بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان :

مطالعه عملگرهای یکنوا و یکنوای ماکسیمال در فضاهای برداری توپولوژیک

استاد راهنما:

دکتر علی فرج‌زاده

استاد مشاور:

دکتر سیده مرضیه قویدل

نگارش:

سمیه جعفری

شهریور ۹۰

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

نام دانشجو:

سمیه جعفری

تحت عنوان :

مطالعه عملگرهای یکنوا و یکنوای ماکسیمال در فضاهای برداری توپولوژیک

در تاریخ ۱۳۹۰/۶/۹۰ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه به تصویب نهایی رسید.

۱ - استاد راهنمای پایان‌نامه   دکتر علی فرج‌زاده   با مرتبه‌ی علمی دانشیار   امضاء:

۲ - استاد داور داخل گروه   دکتر بهمن حیاتی   با مرتبه‌ی علمی استادیار   امضاء:

۳ - استاد داور خارج گروه   دکتر شاهپور حیدرخانی   با مرتبه‌ی علمی دانشیار   امضاء:

گزیده ای از دعای مکارم الاخلاق امام سجاد (علیه السلام)

پروردگارا، بر محمد و آل او درود فرست و ایمانم را به کاملترین درجه ایمان برسان و یقینم را بهترین یقین قرار ده و فرجام نیتم را بهترین نیتها بگردان و عملم را به بهترین اعمال برسان.

پروردگارا، با لطف خودت نیتم را نیکو گردان و یقینم را با رحمت بی‌پایانت از گزند انحراف، مصون‌دار و با قدرت بی انتهایت، هر عمل فاسدی که از من سر زده است اصلاح فرما.

پروردگارا، بر محمد و آل او درود فرست و اموری را که اهتمام به آنها مشغولم می‌کند کفایت فرما و مرا به کاری که فردای قیامت از من درخواست می‌کنی وادار کن و در ایام عمرم فراغتی بخش تا به کاری که برای آنم آفریده‌ای بپردازم و بی‌نیازم کن و به من روزی وسیع عطا فرما و عزت ببخش و گرفتار کبر و خودپسندی نکن و به عبادت خالص مشغولم دار و عبادتم را با عجب و غرور باطل نکن.

پروردگارا بر محمد و آل او درود فرست و به هر اندازه‌ای که میان مردم مرا مرتبه می‌بخشی پیش خودم به همان مقدار خوارم کن و هر عزت ظاهری که برایم پدیدار می‌سازی به همان اندازه پیش نفسم برای من خواری باطنی پدید آور.

پروردگارا بر محمد و آل او درود فرست و چنان کن که از هدایت شایسته بهره‌مند شوم و آن را با هیچ چیز عوض نکنم و از راه حق بهره‌مند گردم و از آن بیرون نروم و به نیت درست دست یابم و در آن شك نکنم و تا هنگامی که عمرم در راه طاعت تو می‌گذرد به من عمر بده و آنگاه که عمرم چراگاه شیطان شود، پیش از آنکه دشمنی سخت تو به من روی آورد یا خشم تو محکم و پایدار گردد جانم را بگیر.

پروردگارا، هیچ خصلتی را که مردم زشت بدانند در من نگذار مگر آنکه اصلاحش کنی و هیچ عادت ناپسندی را که مردم سرزنشم کنند باقی نگذار مگر آنکه نیکش سازی و هیچ خوی پسندیده‌ای را در من ناقص نگذار مگر آنکه کاملش کنی.

پروردگارا بر محمد و آل او درود فرست و دشمنی سخت دشمنان را درباره من به دوستی تبدیل کن و حسد و بدخواهی سرکشان را به محبت تغییر ده و بدگمانی صالحان را به اطمینان و دشمنی نزدیکان را به دوستی و بدرفتاری خویشان را به خوشرفتاری و خوار کردن نزدیکان را به یاری و دوستی مدارا کنندگان را به دوستی واقعی مبدل فرما.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هاست...

