{k}^{(e)}]$ |
| N/m | Element stiffness matrix in prime coord. | ماتریس سفتی المان در مختصات پرایم | $[\bar{k}'^{(e)}]$ |
| N/m | Element stiffness matrix in global coord. | ماتریس سفتی المان در مختصات کلی | $[K^{(e)}]$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\left[K_R^{(e)}\right]$ | ماتریس سفتی دورانی المان | Rotational stiffness matrix | N/m |
| $\left[M_{yx}^{(e)}\right]$ | ماتریس جرم | Mass matrix | kg |
| $[T']$ | ماتریس انتقال از مختصات محلی به مختصات پرایم | Transformation matrix relating local to primed coord. | -- |
| $\left[T^{(e)}\right]$ | ماتریس انتقال از مختصات پرایم به مختصات کلی | Transformation matrix relating primed to global coord. | -- |
| $f_z$ | نیروی گریز از مرکز | Centrifugal force | N |
| $m_0$ | جرم بر واحد طول | Mass per length | Kg/m |
| $\Omega$ | سرعت دورانی | Rotating speed | rpm |
| $[Q_{1-2}]$ | ماتریس سفتی کاهش یافته‌ی ماده‌ی ارتوتروپیک | Reduced stiffness matrix of orthotropic material | N/m |
| A , B , D | ماتریس سفتی کششی، کوپلینگ، خمشی چندلایه | Extensional, coupling and bending stiffness matrix of layup | N/m |
| $[T(\theta)]_z$ , $[T(\beta)]_x$ | ماتریس دوران چندلایه | | -- |
| $\bar{A}_e$ | سفتی کششی معادل | Equivalent extensional stiffness | N |
| $\bar{D}_e$ | سفتی خمشی معادل | Equivalent bending stiffness | $N.m^2$ |
| $\hat{E}_e$ | مدول الاستیک معادل | Equivalent elastic module | $N/m^2$ |
| $\delta_x$ , $\delta_y$ , $\delta$ | خیز انتهایی تیر در جهت x و y و خیز کلی | End deflection in x, y directions and total deflection | m |
| $\boldsymbol{\delta_0}$ | خیز انتهایی تیر در حالت بدون پیچش | End deflection for non twisted beam | m |
| $\delta'$ | خیز انتهایی بی بعد با رابطه‌ی $3\delta EI/PL^3$ | Nondimensional end deflection | -- |
| $\omega$ | فرکانس طبیعی | Natural frequency | HZ , rad/s |
| $\omega'$ | پارامتر بی بعد فرکانس با رابطه‌ی | Nondimensional Natural frequency parameter | -- |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\omega_0$ | فرکانس طبیعی مرجع به ازای $(EI_{xx}=EI_{yy})$ | Basic Natural frequency | HZ , rad/s |
| $\omega_{st}$ | فرکانس طبیعی تیر بدون چرخش | Natural frequency for non rotating beam | HZ , rad/s |
| $\alpha$ | پارامتر بی بعد ضخامت پوسته‌ی ایرفویل | Non dimensional thickness parameter for airfoil wall | -- |
| $\delta_{00}$ | خیز کلی انتهایی برای تیر با $\varphi=\theta=0°$ | Total end deflection for non twisted unidirectional beam | m |

# فصل اول: مقدمه

# فصل اول: مقدمه

## ۱-۱ مقدمه

از اواخر دهه‌ی سوم قرن بیستم که اولین جایروپلین‌ها و هلیکوپترها به پرواز در آمدند، زمینه‌ی جدیدی در مسائل اجزای ماشینی دوار پیدا شد. البته سابقه‌ی ماشین‌های دوار سرعت بالا به مدتها قبل یعنی اواخر قرن نوزدهم برمی‌گردد که توربین‌های بخار به عنوان محرک زیردریایی‌ها اختراع شد. رفته رفته با پیشرفت علم آیرودینامیک، برای بهبود عملکرد آیرودینامیکی پره‌ها و بال‌های چرخان، آنها با پیچش ساختاری ساخته شدند. در این زمان بود که توجه به مسئله‌ی تیر با پیچش ساختاری[۱] از اهمیت بیشتری برخوردار شد. وقتی تیری حول محور طولی خود از ابتدا تا انتها پیچیده باشد به آن تیر با پیچش ساختاری گفته می‌شود. در حقیقت یک تیر می‌تواند سه نوع نقص هندسی[۲] داشته باشد. دو انحنا در دو صفحه‌ی خمش عمود بر هم و یک پیچش حول محور طولی که تیرهای با پیچش ساختاری دارای

