بسم الله الرحمن الرحیم

١٤٦٣٨٤

دانشگاه ارومیه

پوشش‌های هم‌دور از متروید‌های دو‌دوری

الهام ایمانی

دانشکده‌ی علوم
گروه ریاضی

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

استاد راهنما:

دکتر حبیب اذانچیلر

شهریور–۱۳۸۹

پایان نامه خانم : الهام ایمانی   به تاریخ   شماره: ۲-۱۰۶۳

مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی و نمره ۱۸ هجده (به حروف)

قرار گرفت.

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران: دکتر حبیب اذانچیلر

۲- داور خارجی: دکتر قدرت اله آزادی

۳- داور داخلی: دکتر محمد علی اسدی

۴- نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر اکبری دیلمقانی

تقدیم به

پدر عزیزم

و

مادر و مادربزرگ

مهربانم

تقدیر و تشکر

حمد و سپاس بیکران خدا را که به اینجانب توفیق تحصیل علم و کسب معرفت را عطا فرمود تا با توکل به او این مرحله را هم پشت سر بگذارم و همواره ناظر و شاکر بر الطاف بی‌انتهایش باشم.

بر خود وظیفه می‌دانم مراتب تشکر و تواضع خود را در قبال کسانی که در طول تحصیل مرا مورد لطف و عنایت قرار داده‌اند، با کمال امتنان ابراز دارم.

از پدر، مادر و خانواده عزیزم به خاطر تمامی زحمات و حمایت‌هایشان کمال تشکر و قدردانی را دارم. بدیهی است که بدون کمک آنها هرگز این موفقیت حاصل نمی‌شد.

از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر حبیب اذانچیلر که پیشبرد این پایان‌نامه مرهون علم، دانش، راهنمایی و حمایت‌های ایشان است، بالاترین درجات تقدیر و تشکر را به عمل می‌آورم.

از دیگر اساتید محترم، آقایان دکتر آزادی و دکتر اسدی به پاس زحماتشان در داوری این پایان‌نامه و از همهٔ کسانی که در این مدت از آنان کلامی آموخته‌ام قدردانی می‌نمایم.

فهرست مندرجات

چکیده

دو نوع ماترویید مانند $M = (E, \mathcal{C})$ روی یال‌های G تعریف می شود که در اولی $\mathcal{C}$ دورهای G و در دومی $\mathcal{C}$ دو—دورهای G هستند. اولی ماترویید دوری G و دومی ماترویید دو—دوری G نامیده می‌شود.

در این پایان‌نامه، ماترویید دوری روی G را با $M(G)$ و ماترویید دو—دوری روی G را با $B(G)$ نشان می‌دهیم. برای هر ماترویید دو—دوری $B(G)$، یک پوشش هم—دور از سایز حداکثر محیط $B(G)$ پیدا می‌کنیم که آن پوشش شامل هر یال حداقل دو بار باشد. ما این مبحث را به نتیجه ای از نیومن—لارا [۱] و ریورا—کامپو [۲] و یوروتیا [۳] برای ماتروییدهای گرافیک توسیع می‌دهیم.

[۱] Neumann-Lara
[۲] Rivera-Campo
[۳] Urrutia

پیشگفتار

در این پایان‌نامه، ماترویدهای دو—دوری $B(G)$ را معرفی کرده و مجموعه‌های مستقل و وابسته و دورها و هم—دورها و رتبه‌ی این ماتروید را شناسایی می‌کنیم. در بیشتر قضیه‌ها ماتروید را ۲—همبند در نظر می‌گیریم. لموس و آکسلی نشان دادند که تعداد عناصر یک ماتروید ۲—همبند کراندار است. در فصل ۱ به تعاریف و لم‌ها و قضایای مقدماتی گراف و ماتروید می‌پردازیم. فصل ۲ به تعاریف و نکاتی در مورد ماترویدهای دو—دوری اشاره دارد. در فصل ۳ به بیان مفهوم پوشش در گراف‌ها و برخی تعاریف و لم‌های مقدماتی می‌پردازیم و در نهایت در فصل ۴ لم و قضایای اصلی را بیان می‌کنیم.

