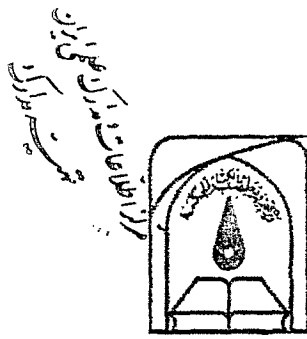


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

۱۳۸۲ / ۱۵ / ۳۰



دانشگاه تربیت مدرس
دانشکده علوم پایه

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد
ریاضی (محض)

عنوان:

خمینه‌های شبه‌ریمانی همگن تخت

نگارش:

رسول کافی موسوی

استاد راهنما:

دکتر سید محمد باقر کاشانی



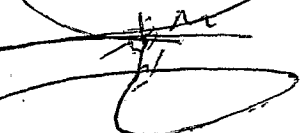

بهمن ۱۳۸۱

۴۸۴۲۶

بسمه تعالی

تاییدیه هیات داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

اعضای هیات داوران نسخه نهایی پایان نامه خانم/آقای رسول کافی موسوی تحت عنوان: خمینه های شبهریمانی همگن تخت را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آنرا برای اخذ درجه کارشناسی ارشد مورد تایید قرار دادند.

اعضای هیات داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	
۱- استاد راهنما	سید محمد باقر کاشانی	دانشیار	
۲- استاد مشاور			
۳- استاد ناظر	علی ایرانمنش	دانشیار	
۴- استاد ناظر	محمد میرزایی	استادیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	علی ایرانمنش	دانشیار	



بسمه تعالی

۱۳۸۲ / ۵ / ۳۰

آیین‌نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)‌های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)‌های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیت‌های علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱ در صورت اقدام به چاپ پایان‌نامه (رساله)‌ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲ در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کند:

کتاب حاضر، حاصل پایان‌نامه کارشناسی ارشد / رساله دکتری نگارنده در رشته

است

که در سال در دانشکده دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار خانم / جناب

آقای دکتر ، مشاوره سرکار خانم / جناب آقای دکتر و مشاوره سرکار

خانم / جناب آقای دکتر از آن دفاع شده است.

ماده ۳ به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

ماده ۴ در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ‌شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵ دانشجوی تعهد و قبول می‌کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه‌شده نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

ماده ۶ اینجانب رسول کانی سورس دانشجوی رشته ریاضی محض (هندسه) مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

نام و نام خانوادگی: رسول کانی سورس

تاریخ و امضا:

تقدیم به پدر و مادرم که همیشه دعای خیر آنها بدرقهٔ راهم بوده است

و

تقدیم به آنانی که ارزشهای والای انسانی را پاس می‌دارند.

تشکر و قدردانی:

به نام او که زینت زبانها و جانها نام او. به نام او که آسایش دلها و آرایش کارها به نام او. به نام او که روح روحها و مفتاح فتوحها نام او. به نام او که فرمانها روان و حالها بر نظام از نام او ... بس قفلها که به این نام از دلها برداشته، بس رقمهای محبت که به این نام در سینهها نگاشته، بس بیگانگان که به وی آشنا گشته، بس غافلان که به وی هشیار شده، بس مشتاقان که به این نام دوست را یافته، هم یاد است و هم یادگار، به نازش می‌دار تا وقت دیدار. (نهج البلاغه - دکتر شهیدی)

اگر چه به ناچیزی دستاورد خود در انجام این تحقیق معترفم، اما همین مختصر نیز پدید نمی‌آمد اگر لطف و حوصله اساتید محترم از اینجانب دریغ می‌شد. لذا شایسته است مراتب سپاس قلبی خود را از اساتید ارجمندم ابراز دارم، بخصوص جناب آقای دکتر سید محمد باقر کاشانی که هدایت این تحقیق را به عنوان استاد محترم راهنما بعهدہ داشتند.

در اینجا وظیفه خود می‌دانم کمال محبت، علاقه و سپاس خود را نسبت به پدر و مادر خویش ابراز کنم که هر آنچه دارم از دعای خیر همیشگی ایشان است. همچنین از خواهران خویش که در تایپ این پایان‌نامه مرا همراهی کردند تشکر می‌کنم.

در آخر از آقای محمد ترمس، از دوستان صمیمی لبنانی، که مرا در تایپ این پایان‌نامه یاری نمودند سپاسگزاری می‌کنم.

