دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه رياضي

پايان نامه کارشناسي ارشد رياضي محض گرايش آناليز

قضايايي نقطه ثابت براي نگاشتهاي انقباضي تعميم يافته

استاد راهنما : مجيد فخار

پژوهشگر : حميد رضا حاجي شريفي

شهريور ۱۳۸۹

چکیده

در این پایان نامه نخست قضیه نقطه ثابت نادلر را به چندین صورت گسترش می دهیم. سپس مفهوم T- فاصله را بیان کرده و به معرفی خاصیت های آن می پردازیم و گسترشی از قضیه نادلر را که وابسته به مفهوم T- فاصله است را بیان می کنیم. در آخر، مفهومی به نام Q- تابع، روی یک فضای شبه متریک را معرفی کرده و بعد از چند مثال در رابطه با این مفهوم، قضیه نادلر را در فضاهای شبه متریک همراه با یک Q- تابع، گسترش می دهیم.

واژه های کلیدی: فضاهای شبه متریک، فضای کامل، متریک هاسدورف، نقطه ثابت، اصل انقباضی باناخ، نگاشت های چند مقداری، قضیه نقطه ثابت نادلر.

فهرست مندرجات

پیشگفتار

اصل انقباضی باناخ نقش مهمی در بسیاری از شاخه های ریاضی و از جمله در آنالیز غیر خطی دارد، به همین دلیل توسط ریاضیدانان متعددی گسترش پیدا کرده است [۸، ۳۱، ٦، ١٦]. یکی از معروفترین این گسترش ها که مربوط به نگاشت های چند مقداری است و دارای صورتی ساده است، توسط نادلر[۱] در سال ۱۹٦۹ ارائه شد [١٦] و بعد از آن، قضیه نادلر نقشی غیر قابل انکار در آنالیز غیر خطی پیدا کرد و بسیاری از ریاضیدانان سعی در گسترش این قضیه نمودند و از جمله این افراد سوزوکی[۲] [۳۰] و فنگ[۳] ـلیو[۴] [۱۰] بوده اند، البته بسیار جالب است که همین قضایا نیز خود گسترش پیدا کرده اند [۷، ۱۳] و یا اینکه ریاضیدانان بدنبال گسترش آنها هستند.

اما در سال ۲۰۰۱ مقاله ای از سوزوکی چاپ شد [۲۵] که در آن مفهومی جدید به نام τـفاصله[۵] تعریف شد که گسترشی از مفاهیم قبلی همچون wـفاصله[٦] بود

---

[۱] S.B. Nadler

[۲] T. Suzuki

[۳] Y. Feng

[۴] S. Liu

[۵] τ-distance

[٦] w-distance

و در همان مقاله، سوزوکی چند قضیه در رابطه با نقطه ثابت که وابسته به مفهوم τـفاصله است، را عرضه کرده و چند سال بعد توانست قضیه نادلر را همراه با مفهوم τـفاصله گسترش دهد [۲۷].

در سال ۲۰۰۷ گسترشی از قضیه نادلر در فضاهای شبه متریک، همراه با یک Qـتابع [۷] توسط الهمیدان [۸] ـانصاری [۹] ـیاو [۱۰] ارائه شد [۱].

این پایان نامه در چهار فصل تنظیم شده است.

فصل اول مربوط به مفاهیم ساده و اولیه است که بیشتر به منظور یادآوری آورده شده‌اند.

در فصل دوم، دو گسترش قوی از قضیه نادلر که توسط سوزوکی و فنگ ـلیو اثبات شده‌اند را مورد بررسی قرار می دهیم و نشان می دهیم که قضیه فنگ ـلیو، اکیداً گسترشی از قضیه نادلر است. سپس قضیه ای از کلیم [۱۱] ـواردوسکی [۱۲] بیان می شود که خود گسترشی از قضیه فنگ ـلیو است و پس از آن گسترشی اکید از این قضیه را که توسط کریک [۱۳] ارائه شده است را می آوریم.

---

[۷] Q-function

[۸] S. Al-Homidan

[۹] Q.H. Ansari

[۱۰] J.C. Yao

[۱۱] D. Klim

[۱۲] D. Wardowski

[۱۳] L. Ciric

در فصل سوم نخست مفهوم τـفاصله را معرفی می کنیم و خاصیت های این مفهوم را مورد بررسی قرار می دهیم. سپس چند روش برای بدست آوردن یک τـفاصله، از روی τـفاصله های دیگر را بیان می کنیم و سپس بدنبال گسترش قضایای نقطه ثابت، از جمله قضیه نادلر توسط این مفهوم خواهیم رفت.

در فصل آخر مفهومی به نام Qـتابع روی یک فضای شبه متریک، معرفی می شود و خواص آن مورد بررسی قرار می گیرد و در آخر گسترشی از قضیه نادلر را برای فضاهای شبه متریک خواهیم دید.