این پایان‌نامه بر اساس مقاله‌ی زیر تهیه و تنظیم شده است:

Jennifer McNulty, Nancy Ann Neudauer On cocircuit covers of bicircular matroids,Journal of Discrete Mathematics 308(2008) 4008-4013.

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی از نظریه گراف و ماترويد

دراین فصل به برخی از تعاریف و قضایای پایه‌ای مورد نیاز از نظریه گراف و مترويد اشاره می‌کنیم و برای خلاصه‌گرایی از ارائهِ اثبات قضایا و لم‌ها در این فصل صرف نظر می‌کنیم. مفاهیم اولیه نظریه گراف از [۷] و نظریه مترويد از [۴] مورد استفاده قرار گرفته است.

۱.۱ مباحثی از نظریه گراف

تعریف ۱.۱.۱ گراف G [۱] سه تایی است متشکل از یک مجموعهٔ متناهی و غیر خالی $V(G)$ که اعضای آن رأس‌های گراف [۲] و یک مجموعهٔ متناهی $E(G)$ که اعضای آن یال‌های گراف [۳] نامیده می‌شوند و یک رابطه‌ی وقوع که به هر عضو $E(G)$ دو عضو از اعضای $V(G)$ را وابسته می کند.

---

[۱] Graph
[۲] Vertex set
[۳] Edge set

تعریف ۲.۱.۱ اگر نقاط انتهایی یک یال بر هم منطبق باشند آن را یک طوقه[۴] می‌گوییم و اگر نقاط انتهایی دو یال یکسان باشند آنها را یال‌های موازی یا چندگانه[۵] گوییم و گراف G را که فاقد طوقه و یال موازی باشد را گراف ساده[۶] گوییم.

تعریف ۳.۱.۱ گراف H زیر گراف[۷] G است هرگاه $V(H)$ و $E(H)$ به ترتیب زیر مجموعه‌هایی از $V(G)$ و $E(G)$ باشند.

تعریف ۴.۱.۱ زیر گرافی از G که شامل هر رأس G باشد، زیر گراف **فراگیر**[۸] نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۱.۱ گراف‌های ساده‌ی G_1 و G_2 را گراف‌های **یکریخت**[۹] گوییم و بصورت $G_1 \cong G_2$ نشان می‌دهیم هرگاه تناظر یک به یک $f : V(G_1) \to V(G_2)$ وجود داشته باشد بطوریکه:

$$uv \in E(G_1) \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E(G_2)$$

تعریف ۶.۱.۱ گراف ساده‌ای که در آن هر دو رأس متمایز با یک یال به یکدیگر متصل شوند را گراف **کامل**[۱۰] می‌نامیم. هر گراف کامل با n رأس را با K_n نمایش می‌دهیم.

تعریف ۷.۱.۱ درجه‌ی v_i [۱۱] $d(v_i)$، تعداد یال‌های مجاور با رأس v_i است.

[۴] Loop
[۵] Multiple
[۶] Simple graph
[۷] Subgraph
[۸] Spanning subgraph
[۹] Isomorphic graphs
[۱۰] Complete graph
[۱۱] degree

تعریف ۸.۱.۱ یک گشت[۱۲] در گراف G دنباله‌ای از رأس‌ها و یال‌های G مانند $v_0e_1v_1...e_kv_{k+1}$ است که در آن v_{i-1} و v_i برای هر $0 \leq i \leq k+1$ نقاط انتهایی یال e_i هستند.

هرگاه یالی در گشت تکرار نشود آن را یک گذر[۱۳] گوییم و هرگاه هیچ رأسی در گذر تکرار نشود آن را یک مسیر [۱۴] می‌نامیم.

