دانشگاه محقق اردبیلی
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی و کاربردها

متریک‌های فینسلری پایا روی خمینه‌های همگن

اساتید راهنما

دکتر داریوش لطیفی

دکتر رضا چاوش خاتمی

توسط

امینه ایری

شهریور ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم

به پاس قلبهای بزرگشان که سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید،

و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند،

این مجموعه را به **پدر و مادر** عزیزم تقدیم می کنم.

تقدیر و تشکر

«حمد و سپاس خدای را که تمام عالم به معرفت او عارف است و به عنایت او واقف.»

خدای را شاکرم که سایه‌ی پدر و مادری مهربان را بر سرم گستراند، بر دستان پرمهرشان بوسه می‌زنم که بی‌تردید هر موفقیتی که در زندگی داشته‌ام، مدیون رنج این دستان خسته و دعای خیر این قلبهای مهربان بوده است.

به درگاه ایزد منان سپاسگزارم به خاطر وجود برادران و خواهری که شبنم صبحگاهی بر زلالی و پاکی قلبهای بی‌ریایشان حسد می‌برند.

در اینجا بر خود لازم می‌دانم که مراتب امتنان و تشکر خود را از همه‌ی عزیزانی که اینجانب را در طی این تحقیق کمک و مساعدت نمودند و یا به‌نحوی مرا مورد لطف و عنایت خویش قرار داده‌اند، اعلام نمایم. از استاد ارجمندم دکتر **داریوش لطیفی** *که در طی تنظیم این پایان نامه مشوق و راهنمای من بودند نهایت قدردانی و تشکر را به‌جای می‌آورم و همچنین از دکتر* **رضا چاوش خاتمی** *استاد راهنمای دوم خود نیز نهایت سپاس را دارم. از داوران این پایان‌نامه جناب آقای دکتر* **اباذری** *و دکتر* **مطلبی** *بخاطر مطالعه و ویرایش این پایان‌نامه جهت هر چه بهتر شدن این کار از ایشان متشکرم.*

جای دارد در اینجا از آنکه الف را به من آموخت و تمامی دبیران و اساتیدم تاکنون، تشکر ویژه‌ای داشته باشم. برای تمام آنها آرزوی موفقیت روزافزون دارم.

امینه ایری

تابستان ۱۳۹۱

نام خانوادگی: ایری نام: امینه

عنوان پایان‌نامه:
متریک‌های فینسلری پایا روی خمینه‌های همگن

استاد راهنما: دکتر داریوش لطیفی و دکتر رضا چاوش خاتمی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی و کاربردها گرایش: هندسه
دانشگاه: محقق اردبیلی دانشکده: علوم ریاضی تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۹۱/۶/۲۱
تعداد صفحه: ۸۷

کلید واژه‌ها :
خمینه‌های همگن، متریک‌های فینسلری همگن، انحنای پرچمی، نرم مینکوفسکی ، تانسور کارتان.

چکیده:

در این پایان‌نامه، به بررسی مقاله دنگ و هوو در زمینه فضاهای فینسلر همگن پرداخته می‌شود. ابتدا نشان داده می‌شود که هر فضای فینسلر همگن را می‌توان به صورت فضای خارج قسمت G/H با ساختار پایا نوشت که G یک گروه لی به همراه جبر لی $Lie\ G = \mathfrak{g}$ و H زیرگروه بسته G با جبر لی $Lie\ H = \mathfrak{h}$ است. در حالتی خاص، متریک‌های فینسلری دو پایا روی خمینه‌های همگن و شرایط لازم و کافی برای آنکه گروه لی متریک فینسلری دو پایا داشته باشد، بررسی می‌شود. در پایان، شرایطی در خمینه‌های همگن برای داشتن متریک‌های فینسلری غیر ریمانی مهیا و برخی مثالهای مرتبط نیز آورده خواهد شد.