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر علی فرج‌زاده، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

سمیه جعفری

شهریور ۹۰

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

چکیده

عملگرهای یکنوای ماکسیمال و توابع محدب و نیم پیوسته پایینی به روش‌های متفاوتی با هم ارتباط دارند. یک قضیه مربوط به فیتزپاتریک نمایشی برای یک عملگر یکنوای ماکسیمال دلخواه روی فضای باناخ X ارائه می‌دهد. ما نمایش عملگرهای یکنوای ماکسیمال توسط توابع محدب و نیم‌پیوسته پایینی را به عملگرهای یکنوا گسترش می‌دهیم و نشان می‌دهیم که در فضاهای متناهی البعد عملگرهای یکنوایی که یک نمایش محدب دارند ، شامل اشتراکی از عملگرهای یکنوای ماکسیمال می‌باشند. سپس عملگرهای یکنوایی که یک توسیع یکنوای ماکسیمال منحصر به فرد دارند را شناسایی می کنیم.

علاوه بر این تئوری عملگرهای یکنوا را با استفاده از تحدب مجرد تعمیم می‌دهیم و نشان می‌دهیم که فرمول‌های مزدوج فنچل تعمیم‌یافته چگونه در اثبات قضایای مربوط به یکنوایی مجرد ماکسیمال استفاده می‌شوند. در پایان شرط لازم و کافی برای اینکه یک عملگر یکنوای مجرد به یک عملگر یکنوای مجرد ماکسیمال تبدیل شود را بدست می‌آوریم.
کلمات کلیدی:

دوگان فنچل تعمیم‌یافته، عملگر یکنوا، یکنوایی مجرد، تابع محدب مجرد، تحدب مجرد.

فهرست مطالب

عنوان صفحه

۱ پیش نیازها ۱

۱-۱ فضای برداری توپولوژیک ۲

۱-۲ فضای نرمدار و باناخ ۲

۱-۳ عملگرهای خطی و تابعک‌های خطی ۳

۱-۴ توابع محدب ۴

۱-۵ نگاشت طبیعی و فضاهای انعکاسی ۶

۱-۶ مفاهیم نیم پیوستگی بالایی و پایینی ۶

۱-۷ فضای موضعاً محدب و فضای‌ای جداسازی ۷

۱-۸ دوگانگی و توپولوژی‌های ضعیف ۸

۱-۹ نگاشت‌های مجموعه‌مقدار ۱۰

۱-۱۰ یکنوایی و یکنوایی ماکسیمال ۱۱

۱-۱۱ قضیه مزدوج دوم ۱۲

۱-۱۲ قضیه دوگان فنچل ۱۴

۱-۱۳ تابع محمل ۱۵

۲ عملگرهای یکنوای قابل نمایش ۱۷

۲-۱ تعاریف و مقدمات ۱۸

۲-۲ عملکرهای یکنوای قابل نمایش ۲۴

۲-۳ انتقال‌ها ۳۳

۲-۴ روش قطبیت برای یکنوایی ۳۵

۲-۵ یک مشخصه سازی برای عملگرهای یکنوای قابل نمایش در حالت متناهی البعد ۴۱

۲-۶ عملگرهای یکنوای پیش‌ماکسیمال ۴۹

۳ یکنوایی مجرد ماکسیمال و فرمول‌های مزدوج فنچل تعمیم یافته . . . ۵۳

۳-۱ مقدمات ۵۴

۳-۲ مسائلی درباره‌ی توابع محدب مجرد ۶۰

۳-۳ یکنوایی مجرد ماکسیمال و فرمول‌های مزدوج فنچل تعمیم یافته ۶۹

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۸۹

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۹۱

منابع و مآخذ ۹۳

پیشگفتار

عملگرهای یکنوا در بخش های مهمی از ریاضیات مانند معادلات دیفرانسیل جزیی، نظریه عملگرها و آنالیز عددی تعریف شده‌اند.
در سال ۱۹۳۵ گلمب [1] نخستین کسی بود که عملگرهای یکنوا را معرفی کرد. سپس تئوری عملگرهای یکنوای ماکسیمال که ابزاری توانمند در به دست آوردن قضای‌ای وجودی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی می باشد، اولین بار توسط مین تی [2] در سال ۱۹۵۹ مطرح شد.
عملگرهای یکنوا و توابع محدب و نیم‌پیوسته پایینی به روش‌های متفاوتی با هم ارتباط دارند. (رجوع شود به [**؟**، **؟**، **؟**، **؟**، **؟**، **؟**، **؟**، **؟**، **؟**]). فرض کنید X یک فضای باناخ حقیقی و X^* فضای دوگان آن باشد. ضرب دوگان بین X و X^* را با $\langle .,. \rangle$ نمایش دهید.