مسیر $v_0e_1v_1...e_nv_n$ که در آن رابطه $v_0=v_n$ برقرار باشد را دور[۱۵] گوییم.

تعریف ۹.۱.۱ گراف G را همبند[۱۶] گوییم هرگاه برای هر دو رأس v و u از آن یک مسیر وجود داشته باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱ همبندی G که آن را با K(G) نشان می دهیم عبارتست از کمترین تعداد رأس‌های ممکن که با حذف آنها یک گراف ناهمبند یا یک رأس تنها حاصل می شود. گراف G را k–همبند گوییم هرگاه $K(G) \geq k$. همچنین اگر G یک گراف بی طوقه و فاقد رأس تنها بوده و حداقل سه رأس داشته باشد، آنگاه G ۲–همبند است اگر و تنها اگر برای هر دو یال متمایز G دوری از G شامل این دو یال وجود داشته باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱ هر زیرگراف همبند ماکسیمال G را یک مؤلفه‌ی G [۱۷] یا یک مؤلفه‌ی همبند G گویند.

---

[۱۲] Walk
[۱۳] Trail
[۱۴] Path
[۱۵] Circuit
[۱۶] Connected
[۱۷] Component

تعریف ۱۲.۱.۱ یال e از گراف G را یک یال برش یا **پل** [۱۸] گویند هرگاه حذف e، تعداد مؤلفه‌های همبند را افزایش دهد.

تعریف ۱۳.۱.۱ گراف همبند بی دور، درخت [۱۹] نامیده می‌شود.

تعریف ۱۴.۱.۱ زیرگراف بی دور H از گراف G را که در آن $V(G) = V(H)$ باشد را درخت فراگیر [۲۰] G گوییم.

تعریف ۱۵.۱.۱ اگر e یالی از گراف G باشد، آنگاه $G - e$ گرافی است که از حذف یال e در گراف G بدست می آید.

تعریف ۱۶.۱.۱ یال e از گراف G رامنقبض شده گوییم هرگاه آن یال حذف شده و دو سر آن روی هم قرار گیرند. گراف بدست آمده از **انقباض** [۲۱] یال e را با G.e نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۷.۱.۱ گرافی که یکریخت با دوگانش باشد، گراف **خود دوگان** [۲۲] نامیده می‌شود.

تعریف ۱۸.۱.۱ یک **برش یالی** [۲۳]، مجموعه‌ای از یال‌هاست که حذف آنها تعداد مؤلفه‌های همبند را افزایش می‌دهد.

تعریف ۱۹.۱.۱ برش یالی مینیمال، بند [۲۴] نامیده می‌شود.

[۱۸] Bridge
[۱۹] Tree
[۲۰] Spaning tree
[۲۱] Contraction
[۲۲] Self-dual
[۲۳] Edge-cut
[۲۴] Bond

تعریف ۲۰.۱.۱ برش رأسی [۲۵]، مجموعه‌ای از رئوس است که حذف آنها تعداد مؤلفه‌های همبند را افزایش می‌دهد.

هرگاه برش رأسی X شامل یک رأس تنهای v باشد، در اینصورت v، یک رأس برشی از گراف G نامیده می‌شود.

تعریف ۲۱.۱.۱ بلوک[۲۶]، گراف ۲–همبند ماکسیمال است که رأس برشی ندارد.

تذکر ۲۲.۱.۱ اگر بلوکی از G بیش از یک یال داشته باشد، آنگاه گرافی همبند و فاقد رأس برش و لذا یک گراف ۲–همبند است. در نتیجه بلوک‌های یک گراف بی طوقه، رأس‌های تنها، پل‌ها وزیرگراف‌های ۲–همبند ماکسیمال آن هستند.

تعریف ۲۳.۱.۱ دو مسیر از u به v را جدا از هم داخلی گویند هرگاه در هیچ رأس میانی مشترک نباشند.