[1] Pre-twisted Beam
[2] Imperfection

انحنای پیچشی حول محور طولی هستند. با فراگیر شدن استفاده از توربین‌های بادی محور افقی[1] در اواخر قرن بیستم، موضوع تیر با پیچش ساختاری از جمله مهمترین مسائل در طراحی پره‌های این توربین‌ها به شمار آمد.

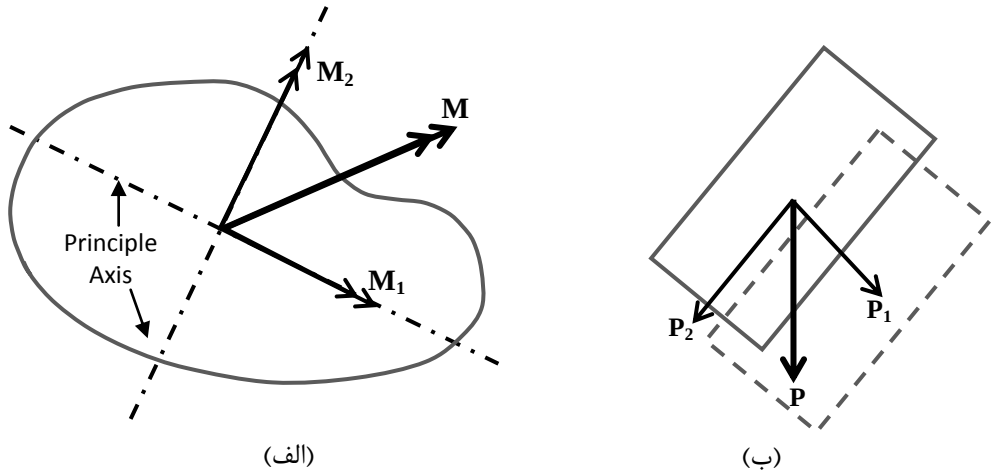
شکل ۱-۱: کاربرد تیر با پیچش ساختاری

مشخصه‌ی اصلی این دسته از تیرها این‌است که به ازای هرگونه بارگذاری عرضی، خمش در دو صفحه‌ی عمود به هم کوپل شده است. این کوپل شدگی سبب بروز رفتار خمشی، ارتعاشی و کمانشی متفاوت و نسبتا پیچیده‌ای در این تیرها می‌شود. در ادامه به توضیح مختصر علت این امر پرداخته می‌شود.

اگر تیری را با مقطع دلخواه فرض کنیم، به ازای هر بارگذاری عرضی، خمش در جهات اصلی مقطع رخ می‌دهد [۱]. یعنی به ازای اعمال بار در جهتی دلخواه، ابتدا باید بار را به مولفه‌هایش در دو جهت اصلی مقطع تجزیه کرده (شکل ۱-۲ الف) و اثر خمشی هر مولفه را در جهت خود بطور مستقل بررسی کرد. این به معنای وجود دو تغییر شکل خمشی در دو صفحه‌ی عمود بر هم است. به عبارت دیگر حتی

[1] Horizontal Axis Wind Turbine (HAWT)

در مقطعی ساده مثل مستطیل که جهات اصلی آن عمود منصف‌های اضلاع هستند، اگر بار در جهتی غیر از جهات اصلی به آن وارد شود، تیر الزاما در جهت اعمال بار (جهت عمودی در شکل ۱-۲ ب) خیز بر نمیدارد بلکه در جهتی که حاصل از برایند دو مولفه‌ی خیز در دو جهت اصلی است خمیده می‌شود.