راکفلر [3] در سال ۱۹۷۰ در [**؟**] نشان داد که زیردیفرانسیل توابع غیربدیهی،محدب و نیم‌پیوسته پایینی روی X، یکنوای ماکسیمال هستند. اما به طور کلی عملگرهای یکنوای ماکسیمال زیردیفرانسیل‌هایی از توابع محدب نیستند. کراس در سال ۱۹۸۵ [4] در [**؟**] ثابت کرد که عملگرهای یکنوای ماکسیمال را می‌توان توسط زیردیفرانسیل توابع زینی نشان داد.پس از آن فیتزپاتریک [5] در سال ۱۹۸۸ در [**؟**] تابع φ_A را برای زیرمجموعه یکنوای ماکسیمال دلخواه A از $X \times X^*$ تعریف کرد و نشان داد که این تابع A را نمایش می‌دهد. مارتینزلگاز [6] و ترا [7] در سال ۲۰۰۱ در [**؟**] خانواده

$$\{\varphi_A \ : \ X \times X^* \text{ زیرمجموعه یکنوای ماکسیمال دلخواه از } A\}$$

را شناسایی نمودند. در سال ۲۰۰۲ بوراچیک [8] و اسویتر [9] در [**؟**] توابع فیتزپاتریک رادوباره مطالعه کردند و خانواده همه‌ی توابع محدب و نیم‌پیوسته پایینی وابسته به یک عملگر یکنوای ماکسیمال دلخواه را مطالعه نمودند.

در فصل دوم این پایان نامه که از مقاله [**؟**] برگرفته شده، ما نمایش عملگرهای یکنوای ماکسیمال توسط توابع محدب و نیم‌پیوسته پایینی را به عملگرهای یکنوا گسترش می‌دهیم و نشان می‌دهیم که در فضاهای متناهی البعد، عملگرهای یکنوایی که یک نمایش محدب دارند ، شامل اشتراکی از عملگرهای یکنوای ماکسیمال می‌باشند. سپس عملگرهای یکنوایی که یک توسیع یکنوای ماکسیمال منحصر به فرد دارند را بررسی می کنیم.

در سال ۱۹۷۰ موریو [10] در [**؟**] مزدوج فنچل [11] و قضیه مزدوج دوم را برای دو مجموعه دلخواه و توابع دوتایی دلخواه بیان و ثابت کرد. قضیه مزدوج دوم در این حالت، به قضیه فنچل–موریو مشهور است و همین قضیه به تئوری غنی تحدب مجرد منجر شده است. (رجوع شود به [**؟**، **؟**، **؟**]).
تحدب مجرد در مطالعه مسائل مربوط به آنالیز ریاضی و بهینه‌سازی کاربرد زیادی دارد. قضیه

---

[1] M. Golomb [2] G. Minty [3] Rockafellar [4] Krauss [5] Fitzpatrick [6] Martinez-legaz [7] Thera
[8] Burachick [9] Svaiter [10] Moreau [11] Fenchel

مزدوج دوم بیان می‌کند که هر تابع غیربدیهی، محدب و نیم‌پیوسته پایینی پوشش بالایی از توابع آفینی است که از آن کوچکترند. بنابرای توابع آفین نقش مهمی در آنالیز محدب کلاسیک بازی می‌کنند. در تحدب مجرد نقش مجموعه توابع آفین از یک مجموعه H از توابع گرفته می‌شود و پوشش بالایی آنها مجموعه توابع محدب مجرد را تشکیل می‌دهد.

هدف از این پایان نامه توسعه تئوری عملگرهای یکنوا با استفاده از تحدب مجرد می‌باشد.ما بعضی از خاصیت‌های یکنوایی که در حالت کلاسیک برقرارند را به حالت مجرد بسط می‌دهیم و ضمن تعریف یکنوایی مجرد و یکنوایی مجرد ماکسیمال مثال‌هایی برای فهم بیشتر مطلب ارائه می‌کنیم.