تعریف ۲۴.۱.۱ وتر دور C [۲۷]، یالی است که در C نیست ولی نقاط انتهایی آن روی C است.

تعریف ۲۵.۱.۱ در یک گراف G زیرتقسیم[۲۸] یال uv عمل جایگزینی یال uv با یک مسیر uwv است که رأس درونی w رأسی جدید است.

تعریف ۲۶.۱.۱ محیط گراف G [۲۹]، ماکسیمم کاردینال دورهای گراف G است وآن را با $c(G)$ نمایش می‌دهند.

---
[۲۵] Vertex-cut
[۲۶] Block
[۲۷] Chord
[۲۸] Subdivision
[۲۹] Circumference

تذکر ۲۷.۱.۱ یک گراف ۲–همبند با n رأس و مینیمم درجه k، محیط حداقل $min\{n, 2k\}$ دارد.

تعریف ۲۸.۱.۱ گراف چرخ[30] W_n گرافی با n رأس است که n-1 رأس آن رأس‌های یک دور و رأس دیگر در میان این دور قرار دارد بطوریکه همه n-1 رأس پیرامون به این رأس مرکزی وصل شده‌اند. یال‌هایی که متعلق به محیط چرخ هستند را اعضای محیطی یا لبه‌های چرخ[31] و یال‌هایی که رأس مرکزی را به رأس‌های اطراف متصل می کنند پره[32] می‌نامیم.

۲.۱ متروید

تعریف ۱.۲.۱ متروید[33] M زوج مرتب $(E, \mathcal{I})$ می‌باشد که در آن، E مجموعه‌ای متناهی بوده و $\mathcal{I}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های E می‌باشد که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$(I1)$: $\emptyset \in \mathcal{I}$.

$(I2)$: اگر $I \in \mathcal{I}$ و $I' \subseteq I$، آنگاه $I' \in \mathcal{I}$.

$(I3)$: اگر I_1 و I_2 متعلّق به $\mathcal{I}$ باشند و $|I_2| > |I_1|$، آنگاه عضوی از $I_2 - I_1$ مانند e چنان موجود است که $I_1 \cup e \in \mathcal{I}$.

شرط سوم را اصل استقلال گوییم.

[30] Wheel graph
[31] Rim wheel
[32] Spoke
[33] Matroid

اعضای $\mathcal{I}$ را **مجموعه‌های مستقل**[۳۴] و اعضای E را مجموعه زمینه[۳۵] M گوییم.

مجموعه‌های مستقل ماکسیمال را **پایه**[۳۶]های یک ماترویید گوییم.

زیرمجموعه‌ای از E که در $\mathcal{I}$ نیست را یک **مجموعه‌ی وابسته**[۳۷] ماترویید گوییم.

زیرمجموعه‌های وابسته مینیمال را **دور**[۳۸]های ماترویید گوییم.

مثال ۲.۲.۱ فرض کنید A ماتریس زیر باشد:

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

که در آن ستون‌ها به ترتیب از چپ ۱،۲،۳،۴و۵ نامگذاری شده‌اند. در اینصورت با فرض:

$E = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{۱\}, \{۲\}, \{۴\}, \{۵\}, \{۱,۲\}, \{۱,۵\}, \{۲,۴\}, \{۲,۵\}, \{۴,۵\}\}$

که در آن $\mathcal{I}$ مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های مستقل این ماتریس است. $(E,\mathcal{I})$ یک ماترویید می‌باشد.

ماترویید تولید شده به روش فوق را یک **ماترویید برداری**[۳۹] گوییم و با نماد $M[A]$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۳.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{C}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های مجموعه E باشد. دراینصورت $\mathcal{C}$ گردایه‌ای از دورهای یک ماترویید روی E است اگر و تنها اگر $\mathcal{C}$ در شرایط زیر صدق کند:

$(C۱)$ $\emptyset \notin \mathcal{C}$.