شکل ۱-۲: تجزیه‌ی بار در جهات اصلی مقطع دلخواه

علت کوپل شدن خیز در تیرهای با پیچش ساختاری هم همین موضوع است. در حقیقت برای درک بهتر اگر تیری طره را متشکل از قسمت‌هایی مستقیم که هر کدام زاویه‌ای با قسمت قبل دارند فرض کنیم، مطمئنا بار خارجی اعمالی بر جهات اصلی بسیاری از این مقاطع منطبق نخواهد بود و بنابراین خیز انتهایی در جهت بار اعمالی رخ نداده و در جهتی حاصل از کوپل دو جهت عمود بر هم اتفاق خواهد افتاد. بدلیل گستردگی کاربرد و اهمیت تیر با پیچش ساختاری، مطالعات بسیاری در این زمینه انجام شده است. در غالب این تحقیقات، هدف مدل کردن یک پره با تیر مورد نظر است و معمولا تیرهای با پیچش ساختاری بسته به شرایط، به عنوان تیر اویلر برنولی یا تیموشنکو بررسی می‌شوند.

از اولین اقدامات، مقاله‌ی کوتاهی بود که در سال ۱۹۴۶ توسط دانهولتر[1] [۲] ارائه شد. وی خمش و دو فرکانس طبیعی اول کوپل شده در دو جهت اصلی مقطع مستطیلی ریشه را مورد بررسی قرار داد و از دو رابطه‌ی تجربی برای فرکانس‌ها در آن جهات استفاده کرد. همانطور که اشاره شد هدف مهم در این

[1] Dunholter

بررسی‌ها مطالعه‌ی رفتار پره‌هاست. بنابراین در بسیاری از مطالعات، مقاطع جدارنازک به عنوان مسئله مورد بررسی قرار می‌گیرند. برای نمونه، اقدامات مفیدی در سال ۱۹۵۷ توسط کارنیگ[1] [۳] در زمینه‌ی بررسی این دسته از تیرها انجام شد. او با استفاده از اصل کار مجازی معادلات تعادل یک پره‌ی یکسر گیردار با مقطع باریک را در مختصات کارتزین نوشت. سپس برای یک محدوده‌ی زاویه‌ای ۰ تا ۹۰ درجه نتایج خیز تیر از روش تئوری با نتایج آزمایشگاهی برای بارگذاری متمرکز و گسترده مقایسه کرده و همخوانی قابل قبولی مشاهده کرد. در ادامه معادلات کلی حرکت برای یک پره‌ی یکسر گیردار پیچیده توسط کارنیگ [۴] در سال ۱۹۵۹ ارائه شد. از آنجا که در برخی از مسائل مثل تیرهای کوتاه یا مودهای بالای ارتعاشات، نمی‌توان از اثرات برشی صرف نظر کرد، او سپس در سال ۱۹۶۴مطالعه‌ی خود را با در نظر گرفتن اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی بسط داد [۵]. در سال ۱۹۶۹ خمش الاستیک تیری با یک سطح مقطع بیضوی توسط گودیر[2] [۶] در حالتی که تیر در دو انتها تحت گشتاور خمشی قرار داشت بررسی شد. وی عباراتی برای تعیین تنش و انحنای خط مرکز سطح ارائه کرد. در این مقاله نتیجه گرفته شد که هرچه مقطع جدار نازکتر باشد اثر پیچش ساختاری بارزتر بوده و زاویه‌ی پیچش کوچک، اثر کمی روی فرکانس‌های پایین تیر دارد اما اثر آن روی فرکانس‌های بالاتر به خصوص برای تیرهای جدار نازک چشمگیر است. در سال ۱۹۷۱ داوسون[3] و همکاران [۷] فرکانس‌های طبیعی تیر پیچیده‌ی طره با مقطع مستطیلی یکنواخت را بدست آوردند. در این مطالعه اثرات برشی و اینرسی دورانی بوسیله‌ی انتگرال گیری عددی از معادلات دیفرانسیل پیاپی درجه‌ی اول در نظر گرفته شد. برای نسبت ضخامت به عرض متفاوت در طول‌های متفاوت آزمایش‌هایی هم انجام گرفت و زاویه‌ی پیچش تیر بین صفر تا نود درجه بررسی شد. در سال ۲۰۰۱ لین[4] و همکاران [۸] معادلات کوپل شده و شرایط مرزی خمش-خمش را برای ارتعاشات اجباری تیر تیموشنکوی غیر یکنواخت با استفاده از اصل همیلتون بدست آوردند. در سال