در فصل سوم این پایان نامه که از مقاله [**?**] اقتباس شده تئوری عملگرهای یکنوا را با استفاده از تحدب مجرد تعمیم می‌دهیم و نشان می‌دهیم که فرمول‌های مزدوج فنچل تعمیم‌یافته چگونه در اثبات قضیه دوگان فنچل و قضایای مربوط به یکنوایی مجرد ماکسیمال استفاده می‌شوند. همچنین شرط لازم و کافی برای اینکه یک عملگر یکنوای مجرد به یک عملگر یکنوای مجرد ماکسیمال تبدیل شود را بدست می‌آوریم.

قابل توجه است که فصل اول پایان نامه شامل بسیاری از تعاریف و قضایای مورد نیاز از قبیل قضیه مزدوج دوم و قضیه دوگان فنچل می‌باشد.

فصل ۱

پیش نیازها

در ای‌ن فصل تعاری‌ف و قضای‌ای‌ی از آنالی‌ز تابعی که در فصل‌های بعد مورد نی‌از هستند را بی‌ان می‌کنی‌م. فرض ما بر ای‌ن است که خواننده با مفاهی‌م اولی‌ه آنالی‌ز و توپولوژی عمومی آشنای‌ی دارد. در سراسر پای‌ان نامه $\mathbb{R}$ و $\mathbb{N}$، به ترتی‌ب نمای‌شگر مجموعه اعداد حقی‌قی و مجموعه اعداد طبی‌عی هستند و تمام فضاهای برداری روی می‌دان اعداد حقی‌قی در نظر گرفته خواهند شد.

۱-۱ فضای برداری توپولوژیک

تعریف ۱-۱-۱. **[؟]** فرض کنیم X یک فضای برداری باشد. (X,τ) را یک فضای برداری توپولوژیک نامیم هرگاه توپولوژی τ روی X به گونه‌ای باشد که

(۱) نگاشت $(x,y)\to x+y$ از $X\times X$ به X پیوسته باشد و

(۲) نگاشت $(t,x)\to tx$ از $\mathbb{R}\times X$ به X پیوسته باشد.

اگر (X,τ) یک فضای برداری توپولوژیک باشد، اغلب به اختصار گوییم X یک فضای برداری توپولوژیک است.

۲-۱ فضای نرمدار و باناخ

تعریف ۱-۲-۱. **[؟]** فرض کنیم X یک فضای برداری باشد. تابع $\|\cdot\|: X\to\mathbb{R}$ یک نیم‌نرم [۱۲] بر X است هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(آ) برای هر $x\in X$، $\|x\|\geq 0$؛

(ب) اگر $x\in X$ و α اسکالر باشد، $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$؛

(پ) برای هر x و y در X، $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

یک نیم‌نرم بر X را یک نرم [۱۳] گوییم، هرگاه در شرط زیر نیز صدق کند:

(ت) $\|x\|=0$ تساوی $x=0$ را ایجاب کند.

زوج مرتب $(X,\|\ \|)$ را یک فضای خطی نیم‌نرمدار [۱۴] (نرمدار [۱۵]) گوییم هرگاه $\|\ \|$ یک نیم‌نرم (نرم) بر X باشد. اگر نیم‌نرم (نرم) شناخته شده باشد، آنگاه اغلب X را یک فضای خطی نیم‌نرمدار (نرمدار) گوییم.

---

[۱۲] Semi-norm [۱۳] Norm [۱۴] Seminorm linear space [۱۵] Norm linear space

فرض کنیم X یک فضای خطی نیم نرمدار باشد. بنابر (پ)، نامساوی مثلثی برقرار است:
$$\|x-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| \quad (x, y, z \in X).$$

این در تلفیق با (ب) (فرض $\alpha = 0$ $\alpha = -1$) و (آ) نشان می دهد که $d(x, y) = \|x-y\|$ یک نیم متر بر X تعریف می‌کند و بنابر (ت)، نیم متر فوق بر X یک متر است هرگاه X یک فضای خطی نرمدار باشد.
هر فضای خطی نیم‌نرمدار، تحت توپولوژی حاصل از نیم‌نرم، یک فضای برداری توپولوژیک است. کافی است پیوسته بودن جمع و ضرب اسکالر را تحقیق کنیم که به راحتی از خواص (ب) و (پ) نیم‌نرم نتیجه می‌شوند.