فهرست مندرجات

پیش‌گفتار

از نقطه نظر تاریخی، مطالعه متریک فینسلر[۱] ابتدا توسط جی اف بی ریمان[۲] در سال ۱۸۵۴ آغاز گردید ولی از آنجا که او عقیده داشت که مفهوم متریکی که بعدها به نام ریمان معروف شد برای مطالعه ی مفاهیم هندسی و ادامه کارهای گاوس[۳] مناسب تر است به مطالعات خود ادامه نداد. اما نظر باینکه این تابع در تعبیر پدیده های فیزیکی نقش مؤثر داشت بعدها توسط دیگران مورد مطالعه قرار گرفت. از جمله این افراد پائول فینسلر[۴] بود که در سال ۱۹۱۸ با استفاده از نتایج بدست آمده توسط استاد خودش کنستانتین کاراتئودوری[۵] و قضیه اولر توانست تعریف مدونی از این متریک ارائه نماید. او در حقیقت شرایطی برای یک تابع مانند $F(x,y)$ روی کلاف مماس TM ارائه نمود که در عین حالی که از تابع ریمان جامع تر بود خواص اصلی آن را نیز داشت.

امروزه هندسه فینسلری کاربردهای متنوعی در فیزیک نظری پیدا کرده است، گستره‌ی این کاربردها از بخش های کلاسیک فیزیک مانند مکانیک کلاسیک، اپتیک هندسی و نظریه الاستیسیته شروع می‌شود و تا بخشهای مدرنتر آن مانند نسبیت خاص و عام، ذرات بنیادی و ماده چگال امتداد می یابد. در برخی از این کاربردها از دیدگاههای پیشنهاد شده بوسیله کارتان[۶]

[۱] Finsler metric
[۲] Georg Friedrich Bernhard Riemann
[۳] Gauss friedrich carl
[۴] Paul Finsler
[۵] Constantin Caratheodory
[۶] Elie Cartan

و بروالد[۱] و در گروهی دیگر از دیدگاه معرفی شده توسط روند[۲] و دیگران استفاده می‌شود.به هر حال در کل مطالعه فضاهای فینسلری غیر ریمانی و ساخت آنها مگر برای بعضی مثالهای خاص مثل فضاهای مینکوفسکی یا موضعاً مینکوفسکی، بسیار مشکل است. لذا در اینجا حالت خاصی از این فضای فینسلری، خمینه‌های فینسلری همگن، ارائه داده خواهد شد. هدف ما در این پایان نامه بررسی و ساخت فضاهایی است که بتواند متر فینسلر پایا را بپذیرد . این موضوع در دو شاخه حقیقی و مختلط کار شده است.

دنگ[۳] و هوو[۴] در [۸] حالت حقیقی آن را بررسی کرده‌اند که در این پایان‌نامه، این مقاله بررسی می‌شود.

اگر G گروه لی و H زیرگروه بسته G باشد فضای همدسته G/H ساختار هموار (تحلیلی) می گیرد بطوریکه G گروه تبدیلات لی G/H است. G/H یک فضای همگن تحویل‌پذیر[۵] گفته می‌شود اگر زیر فضای $\mathfrak{m}$ از جبر لی $LieG = \mathfrak{g}$ وجود داشته باشد بطوریکه $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ که در آن $Lie\ H = \mathfrak{h}$ و به ازای هر $h \in H$ ، $Ad(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$.

مطالعه‌ی ساختار پایا روی فضاهای همگن تحویل‌پذیر یک مسئله مهم در هندسه است. مطالعات نومیزو[۶] روی ویژگی های متریک‌های ریمانی پایای G/H نتایج بسیار جالب و مهمی را در برداشت. وی التصاق‌های این متریک‌ها را محاسبه کرد و روابطی برای ژئودزیک‌ها و انحناها بدست آورد. بنابراین مطالعه‌ی متریک‌های فینسلری پایا روی خمینه‌های همگن، بخصوص خمینه‌های همگن تحویل‌پذیر، دارای اهمیت است.

این پایان نامه شامل سه فصل است که در فصل اول قضایا و مطالب مورد نیاز آورده شده

[۱] Berwald
[۲] Rund
[۳] S. Deng
[۴] Z. Hou
[۵] reductive
[۶] Numizo

است، در فصل دوم تحت عنوان توصیف جبری، به بیان جبری ساختار همگن و شرایط لازم و کافی برای وجود متر پایا روی این فضای خارج قسمتی همگن، پرداخته می‌شود. در فصل سوم حالت خاصی از گروه لی همگن بررسی می‌شود که دوپایاست و جبر لی مینکوفسکی معرفی می‌شود و روابطی برای ژئودزیک‌ها و التصاق‌ها و انحناهای پرچمی در برخی حالات خاص داده می‌شود. و در نهایت شرایطی را برای آنکه خمینه همگن، متریک فینسلری غیرریمانی داشته باشد، بدست آورده می‌شود و برخی مثالهای صریح نیز بیان خواهد شد. در بخش آخر به یک جمع‌بندی کلی و نتیجه‌گیری، پرداخته می‌شود.