[1] Carnegie
[2] Goodier
[3] Dawson
[4] Lin

۲۰۱۰ چن[1] [۹] با اعمال اصل مینیمم انرژی پتانسیل، خمش استاتیکی تیر تیموشنکوی پیچیده را تحت بار گسترده‌ی جانبی تحلیل کرد. حل دقیق معادلات ارائه شد و پارامترهای مختلف بررسی شدند. او اثر زاویه‌ی پیچش و نسبت ضخامت به طول را بر خمش تیر بررسی کرد. با بررسی نتایج این روش با تئوری اویلر برنولی ادعا کرد که برای تیرهای کوتاه نمی‌توان از اثرات برشی صرف‌نظر کرد. همچنین با بارگذاری در دو جهت نتیجه گرفت که با افزایش زاویه‌ی پیچش، خیز ماکزیمم برای بارگذاری در جهت سفت‌تر کاهش و برای بارگذاری در جهت نرم‌تر افزایش میابد.

همانطور که در فصل بعد اشاره خواهد شد، معادلات دیفرانسیل حاکم بر این دسته از تیرها در ساده-ترین حالت‌ها هم بدلیل کوپل شدن بسیار پیچیده هستند. به خصوص وقتی که اثرات برشی و اینرسی دورانی هم لحاظ شوند این مشکل بسیار جدی‌تر می‌شود. در سال ۱۹۸۰ سابرهمانیام[2] و همکاران [۱۰] برای بدست آوردن خیز استاتیکی یک پره، اثرات برشی را در نظر گرفتند. یک حل دقیق برای پره‌ی تحت بار گسترده‌ی یکنواخت با انتگرال گیری مستقیم از معادلات گشتاور خمشی بدست آمد. اما بدلیل استفاده از شرایط مرزی نامناسب این حل دقت کافی نداشت.

در اکثر قریب به اتفاق مطالعات، برای حل مسائل روش تحلیلی وجود نداشته و از روش اجزای محدود استفاده می‌شود. از آن جمله می‌توان به تحقیقات لارنس[3] [۱۱] در سال ۱۹۷۰ اشاره کرد. وی ماتریس‌های سفتی و نرمی را برای یک المان تیر بدست آورد. این مدل برای محاسبه‌ی خیز تیر تحت بار انتهایی استفاده شد و سپس با حالتی متشکل از چند المان تیر مستقیم (بدون پیچش) که هر کدام مستقلا چرخیده بودند مقایسه شد. مشاهده شد که در حالتی که تیر از المان‌های مستقیم و جزء جزء چرخیده شده تشکیل می‌شود، خطای زیادی در خیز مربوط به کوپلینگ بوجود می‌آید. در سال ۱۹۷۸ گاپتا[4] و همکاران [۱۲] با روش اجزای محدود به بررسی فرکانس‌های طبیعی تیر طره‌ی پیچیده و مخروطی شونده پرداختند. در سال ۱۹۸۰ تحلیل خیز و تنش بوجود آمده در پره‌های مخروطی با روش