تعریف ۱-۲-۲. هر فضای باناخ [۱۶] یک فضای خطی نرمدار است که با متر تعریف شده به وسیله نرمش کامل می‌باشد.

در ادامه برای اختصار از واژه نرمدار به جای خطی نرمدار استفاده خواهیم کرد.

۱-۳ عملگرهای خطی و تابعک‌های خطی

تعریف ۱-۳-۱. **[؟]** فرض کنیم X و Y فضاهای نرمدار روی میدان اعداد حقیقی و Λ نگاشتی خطی از X به توی Y باشد. آنگاه نرم نگاشت خطی Λ با نماد $\|\Lambda\|$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌گردد
$$\|\Lambda\| = sup\{\|\Lambda x\| : \|x\| \leq 1 ، x \in X\}. \tag{۱-۱}$$
هرگاه $\|\Lambda\| < \infty$، آنگاه Λ را یک نگاشت خطی کراندار گوییم.

توجه کنیم که $\|\Lambda\|$ کوچکترین عددی است که برای آن نامساوی زیر
$$\|\Lambda x\| \leq \|\Lambda\| \|x\|$$
به ازای هر $x \in X$ برقرار است.

گزاره ۱-۳-۲. *فرض کنیم X و Y فضاهای نرمدار باشند و $\Lambda : X \to Y$ خطی باشد. آنگاه شرایط زیر هم ارزند:*
(آ) Λ کراندار است.
(ب) Λ پیوسته است.
(پ) Λ در صفر پیوسته است.
(ت) $M > 0$ ای موجود است به طوری که به ازای هر $x \in X$، داریم $\|\Lambda x\| \leq M\|x\|$.

برهان. رجوع شود به گزاره ۵ از فصل ۵ از **[؟]**. □

[۱۶] Banach space

تعریف ۱-۳-۳. **[؟]** فرض کنیم X و Y فضاهای برداری توپولوژیک روی $\mathbb{R}$ باشند. فضای همه‌ی نگاشت‌های خطی پیوسته از X به Y را با $L(X,Y)$ نشان می‌دهد. $L(X,Y)$، تحت اعمال جمع توابع و ضرب اسکالر، یک فضای برداری است.

اگر X و Y فضاهای نرمدار باشند، آنگاه می‌توانیم یک نرم روی $L(X,Y)$ به وسیله‌ی **؟؟** تعریف کنیم. این نرم، نرم عملگر روی $L(X,Y)$ نامیده می‌شود.

گزاره ۱-۳-۴. *اگر Y یک فضای باناخ باشد، آنگاه $L(X,Y)$ باناخ است.*

برهان. رجوع شود به گزاره ۸ از فصل ۵ از **[؟]**. □

تعریف ۱-۳-۵. **[؟]** فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک روی $\mathbb{R}$ باشد. یک نگاشت خطی از X به $\mathbb{R}$ را یک تابعک خطی نامیم. در این صورت دوگان X، که با X^* نشان داده می‌شود، عبارت است از فضای همه‌ی تابعک‌های خطی پیوسته روی X، یعنی، $X^* = L(X,\mathbb{R})$.

اگر x^* یک تابعک خطی بر X باشد، ما اغلب مقدار x^* در $x \in X$ را با $x^*(x) = \langle x, x^* \rangle$ نشان می‌دهیم.

اگر X یک فضای نرم‌دار باشد، آنگاه از گزاره **؟؟** نتیجه می‌شود که X^* تحت نرم $\|x^*\| = sup\{|\langle x, x^*\rangle| : \|x\| \leq ۱\}$، یک فضای باناخ است. این نرم، نرم دوگان روی X^* نامیده می‌شود. حال می‌توانیم به طور مشابه فضای دوگان X^*، یعنی $L(X^*,\mathbb{R})$ را تعریف کنیم. این فضا را با X^{**} نشان داده و دوگان دوم X نامیم.

نتیجه ۱-۳-۶. *فرض کنیم x عنصری از فضای نرمدار X باشد. آنگاه*

$$\|x\| = \sup\{|\langle x, x^*\rangle| : \|x^*\| \leq ۱\}$$

و سوپریمم اختیار می‌شود.