فصل ۱

مفاهیم اولیه و قراردادها

در این فصل مطالبی ابتدایی که در ادامه مورد نیاز است آورده شده‌اند.

قرارداد: در اینجا ما N را اعداد طبیعی، R را اعداد حقیقی و $R_+ = [0, \infty)$ در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱.۱ . فرض کنید V یک فضای برداری روی R باشد، در این صورت، یک نرم روی V، تابعی به صورت زیر است:

$$\|\ .\ \| : V \to [0, \infty)$$

که در شرایط زیر صدق کند:

۱. $\| x \| = \circ \leftrightarrow x = \circ$

۲. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

برای هر x , y در V.

۳. $\| tx \| = | t | \| x \|$

برای هر t در R و x در V.

به دوتایی $(V, \| . \|)$ یک فضای نرم دار گوییم.

اگر بجای شرط اول در تعریف نرم داشته باشیم، $\| \circ \| = \circ$، آنگاه $\| . \|$ را یک نیم نرم روی V و $(V, \| . \|)$ را یک فضای نیم نرمدار گوییم.

تعریف ۲.۱ .فرض کنید X یک مجموعه باشد، یک متریک روی X تابعی به صورت زیر است:

$$d : X \times X \to [\circ, \infty)$$

که در شرایط زیر صدق کند:

۱. $d(x, y) = \circ \leftrightarrow x = y$

۲. $d(x, y) = d(y, x)$

۳. $d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z)$

برای هر x و y و z در X.

به دوتایی (X, d) یک فضای متریک گوییم.

تعریف ۳.۱ .فرض کنید X یک مجموعه باشد، یک شبه متریک روی X تابعی به صورت زیر است:

$$d : X \times X \to [\circ, \infty)$$

که در شرایط زیر صدق کند:

۱. $d(x, y) = \circ \leftrightarrow x = y$

۲. $d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z)$

برای هر x و y و z در X.

به دوتایی (X, d) یک فضای شبه متریک گوییم.

قرارداد: اگر (X, d) یک فضای متریک و $A \subseteq X$ باشد و از A به عنوان فضای متریک یاد کردیم، A را با متریک القایی در نظر می گیریم.

تعریف ۴.۱ . اگر (X, d) یک فضای متریک باشد بطوریکه هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد، آنگاه گوییم (X, d) یک فضای متریک کامل است.

گزاره ۵.۱ . هر فضای متریک فشرده یک فضای متریک کامل است.

اثبات . به [۲۰] رجوع کنید. ■

گزاره ۶.۱ . هر زیر مجموعه ی بسته از یک فضای فشرده، یک فضای فشرده و هر زیر مجموعه ی بسته از یک فضای کامل، یک فضای کامل است.

اثبات . به [۲۰] رجوع کنید. ■

گزاره ۷.۱ . هر دنباله صعودی و از بالا کران دار در R، همگرا به عددی حقیقی است.

هر دنباله نزولی و از پایین کران دار در R، همگرا به عددی حقیقی است.

هر دنباله یکنوا و کران دار در R، همگرا به عددی حقیقی است.

اثبات . به [۲۰] رجوع کنید. ■

قضیه ۸.۱ . فرض کنید X یک مجموعه ی غیرتهی و f و g در X تعریف شده باشند و دارای بردهای کران دار در R باشند آنگاه داریم:

$$\begin{aligned}\inf\{f(x):x\in X\}+\inf\{g(x):x\in X\} &\le \inf\{f(x)+g(x):x\in X\}\\ &\le \inf\{f(x):x\in X\}+\sup\{g(x):x\in X\}\\ &\le \sup\{f(x)+g(x):x\in X\}\\ &\le \sup\{f(x):x\in X\}+\sup\{g(x):x\in X\}\end{aligned}$$

اثبات . به [۲] رجوع کنید. ■

تعریف ۹.۱ . اگر (x_n) یک دنباله کران دار از اعداد حقیقی باشد آنگاه:

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\geq 1}\sup_{m\geq n} x_m$$

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\geq 1}\inf_{m\geq n} x_m$$

و اگر (x_n) از بالا بی کران باشد ، قرار می دهیم: $\limsup_{n\to\infty} x_n = \infty$

و اگر (x_n) از پایین بی کران باشد، قرار می دهیم: $\liminf_{n\to\infty} x_n = -\infty$

گزاره ۱۰.۱ . اگر (x_n) یک دنباله در R باشد، آنگاه $\limsup_{n\to\infty} x_n$ برابر با زبرینه[1] حد زیر دنباله های (x_n)، و $\liminf_{n\to\infty} x_n$ برابر با زیرینه[2] حد زیر دنباله های (x_n) است.