[1] Chen
[2] Subrahmanyam
[3] Lawrence
[4] Gupta

اجزای محدود توسط رامامورتی[1] [۱۳] انجام شد. در سال ۲۰۰۰ ویلساک[2] [۱۴] یک المان اجزای محدود برای خمش در دو صفحه با چهار درجه آزادی در هر گره ارائه کرد و ارتعاشات جانبی تیر بررسی و صحت سنجی شد و با روابط بدست آمده اثبات کرد که در صورت برابر بودن سفتی خمشی در دو جهت اصلی مقطع، کوپلینگ‌ها از بین می‌روند. در سال ۲۰۰۱ راوو[3] و همکاران [۱۵] ماتریس سفتی و ماتریس جرم تیر تیموشنکوی پیچیده‌ی مخروطی شونده و چرخان را بدست آوردند و چهار فرکانس طبیعی اول را به همراه شکل مود آن با روش اجزای محدود برای تیر طره محاسبه نمودند. در همان سال بانرجی[4] [۱۶] ماتریس سفتی تیر را با فرض اویلر برنولی محاسبه کرده و از آن برای حل ارتعاشات آزاد استفاده کرد. سپس وی در سال ۲۰۰۴ ماتریس سفتی با تئوری تیموشنکو را ارائه کرده [۱۷] و از آن برای محاسبه‌ی فرکانس طبیعی و شکل مودهای یک تیر طره استفاده نمود. بر اساس میدان‌های تغییر شکل کوپل شده، در سال ۲۰۰۴ یاردیموگلو[5] و همکاران [۱۸] خواص ارتعاشی یک تیر تیموشنکو را بوسیله‌ی یک مدل اجزای محدود بدست آوردند. در سال ۲۰۰۸ ابید[6] و همکاران [۱۹] یک المان تیر با روش اجزای محدود هیبریدی مرکب ارائه کردند. آنها ادعا کردند که تیر را فقط با یک المان مذکور می‌توان حل کرد و برای اثبات آن مقالات دیگر را مقایسه نموده و نتایج خوبی بدست آوردند. همچنین نتیجه گرفتند که به ازای زاویه‌ی پیچش ۹۰ درجه، کوپلینگ بین خمش-کشش و خمش-پیچش از بین می‌رود و تغییر شکل آن مانند تیر بدون پیچش خواهد بود و به ازای زاویه‌ی پیچش ۱۸۰ درجه، کوپلینگ خمش-خمش از بین می‌رود.

همانطور که اشاره شد، کاربرد این دسته از تیرها بیشتر در ماشین‌های چرخان (توربین‌ها، پره‌هاو...) است و لذا تحلیل آنها در شرایط چرخان بسیار مهم و کاربردی به نظر می‌رسد. در عمل هم در بسیاری از مطالعات در این زمینه، چرخش تیر هم مد نظر قرار گرفته است. در سال ۱۹۷۵ انصاری[7] [۲۰] ارتعاشات

[1] Ramamurti
[2] Vielsack
[3] Rao
[4] Banerjee
[5] Yardimoglu
[6] Abid
[7] Ansari

ارتعاشات غیر خطی یک بال با سطح مقطع نامتقارن که به یک دیسک نصب شده بود را بررسی کرد. در تحقیقات او اثرات تغییر شکل برشی و اینرسی چرخشی و نیروهای کریولیس مد نظر گرفته شد. وی به بررسی تفاوت ارتعاشات خطی و غیر خطی پرداخت و بیان کرد که در سرعت‌های بالا نمی‌توان از نیروهای کریولیس صرف‌نظر کرد. راوو[۱] و همکاران [۲۱] در سال ۱۹۷۷ پره‌ی توربو ماشین را به عنوان تیر طره‌ی مخروطی شونده[۲] با پیچش ساختاری با سطح مقطع مستطیلی در نظر گرفتند. با نوشتن روابط انرژی پتانسیل و جنبشی و با استفاده از تابع لاگرانژ و روش ریتز، معادلات حاکم را بدست آورده و برای سه فرکانس اول تیر حل کردند. نتیجه شد که اثر زاویه‌ی پیچش ساختاری و مخروطی شوندگی در فرکانس اول و سوم بر خلاف هم عمل می‌کنند و در فرکانس دوم به هم کمک می‌کنند. همچنین سرعت زاویه‌ای به افزایش همه‌ی فرکانس‌ها کمک می‌کند. در سال ۱۹۷۸ یک المان تیر مستقیم تیموشنکو توسط داوو[۳] [۲۲] ارائه شد. المان شامل سه گره و دو درجه‌ی آزادی خیز و شیب در هر گره بود. خیز المان توسط یک تابع درجه‌ی پنج حدس زده شد و شیب در هر گره با ارضا کردن معادلات گشتاور داخلی نوشته شد. اثر اینرسی دورانی با مدل جرم متمرکز در هر گره لحاظ شد. در سال ۱۹۸۱ سابرهمانیام[۴] و همکاران [۲۳] روش رسنر[۵] و انرژی پتانسیل کلی را برای محاسبه‌ی فرکانس طبیعی و مود شکل‌های تیر طره‌ی پیچیده با در نظر گرفتن اینرسی دورانی و اثرات برشی اعمال کردند. در سال ۱۹۸۲ فرکانس‌های طبیعی پره‌ی توربوماشین با تئوری پوسته‌های نازک[۶] و کمک روش ریتز توسط لیسا[۷] [۲۴] برای مقادیر مختلف مختلف پیچش و در ضخامت‌های مختلف پوسته محاسبه شد. تست استانداردی برای سنجش صحت نتایج المان‌های اجزای محدود در سال ۱۹۸۵ توسط مک نیل[۸] [۲۵] ارائه شد. این تست شامل یک تیر طره نمونه است که مقطع انتهایی آن نسبت به مقطع ریشه ۹۰ درجه پیچش دارد و تحت بارگذاریهای مختلف داخل و خارج صفحه در انتهای آزادش قرار می‌گیرد. حل این مسئله با در نظر گرفتن اثرات برشی