برهان. رجوع شود به نتیجه ۵ از فصل ۱.۸ از **[؟]**. □

۱-۴ توابع محدب

تعریف ۱-۴-۱. **[؟]** فرض کنیم X یک فضای برداری و $K \subseteq X$ باشد. K را یک مخروط [۱۷] گوییم هرگاه به ازای هر $x \in K$ و هر اسکالر نامنفی t داشته باشیم

$$tx \in K.$$

تعریف ۱-۴-۲. **[؟]** فرض کنیم X یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ و $K \subseteq X$ باشد. K را محدب نامیم، هرگاه به ازای هر $x, y \in K$ و هر $۰ \leq t \leq ۱$، داشته باشیم

$$tx + (۱-t)y \in K.$$

[۱۷] Cone

از آنجا که اشتراک مجموعه های محدب، محدب است بنابرای‌ن اگر K زی‌ر مجموعه‌ای از X باشد، آنگاه می‌توان کوچکتری‌ن مجموعه محدب شامل عناصر K را به دست آورد. ای‌ن مجموعه که اشتراک تمام مجموعه‌های محدب شامل عناصر K است، پوشش محدب K [۱۸] نامی‌ده و با coK نشان داده می‌شود.

گزاره ۱-۴-۳. *اگر $K \subseteq X$، آنگاه coK عبارت است از مجموعه‌ی تمام ترکیبات محدب $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i$ به طوری که $x_i \in K$، $t_i \geq 0$ و $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$.*

برهان. رجوع شود به گزاره ۳ از فصل ۱۲ از [؟]. □

تعریف ۱-۴-۴. [؟] فرض کنیم K زیر مجموعه‌ی محدبی از X و f تابعی از K به توی دستگاه گسترش یافته اعداد حقیقی یعنی $(-\infty, \infty]$ باشد. در این صورت f را محدب گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in K$ و هر $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

همچنین اگر تابع f محدب باشد، آنگاه برش های پایینی [۱۹] تابع f برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$ که به صورت

$$S(f, \lambda) = \{x \in X : f(x) \leq \lambda\}$$

تعریف می‌شوند، محدب اند.

گزاره ۱-۴-۵. *فرض کنیم X یک فضای برداری باشد و توابع f ، g و f_i $(i \in I)$ از X به $(-\infty, +\infty]$ محدب باشند. در این صورت*

(آ) *$f + g$ محدب است.*

(ب) *اگر $\alpha \geq 0$ باشد، آنگاه αf محدب است.*

(پ) *$\sup_{i \in I} f_i$ محدب می‌باشد.*

برهان. رجوع شود به گزاره ۲.۲ از [؟]. □

۱-۵ نگاشت طبیعی و فضاهای انعکاسی

فرض کنی‌م X ی‌ک فضای نرمدار و X^{**} فضای دوگان X^* باشد. حال به ازای هر $x \in X$ نگاشت $\hat{x} : X^* \to \mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی

[۱۸] Covex hull [۱۹] Lower section

$$\langle \hat{x}, y^* \rangle = \langle x, y^* \rangle \quad , \quad (y^* \in X^*)$$

تعریف می‌کنیم. به وضوح $\hat{x}$ خطی است و بنابر نتیجه **؟؟** داریم

$$\|\hat{x}\| = sup\{|\langle x, y^*\rangle| : \|y^*\| \leq 1\} = \|x\|, \qquad (1-2)$$

که نشان می دهد $\hat{x}$ کراندار است. بنابراین $\hat{x} \in X^{**}$. حال می توان نگاشت $J_X : X \to X^{**}$ را با ضابطه‌ی $J_X x = \hat{x}$ تعریف کرد. این نگاشت به نگاشت متعارف [20] مشهور است.

از رابطه (1-2) واضح است که J_X یک ایزومتری (یک نگاشت یک به یک حافظ نرم) بین X و X^{**} ایجاد می‌کند. این ایزومتری لزوماً پوشا نیست. حال اگر J_X پوشا باشد، آنگاه X را یک فضای انعکاسی [21] گوییم.

۱-۶ مفاهیم نیم پیوستگی بالایی و پایینی

فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد.