چکیده

خمینه‌های شبه‌ریمانی همگن کامل با خمیدگی ثابت ناصفر با تقریب طولپایی در سال ۱۹۶۱ رده‌بندی شده است. در همان سال یک قضیه ساختاری برای خمینه‌های شبه‌ریمانی همگن تخت کامل بیان شد. این قضیه در سال ۱۹۹۵ منجر به یک رده‌بندی می‌شود که در این پایان‌نامه مورد مطالعه قرار گرفته است. این قضیه، رده‌بندی را متناظر با یافتن جوابهای دستگاهی از معادلات درجه دوم می‌کند که در سال ۲۰۰۰ مورد بررسی قرار گرفت. البته جوابهای این دستگاه هنوز بطور کامل مشخص نشده است، زیرا نیازمند وقوف به ساختار اشتراکهای متناهی گروههای هم‌تافته است. در این پایان‌نامه بعضی جوابهای یافت شده در حالت خاص را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

کلیدواژه: خمیدگی، خمینه شبه‌ریمانی همگن، طولپایی، گروه هم‌تافته

فهرست

عنوان	صفحه
مقدمه.....	۱
فصل ۰.....	۴
پیشنیازها.....	۵
فصل ۱.....	۲۶
۱-۱ شرط همگنی.....	۲۷
۲-۱ قضیه ساختاری.....	۴۰
فصل ۲.....	۴۴
محاسبه مرکز ساز.....	۴۵
فصل ۳.....	۵۴
قضیه رده بندی.....	۵۵
فصل ۴.....	۶۵
ارائه چند مثال.....	۶۶
۸-۴ مثالهای مبتنی بر جبرهای تقسیمی.....	۶۹
۹-۴ مثالهای مبتنی بر جبرهای کلیفورد.....	۷۱

۷۴..... ۱۰-۴ کره‌های هم‌شیب

۷۷..... ۱۱-۴ ساختارهای موازی

۸۳..... مراجع

۸۶..... فهرست اصطلاحات

مقدمه

شناسائی خمینه‌ها و رده‌بندی کلی آنها کاری بسیار مشکل است، بنابراین معمولاً خمینه‌ها همراه با محدودیتهایی بررسی می‌شوند. یکی از حالت‌های مورد بررسی خمینه‌های ریمانی تخت است یعنی خمینه‌های ریمانی با خمیدگی ثابت صفر. خمینه‌های شبه ریمانی ساختمان پیچیده‌تری نسبت به خمینه‌های ریمانی دارند که به همین دلیل شناسائی و رده‌بندی آنها نیز تحقیق و بررسی بیشتری می‌طلبد.

در این پایان نامه خمینه‌های شبه ریمانی تخت همگن و کامل از دیدگاه همگن بودن مورد بررسی قرار گرفته است، یعنی شرط معادل برای همگن بودن بیان شده است. این کار توسط J.A. Wolf در سال ۱۹۶۱ بطور مقدماتی صورت گرفت که طی مقاله‌ای [14] شرائط مقدماتی برای بیان شرط معادل شاخصه همگنی را مطرح کرد، به این صورت که اگر Γ زیرگروهی از گروه

طولپایی‌های R^{p+q} باشد و $M = R^{p+q}/\Gamma$ ، آنگاه همگن بودن خمینه معادل تراپا عمل کردن مرکزساز Γ بر R^{p+q} است. در این مقاله طی گزاره‌ای مشخص می‌شود که اگر Γ زیرگروهی از گروه طولپایی‌های R^{p+q} و ϕ یک همریختی از این گروه به گروه ماتریسهای متعامد $s \times s$ باشد که $s = \dim U_\Gamma$ آنگاه R^{p+q} دارای یک زیرفضای ایزوتروپ ماکسیمال است و $\phi(\Gamma) = H$ روی این زیرفضای ماکسیمال عمل می‌کند، همچنین طی گزاره‌ای دیگر مشخص می‌شود که اعضای H بصورت زیر است

$$\begin{pmatrix} I & 0 & \alpha \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

که α ماتریس پادمتقارن است و سرانجام اینکه Γ نشان دهنده گروه انتقالهای U_Γ^\perp است. در قضیه اصلی این مقاله آمده است که اگر M یک خمینه شبریمانی همگن تخت و همبند باشد و یکی از حالت‌های فشرده، ریمانی، لورنتزی یا $n = \dim M \leq 4$ را داشته باشد، آنگاه M^n با R^n/Γ ایزومتريک است که Γ گروه گسسته انتقالهای R^n است. در دومین قضیه اصلی این مقاله نیز ثابت می‌شود که Γ گروهی آزاد با m مولد است که $m \leq n - 2$.