$(C۲)$ اگر $C_۱$ و $C_۲$ عناصری از $\mathcal{C}$ باشند و $C_۱ \subseteq C_۲$، آنگاه $C_۱ = C_۲$.

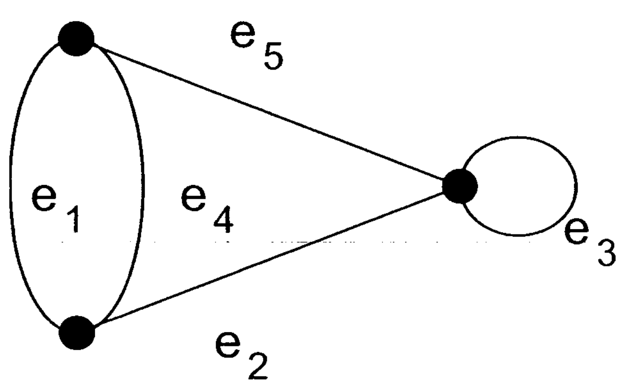
[۳۴] Independant Sets
[۳۵] Ground Set
[۳۶] Base
[۳۷] Dependant
[۳۸] Circuits
[۳۹] Vector Matroid

$(C3)$ اگر C_1 و C_2 عناصر متمایزی از C باشند و $e \in C_1 \cap C_2$، آنگاه عضوی از C مانند C_3 چنان موجود است که $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$.

برهان : به [[۴]، نتیجه۱.۱.۵] مراجعه شود. ■

تعریف ۴.۲.۱ دو متروید M_1 و M_2 را یکریخت گویند و می‌نویسند $M_1 \cong M_2$ هرگاه تناظر یک به یک $\psi : E(M_1) \to E(M_2)$ وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $X \subseteq E$، $\psi(X)$ مجموعه ای مستقل در M_2 است اگر و تنها اگر X در M_1 مستقل باشد.

مثال ۵.۲.۱ فرض کنید G گراف نشان داده شده در شکل زیر باشد و $M = M(G)$.



شکل ۱.۱

$E(M) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ و $C(M) = \{\{e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_1, e_2, e_5\}, \{e_2, e_4, e_5\}\}$. همچنین فرض کنیم A ماتریس زیر باشد:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

که در آن ستونها به ترتیب از چپ ۱،۲،۳،۴و۵ نامگذاری شده‌اند. $E = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و $C = \{\{۳\}, \{۱, ۴\}, \{۱, ۲, ۵\}, \{۲, ۴, ۵\}\}$ که $\mathcal{C}$ مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های وابسته‌ی این ماتریس است. دوسویی ψ را از $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ به $\{e_۱, e_۲, e_۳, e_۴, e_۵\}$ تعریف می‌کنیم که $\psi(i) = e_i$. مجموعه X یک دور در $M[A]$ است اگر و تنها اگر $\psi(X)$ یک دور در M باشد و مجموعه Y یک مجموعه مستقل در $M[A]$ است اگر و تنها اگر $\psi(Y)$ یک مجموعه مستقل در M باشد. پس $M_۱$ و $M_۲$ یکریخت هستند.

تعریف ۶.۲.۱ فرض کنید E یک مجموعه‌ی n عضوی و $\mathcal{B}$ گردایه‌ی همه‌ی زیر مجموعه‌های m عضوی E باشد که در آن $۰ \leq m \leq n$. در اینصورت $\mathcal{B}$ گردایه‌ی پایه‌های یک ماترویید روی E است. چنین مامترویدی را با $U_{m,n}$ نمایش داده و آن را **ماترویید یکنواخت** [۴۰] گوییم و داریم:

$$\mathcal{I}(U_{m,n}) = \{X \subseteq E : |X| \leq m\}$$

$$\mathcal{C}(U_{m,n}) = \begin{cases} \emptyset & m = n \\ \{ X \subseteq E : |X| = m + ۱ \} & m < n \end{cases}$$

تعریف ۷.۲.۱ فرض می‌کنیم G یک گراف باشد و $E = E(G)$. مجموعه $\mathcal{I}$ را مجموعه یال‌های تمامی زیر گراف‌های بی دور گراف G در نظر بگیرید. در این صورت $M = (E, \mathcal{I})$ یک ماترویید است و آن را ماترویید دوری گراف G می‌نامند.