تعریف ۱-۶-۱. [؟] تابع $f : X \to (-\infty, \infty]$ را در نقطه‌ی x نیم پیوسته‌ی پایینی [22] گوییم هرگاه

$$\liminf_{y \to x} f(y) \geq f(x),$$

و نیم پیوسته‌ی بالایی [23] گوییم اگر $-f$ در x نیم پیوسته‌ی پایینی باشد، به عبارت معادل

$$\limsup_{y \to x} f(y) \leq f(x).$$

جاییکه مفاهیم $\liminf\limits_{y\to x} f(y)$ و $\limsup\limits_{y\to x} f(y)$ به ترتیب عبارتند از $\sup\limits_{W} \inf\limits_{y\in W} f(y)$ و $\inf\limits_{W} \sup\limits_{y\in W} f(y)$ که در آن‌ها W همسایگی‌ای از x است.

گزاره ۱-۶-۲. *فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد و توابع f ، g و f_i از X به $(-\infty, +\infty]$ نیم پیوسته پایینی باشند. در این صورت*

(آ) *$f+g$ نیم پیوسته پایینی است.*

(ب) *اگر $\alpha \geq 0$ باشد، آنگاه αf نیم پیوسته پایینی است.*

(پ) *$\sup\limits_{i\in I} f_i$ نیم پیوسته پایینی می‌باشد.*

گزاره ۱-۶-۳. *رجوع شود به گزاره 1.5 از* **[؟]**.

گزاره ۱-۶-۴. *فرض کنیم $f : X \to (-\infty, \infty]$ محدب و نیم پیوسته پایینی باشد. اگر $y \in X$ ای چنان باشد که $f(y) \in \mathbb{R}$، آنگاه*

---

[20] Canonical map [21] Reflexive space [22] Lower semicontinuous [23] Upper semicontinuous

به ازای هر $x \in X$، $f(x) > -\infty$.

برهان. اگر فرض کنیم $z \in X$ چنان باشد که $f(z) = -\infty$، آنگاه بنابر محدب بودن f، به ازای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$f(\frac{1}{n}z + (1-\frac{1}{n})y) \leq \frac{1}{n}f(z) + (1-\frac{1}{n})f(y) = -\infty.$$

حال چون f نیم پیوسته پایینی است، داریم

$$f(y) \leq \liminf_{n\to\infty} f(\lambda_n z + (1-\lambda_n)y) = -\infty.$$

در نتیجه $f(y) = -\infty$ و این تناقض است. □

۱-۷ فضای موضعاً محدب و قضایای جداسازی

تعریف ۱-۷-۱. [؟] فضای برداری توپولوژیک (X, τ) را یک فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب یا به اختصار موضعاً محدب [۲۴] گوییم هرگاه τ یک پایه از همسایگی‌های محدب در صفر داشته باشد.

مثال ۱-۷-۲. هر فضای نرم‌دار یک فضای موضعاً محدب است. زیرا هر گوی باز در فضای نرم‌دار یک مجموعه محدب است.

قضیه ۱-۷-۳. *فرض کنیم X یک فضای موضعاً محدب هاسدورف باشد. اگر $x_\circ \neq \circ$ متعلق به X باشد، آنگاه $x^* \in X^*$ موجود است به طوری که $\langle x_\circ, x^*\rangle \neq \circ$. یعنی X^* نقاط X را جدا می‌کند.*

برهان. رجوع شود به نتیجه ۱۰ از فصل ۱۳ از [؟]. □

قضیه ۱-۷-۴ (جداسازی بزرگ). *فرض کنیم K یک زیرمجموعه محدب و ناتهی از یک فضای با بعد متناهی X باشد. اگر $x_\circ$ به K تعلق نداشته باشد، آنگاه $x^* \in X^*$ موجود است به طوری که $x^* \neq o$ و*

$$\sup_{y\in K}\langle y, x^*\rangle \leq \langle x_\circ, x^*\rangle.$$

برهان. رجوع شود به قضیه ۵-۲ از [؟]. □

۱-۸ دوگانگی و توپولوژی‌های ضعیف

اگر X ی‌ک فضای برداری باشد، مجموعه‌ی تمام تابعک‌ها ی خطی روی X را دوگان جبری X نامی‌ده و با X' نمای‌ش می دهی‌م.

[۲۴] Locally convex