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

در این فصل قضایا و تعاریف اساسی مورد استفاده در فصل‌های آتی بیان می‌شود. بویژه مباحثی در خصوص گروه‌های لی و جبر لی آنها بیان می‌شود.

۱.۱ خمینه

یک خمینه[۱]، کلیتی از منحنی ها و سطوح به ابعاد بالاتر است. موضعاً اقلیدسی است و در هر نقطه دارای یک همسایگی، بنام کارت، است که همیومورف با زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ است. مختصات کارت به انجام محاسبات خمینه به عنوان فضای اقلیدسی اجازه می‌دهد، بطوریکه بسیاری از مفاهیم واقعی را از جمله دیفرانسیل پذیری، مشتقات نقطه‌ای، فضاهای مماس و فرم‌های دیفرانسیلی را به خمینه انتقال دهد.

همانند اساسی ترین مفاهیم ریاضی این نظریه از خمینه توسط یک نفر صورت نگرفته است، بلکه حاصل سالها فعالیتهای جمعی است.کارل فردریش گاوس[۲] در شاهکارِ « مطالعات عمومی

[۱] Manifold
[۲] Carl Friedrich Gauss

روی سطوح منحنی » [۱] که در سال ۱۸۲۷ منتشر شد، آزادانه از مختصات موضعی روی سطوح (رویه ها) استفاده کرد. به علاوه، وی برای اولین بار سطح را به عنوان یک فضای مجرد، مستقل از فضای اقلیدسی موجود در آن، در نظر گرفت. در مراسم تحلیف برنهارد ریمان در سخنرانی گوتینگن [۲] « فرضیه ای تحت هندسه لی » [۳] در سال ۱۸۵۴ بنیان هندسه دیفرانسیل ابعاد بالاتر را گذاشت. در واقع واژه "Manifold" ترجمه مستقیم کلمه آلمانی "Mannigfaltikiet" است که ریمان برای توصیف اشیایش استفاده کرد. این کار توسط هنری پوانکاره [۴] در اواخر قرن نوزدهم در همولوژی دنبال شد که در آن فضای اقلیدسی موضعی به طور برجسته‌ای، نشان داده شد. اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم دوره توسعه در توپولوژی نقطه—مجموعه‌ای بود. در این قسمت تعاریف پایه‌ای و خصوصیات خمینه‌های هموار و نگاشت بین خمینه‌های هموار نشان داده می‌شود.

از آنجایی که تعداد زیادی خمینه وجود دارد (برای مثال خمینه‌های توپولوژیکی، C^k—خمینه‌ها، خمینه‌های تحلیلی و خمینه‌های مختلط) در این پایان نامه مفاهیم مرتبط با خمینه‌های هموار مورد بررسی قرار می‌گیرد.

تعریف ۱.۱.۱ خمینه هموار M با بعد n یک فضای توپولوژیک هاسدورف M با زوج گردایه‌های (U_α, Φ_α) است که U_α (کارت[۵]) زیرمجموعه‌ی بازِ M و $\Phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ است. بطوریکه

الف) هر Φ_α یک همیومورفیسم از U_α به روی یک زیرمجموعه‌ی بازی از $\mathbb{R}^n$، V_α، است.

ب) $\cup_\alpha U_\alpha = M$.

ج) به ازای هر α و β، نگاشت انتقال (نگاشت تغییر مختصات) زیر هموار باشد.

$$\Phi_{\alpha\beta} = \Phi_\beta o \Phi_\alpha^{-1} : \Phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \Phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

[۱] Disquisitiones generales circa superficies curvas

[۲] Göttingen

[۳] Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen

[۴] Henri Poincaré

[۵] Chart

د) خانواده $\{(U_\alpha, \Phi)\}$ که در رابطه (ب) و (ج) صدق می‌کند ماکسیمال است.

این خانواده‌ی مجموعه‌ها و نگاشت‌ها که رابطه‌های (ب) و (ج) و (د) برقرار باشند یک ساختار هموار روی M می‌سازد.

مثال ۲.۱.۱

۱. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ یک خمینه n—بعدی است که با یک کارت $U = \mathbb{R}^n$ پوشانده می‌شود که همیومورفیسم $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ همان نگاشت همانی است.