[۴۰] Uniform matroid

تعریف ۸.۲.۱ مترویدی را که یکریخت با یک متروید دوری باشد، **متروید گرافیک** [۴۱] گوییم.

تعریف ۹.۲.۱ اگر g, f دو عضو متروید M باشند که $\{f, g\}$ یک دور باشد، آنگاه g, f را موازی گوییم. منظور از یک کلاس موازی از M، زیر مجموعه‌ی ماکسیمال X از E است که هر دو عضو متمایز آن موازی‌اند و هیچ عضو آن طوقه نیست.

یک کلاس موازی را بدیهی[۴۲] گوییم هرگاه شامل تنها یک عضو باشد.

تعریف ۱۰.۲.۱ فرض کنیم M=(E,$\mathcal{I}$) یک متروید و $X \subseteq E$ باشد، فرض کنید

$$\mathcal{I}\ |X\ = \{\ I \subseteq X\ |\ I \in \mathcal{I}\}$$

می توان دید که (X,$\mathcal{I}|X$) یک متروید است. این متروید را تحدید[۴۳] M به X یا حذف E-X از M گوییم و با نماد $M|X$ یا $M \backslash E-X$ نمایش می دهیم.

گردایه‌ی دورهای این متروید به‌صورت زیر است:

$$C(M|X) = \{C \in \mathcal{C}\ ;\ C \in X\}$$

تعریف ۱۱.۲.۱ از آنجاییکه $M\ |_X$ یک متروید است، لذا پایه‌های این متروید به تعداد مساوی عضو دارند. تعداد اعضای پایه‌های متروید $M\ |_X$ را رتبه [۴۴] X در متروید M گوییم و با نماد $r(X)$ یا $r_M(X)$ نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

---

[۴۱] Graphic Matroid

[۴۲] Trivial

[۴۳] Restriction

[۴۴] Rank

تعداد اعضای پایه $M|_X$ = تعداد اعضای زیرمجموعه مستقل ماکسیمال در $r_M(X) = X$

ویا: $$r(X) = Max\{|Y| \mid Y \subseteq X, Y \in \mathcal{I}\}$$

تعریف ۱۲.۲.۱ فرض کنیم M یک متروید روی E با تابع رتبه r باشد. تابع $cl : 2^E \to 2^E$ را برای هر $X \subseteq E$ با ضابطه‌ی

$$cl(X) = \{\ x \in E\ ;\ r(X \cup x) = r(X)\}$$

تعریف می‌کنیم. این تابع را عملگر بستار[۴۵] M گوییم.

لم ۱۳.۲.۱ عملگر بستار متروید M روی E دارای خواص زیر است:

۱) اگر $X \subseteq E$، آنگاه $X \subseteq cl(X)$.

۲) اگر $X \subseteq Y \subseteq E$، آنگاه $cl(X) \subseteq cl(Y)$.

۳) اگر $X \subseteq E$، آنگاه $cl(cl(X)) = cl(X)$.

۴) اگر $X \subseteq E$ و $x \in E$ و $y \in cl(X \cup x) - cl(X)$، آنگاه $x \in cl(X \cup y)$.

برهان : به [[۴]، لم ۲ .۴.۱] مراجعه شود. ■

قضیه ۱۴.۲.۱ فرض کنیم E یک مجموعه و $cl : 2^E \to 2^E$ تابعی باشد که در شرایط لم قبل صدق می کند. فرض کنیم

$$\mathcal{I}\ = \{\ X \subseteq E\ ;\ x \notin cl(X - x)\ ,\ \forall\, x \in X\}$$

[۴۵] Closur operatore