اثبات . به [۲] رجوع کنید. ■

گزاره ۱۱.۱ . اگر (x_n) یک دنباله از R باشد، همواره داریم

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$$

و دنباله ی کران دار (x_n) از R همگراست اگر و تنها اگر

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = x$$

[1] sup
[2] inf

و داریم $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

اثبات . به [۲] رجوع کنید. ■

گزاره ۱۲.۱ . اگر (x_n) و (y_n) دو دنباله ی کران دار در R باشند آنگاه:

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n &\leq \liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n)\\ &\leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n\\ &\leq \limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n)\\ &\leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n\end{aligned}$$

و اگر دنباله ی (x_n) همگرا باشد داریم:

$$\liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n$$

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n.$$

اثبات . به [۲] رجوع کنید. ■

گزاره ۱۳.۱ . فرض کنید (X, d) و (Y, ρ) دو فضای متریک و تابع f به صورت $f : D \subseteq X \to Y$ باشد، آنگاه f در x_0 پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر دنباله مانند (x_n) در D که به x_0 همگراست داشته باشیم: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

اثبات . به [۲۰] رجوع کنید. ■

تعریف ۱۴.۱ . فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و $A \subseteq X$ باشد، آنگاه:

$$diam(A) = \sup\{d(x,y) : x,y \in A\}$$

گزاره ۱۵.۱ . فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و $E \subseteq X$ کران‌دار باشد و تابع $f : X \to R$ را به صورت $f(x) = d(x,E)$ تعریف کنید، آنگاه تابع f پیوسته یکنواخت و در نتیجه پیوسته است.

اثبات . به [۴] رجوع کنید. ■

تعریف ۱۶.۱ . فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و $f : X \to R \cup \{+\infty\}$. اگر برای هر $\alpha \in R$ مجموعه ی $\{x : f(x) < \alpha\}$ باز باشد، گوییم تابع f نیم پیوسته پایینی است.

تعریف ۱۷.۱ . فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و $f : X \to R \cup \{+\infty\}$. اگر برای هر $\alpha \in R$ مجموعه ی $\{x : f(x) > \alpha\}$ باز باشد، گوییم تابع f نیم پیوسته بالایی است.

گزاره ۱۸.۱ . فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و $f : X \to R \cup \{+\infty\}$. تابع f در $x_\circ \in X$ نیم پیوسته پایینی است اگر و تنها اگر $f(x_\circ) \leq \liminf_{x \to x_\circ} f(x)$.

اثبات . به [۴] رجوع کنید. ■

گزاره ۱۹.۱ . (X,d) را یک فضای متریک در نظر بگیرید. فرض کنید توابع f و g و f_i برای $i \in I$ از X به $R \cup \{+\infty\}$ نیم پیوسته پایینی باشند آنگاه:

۱. $f+g$ نیم پیوسته پایینی است.

۲. اگر $t > \circ$ باشد، آنگاه tf نیم پیوسته پایینی است.

۳. $\inf(f,g)$ نیم پیوسته پایینی است.

۴. اگر (Y,ρ) یک فضای متریک و $A : X \to Y$ یک تابع پیوسته باشد، آنکاه $f \circ A$ نیم پیوسته پایینی است.

۵. $\sup_{i\in I} f_i$ نیم پیوسته پایینی است.

اثبات . به [۴] رجوع کنید. ■

گزاره ۲۰.۱ . فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و $f : X \to R \cup \{+\infty\}$ باشد، آنگاه f در یک نقطه پیوسته است اگر و تنها اگر در آن نقطه، f نیم پیوسته پایینی و نیم پیوسته بالایی باشد.

اثبات . به [۴] رجوع کنید. ■

گزاره ۲۱.۱ . (X,d) را یک فضای متریک در نظر بگیرید. هر تابع نیم پیوسته پایینی از زیر مجموعه ی فشرده $K \subseteq X$ به R، از پایین کران دار است و مینیمم خود را اختیار

می کند.

اثبات . به [۴] رجوع کنید. ■

تعریف ۲۲.۱ . فرض کنید X یک فضای برداری روی R باشد، تابع $f : X \to R$ را محدب گوییم، هرگاه برای $x_1, x_2 \in X$ و $t \in (0, 1)$ داشته باشیم:

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

و f را مقعر گوییم، هرگاه برای $x_1, x_2 \in X$ و $t \in (0, 1)$ داشته باشیم:

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

یعنی f مقعر است، هرگاه $-f$ محدب باشد. و تابع f را آفین[۳] گویند، هرگاه برای $x_1, x_2 \in X$ و $t \in (0, 1)$ داشته باشیم:

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) = tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

یعنی تابعی را که هم محدب و هم مقعر باشد را آفین گویند.