[1] Rao
[2] Tapered
[3] Dawe
[4] Subrahmanyam
[5] Reissner method
[6] Shallow Shell
[7] Leissa
[8] Macneal

و بدون آن ارائه شده است. در سال ۱۹۹۱ یک بررسی کلی از دینامیک سازه‌ی تیر هم توسط روزن[۱] [۲۶] انجام شده است. در همان سال یانگ[۲] [۲۷] ارتعاشات خمشی کوپل شده در دو صفحه برای تیر مخروطی شونده چرخان را تحت سرعت زاویه‌ای متغیر بررسی کرد. این سرعت متغیر باعث بوجود آمدن ترمهای وابسته به زمان در معادلات حرکت می‌شود که احتمال ناپایداری را زیاد می‌کند. اثرات ضریب میرایی، زاویه‌ی پیچش و نسبت مخروطی شوندگی بر ناحیه‌ی پایداری بررسی شد. نتیجه شد که افزایش زاویه‌ی پیچش و ضریب مخروطی شوندگی، دامنه‌ی پایداری مربوط به فرکانس تشدید اول را کاهش میدهد و افزایش سرعت زاویه‌ای به کاهش پایداری کمک می‌کند. در سال ۲۰۰۳ لین[۳] و همکاران [۲۸] معادلات دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات خمشی کوپل شده در دو صفحه را برای تیر طره با پیچش ساختاری دلخواه و جرم متمرکز نوک، تحت بارهای جانبی، با استفاده از اصل همیلتون بدست آوردند. حل دقیق سیستم را برای حالت استاتیک و دینامیک با استفاده از روش بسط مود[۴] انجام دادند.

در سال‌های ۲۰۰۳ و ۲۰۰۴ با روش اجزای محدود و تئوری اویلر برنولی پایداری استاتیکی و دینامیکی یک پره‌ی چرخان با مقطع ایرفویل توسط ساکار[۵] و همکاران [۲۹و۳۰] بررسی شد. یک مدل اجزای محدود توسط سابونکو[۶] و همکاران [۳۱] در سال ۲۰۰۶ ارائه شد تا پایداری استاتیکی و دینامیکی یک تیر تیموشنکوی چرخان با مقطع ایرفویل متقارن را بررسی کند. در سال ۲۰۰۹ لی[۷] و همکاران [۳۲] اثرات زاویه‌ی پیچش را بر ارتعاشات و پایداری تیر تیموشنکوی چرخان بررسی کرده اند. نتیجه گرفتند که افزایش زاویه‌ی پیچش، اثر نیروی گریز از مرکز را بر فرکانس طبیعی کم می‌کند که اگر زاویه به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد، ناپایداری واگرا اتفاق می‌افتد.

از موارد کاربرد تیرهای با پیچش ساختاری در مته‌های سوراخکاری است. البته بررسی تیرها در این زمینه، متفاوت با بررسی تیر به عنوان پره است. مهمترین وجه تفاوت آن هم اینست که مته‌ی

[1] Rosen
[2] Young
[3] Lin
[4] Mode Expansion
[5] Sakar
[6] Sabuncu
[7] Lee