ولف در مرجع [12] که مقاله اصلی این پایان‌نامه است شرط تراپا عمل کردن را با انجام محاسبات مقدماتی بیشتر توضیح داده و طی لمی اشتراک‌های متناهی گروه‌های هم‌تافته را مشخص می‌کند. در اولین قضیه از دو قضیه اصلی این مقاله ارتباط مستقیم گروه‌های هم‌تافته و اشتراک‌های متناهی آنها و همگن بودن خمینه‌های شبریمانی تخت همبند و کامل بیان شده است. در قضیه دوم نیز طولپای

بودن دو خمینه شبه‌ریمانی همگن تخت، همبند و کامل مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه، ولف در مرجع [16] مثالهایی برای این نوع خمینه‌ها ارائه می‌دهد.

در این پایان‌نامه، در فصل صفر پیشنیازها ارائه شده است. در فصل دوم، مقاله اول ولف [14] بسط

داده شده است. در فصل سوم، مقاله دوم او [12] تشریح شده است. مثال‌های گفته شده در مقاله

سوم او [16] در فصل چهار بیان شده است.

فصل

پیشنیازها

پیشنماها

در این فصل مفهوماهای مقدماتی و بعضی قضایای جالب و مرتبط که در فصلهای بعدی مورد نیاز هستند یا به آنها ارجاع داده می‌شود گردآوری شده است.

در ابتدا مفهوم فضاهای پوششی و متناظر با آنها تبدیلات پوششی و نیز مفهوم ناپیوستگی سره را می‌آوریم.

تعریف [8]: گروه اساسی خمینه M عبارت است از گروهی که اعضای آن رده‌های هموتوپی کمانی خمهای پیوسته بسته به پایه نقطه $x \in M$ در M است. فرض کنید I بازه واحد بسته $[0, 1]$ در R^1 باشد. یک مسیر از p به q در M عبارت است از نگاشت پیوسته $\alpha: I \rightarrow M$ طوری که $\alpha(0) = p$ و $\alpha(1) = q$. $P(p, q)$ را مجموعه تمام این مسیرها فرض می‌کنیم.

تعریف: اگر $\alpha, \beta \in P(p, q)$ ، یک هموتوبی کمانی از α به β عبارت است از نگاشت پیوسته

$$H: I \times I \rightarrow M \text{ بطوری که برای } s, t \in I:$$

$$H(t, 0) = \alpha(t), H(0, s) = p,$$

$$H(t, 1) = \beta(t), H(1, s) = q.$$

تعریف [8]: اگر $\alpha \in P(p, q)$ و $\beta \in P(q, r)$ ، قرار دهید:

$$\alpha * \beta = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{for } 1/2 \leq t \leq 1 \\ \beta(2t-1) & \text{for } 0 \leq t < 1/2 \end{cases}$$

آنگاه $\alpha * \beta$ یک مسیر از p به r است که از α به β بدست آمده است.

گزاره (پوانکاره) [8]: فرض کنید $p \in M$ و $\pi_1(M, p)$ عبارت باشد از مجموعه همه رده‌های

هموتوبی کمانی در $P(p, p)$ و $[\alpha]$ نیز رده هموتوبی α باشد، ضرب $[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta]$

، $\pi_1(M, p)$ را به یک گروه تبدیل می‌کند که گروه اساسی M نسبت به p نامیده می‌شود.

اگر M همبند باشد آنگاه گروه‌های $\pi_1(M, p)$ ، برای هر p ، یکرخت هستند. در حقیقت می‌توان

گفت اگر γ یک مسیر از p به q باشد آنگاه $[\beta] \rightarrow [\gamma * \beta * \bar{\gamma}]$ همان یکرختی

خوشتعریف $\pi_1(M, p) \approx \pi_1(M, q)$ است.

تعریف [8]: M را همبند ساده گویند اگر M همبند باشد و گروه اساسی آن همانی باشد.

تعریف [8]: فرض کنید M و \tilde{M} خمینه‌های هموار باشند. نگاشت هموار $k: \tilde{M} \rightarrow M$ را یک

نگاشت پوششی گویند اگر هر نقطه $p \in M$ دارای یک همسایگی U باشد که بطور مساوی با k

پوشیده می‌شود، یعنی k هر مؤلفه $k^{-1}(U)$ را بصورت و ابرسان بروی U می‌نگارد.

برای مثال نگاشت $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ از R^1 به S^1 یک نگاشت پوششی است.