تعریف ۲۳.۱ . فرض کنید X یک فضای برداری روی R باشد تابع $f : X \to R$ را خطی[۴] گوییم، هرگاه برای $x_1, x_2 \in X$ و $r_1, r_2 \in R$ داشته باشیم:

$$f(r_1x_1 + r_2x_2) = r_1f(x_1) + r_2f(x_2).$$

[۳] affine

[۴] linear

تعریف ۲۴.۱ . تابع $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ را یک تابع زیر جمعی گوییم، هرگاه برای هر s و t در $[0,\infty)$ داشته باشیم:

$$f(s+t)\leq f(s)+f(t)$$

گزاره ۲۵.۱ . اگر $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ و $f(0)=0$ و f صعودی و دارای مشتق دوم باشد، بطوریکه برای هر $x\in[0,\infty)$، $f''(x)<0$. آنگاه f یک تابع زیر جمعی است.

اثبات . فرض کنید $x,y\in[0,\infty)$ و $0<x<y$، آنگاه طبق قضیه مقدار میانگین، $c_1\in(0,x)$ و $c_2\in(y,x+y)$ موجود است بطوریکه:

$$\frac{f(x)}{x}=f'(c_1)\qquad,\qquad\frac{f(x+y)-f(y)}{x}=f'(c_2)$$

حال چون $f''<0$، پس f' تابعی نزولی است و با توجه به اینکه $c_1<c_2$، داریم: $f'(c_2)\leq f'(c_1)$ و در نتیجه:

$$\frac{f(x+y)-f(y)}{x}\leq\frac{f(x)}{x}$$

و بنابراین:

$$f(x+y)\leq f(x)+f(y)$$

و اگر x یا y برابر با صفر باشند ، حکم واضح است. ■

قضیه ۲۶.۱ . (آزمون M—وایراشتراس) فضای متریک (X,d) و دنباله ی توابع $f_n:X\to R$ که $n\in N$ را در نظر بگیرید و فرض کنید دنباله ی اعداد حقیقی و غیر

منفی (M_n) موجود باشد بطوریکه برای هر $n \in N$:

$$\sup_{x \in X} | f_n(x) | \leq M_n$$

اگر سری بی پایان $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ در X همگرای یکنواخت است.

اثبات . به [۲] رجوع کنید. ■

گزاره ۲۷.۱ . فضای متریک (X, d)، زیر مجموعه ی ناتهی $F \subseteq X$، نقطه ی $a \in F'$ (F' مجموعه ی نقاط حدی، مجموعه F است)، دنباله توابع $f_n : F \to R$ و تابع $f : F \to R$ مفروض هستند. فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ بطور یکنواخت به f همگرا باشد و به ازای هر $n \in N$ داشته باشیم: $\lim_{x \to a} f_n(x) = A_n$، که در آن $A_n \in R$. در این صورت $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ به عددی مانند A همگراست و $\lim_{x \to a} f(x) = A$.

به عبارت دیگر،

$$\lim_{x \to a} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to a} f_n(x).$$

اثبات . به [۲] رجوع کنید. ■

گزاره ۲۸.۱ . فضای متریک (X, d)، زیر مجموعه ی ناتهی $F \subseteq X$، دنباله تابعی $f_n : F \to R$ و تابع $f : F \to R$ مفروض هستند. فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ بطور یکنواخت به f همگرا باشد. اگر هر f_n در نقطه ی $a \in F$ پیوسته باشد، f نیز در a پیوسته است.

اثبات . به [۲] رجوع کنید. ■

تعریف ۲۹.۱ . دو فضای متریک (X,d) و (Y,ρ) مفروض هستند. تابع $f : X \to Y$ را لیپ شیتز گویند، هرگاه $M > 0$ وجود داشته باشد بطوریکه، برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$\rho(f(x), f(y)) \leq Md(x,y)$$

و اگر $M \in (0,1)$ باشد، آنگاه f را یک تابع انقباضی گویند.

تعریف ۳۰.۱ . فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و $f : X \to X$ یک تابع باشد. نقطه ی $x_0 \in X$ را یک نقطه ی ثابت برای تابع f گویند، هرگاه $f(x_0) = x_0$.

تعریف ۳۱.۱ . فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و $T : X \to N(X)$ یک نگاشت مجموعه مقدار باشد، که $N(X)$ خانواده تمام زیر مجموعه های X است. نگاشت T را یک نگاشت مجموعه مقدار روی X گویند و نقطه ی $x_0 \in X$ را یک نقطه ثابت برای نگاشت T گویند، هرگاه $x_0 \in T(x_0)$.

قضیه ۳۲.۱ . (اصل انقباضی باناخ) فرض کنید (X,d) یک فضای متریک کامل و نگاشت $f : X \to X$ یک نگاشت انقباضی با ثابت k باشد. آنگاه f دارای نقطه