۲. کره $S^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n \in \ \mathbb{R}^{n+1} \ | \ \ x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1 \ \}$ در $\mathbb{R}^{n+1}$ یک خمینه n—بعدی است.

زیرا می تواند توسط دو کارت $U_+ = \{x \in S^n \ | \ \ x_{n+1} > -1\}$ با $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ توسط ضابطه $\varphi_+(x) = (\frac{x_1}{1+x_{n+1}}, ..., \frac{x_n}{1+x_{n+1}})$ و $U_- = \{x \in S^n \ | \ x_{n+1} < 1\}$ توسط ضابطه $\varphi_-(x) = (\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, ..., \frac{x_n}{1+x_{n-1}})$ پوشانده شود. نگاشت $\varphi+$ و $\varphi-$ تصویر استریوگرافیک (گنج نگاری) نامیده می‌شود.

۳. اگر N و M دو خمینه هموار باشند، آنگاه ضرب دکارتی $M \times N$ نیز خمینه هموار با بعدی برابر مجموع بعدهای N و M است.

۲.۱ گروه و جبرلی

یک گروه لی[۱]، خمینه‌ای است که در مفهوم جبری یک گروه می‌باشد بطوریکه عمل‌های گروه هموار هستند. گروه‌های کلاسیک مانند گروه‌های خاص خطی عمومی روی $\mathbb{R}$، گروه‌های متعامد، گروه‌های واحد و گروه‌های سیمپلکتیک، گروه لی هستند. یک گروه یک فضای همگن است در حالتی که انتقال چپ توسط عضو گروه g یک دیفیومورفیسم گروه روی خودش است که

[۱] Lie group

عضو همانی را به g تصویر می‌کند. بنابراین، بطور موضعی به نظر می‌رسد که گروه در پیرامون هر نقطه یکسان است. برای مطالعه ساختاری موضعی یک گروه، کافی است یک همسایگی از عضو معینی آزمایش شود. تعجب آور نیست که فضای مماس در عضو همانی گروه باید نقش کلیدی را داشته باشد. فضای مماس در عضو همانی گروه لی G باعث داشتن عملگر کانونی براکت[۱] $[\ ,\ ]$ می‌شود که عملگر، به روی خودش جبر لی می سازد. فضای مماس T_eG به همرا براکت، جبر لی گروه لی G نامیده می‌شود.

سوفوس لی [۲] در سال ۱۸۴۲ در یکی از شهرهای نروژ بدنیا آمد. در سال ۱۸۶۳ تحت تاثیر سخنرانی سیلو درباره نظریه گالوا قرار گرفت و با توجه به همکاریهایی که با کلاین[۳] داشت. بفکر بدست آوردن گروه مناسبی مشابه گروه گالوا برای حل معادلات دیفرانسیل افتاد. در ابتدا چون اکثر کارهایش را به زبان نروژی می‌نوشت، توجه کمتری را جلب کرد. در سال ۱۸۸۶ لی در لیپزیگ[۴] آلمان به درجه پروفسوری رسید و نظریه‌هایش مرکز کانون توجه شد مخصوصاً بعد از انتشار چاپ سوم مقاله « نظریه گروه انتقال »[5] که او به همراه همکاری دستیارش فردریک اِنگل[۶] نوشت.

۱.۲.۱ گروه لی

در این بخش، ابتدا مختصر تعریفی از گروه لی و چند مثال از آن بیان می‌شود.

تعریف ۱.۲.۱ یک خمینه هموار G یک گروه لی است اگر

۱) G گروه باشد؛

[۱] bracket
[۲] Sophus Lie
[۳] Felis Klein
[۴] Leipzing
[5] Theorie der Transformationsgruppen
[۶] Friedrich Engel

۲) دو عمل ضرب و وارون گروه هموار باشند، یعنی

$$\mu : G \times G \to G \quad , \quad \mu(a,b) = ab$$

و عمل وارون

$$\iota : G \to G \quad , \quad \iota(a) = a^{-۱}$$

به ازای هر $a, b \in G$ دو نگاشت مذکور هموار باشند.

مثال ۲.۲.۱

۱. مجموعه های $\mathbb{R}^n, \ \mathbb{C}^n, \ \mathbb{H}^n$ تحت عمل جمع برداری گروه لی هستند. در اینجا $\mathbb{H}$ مجموعه کواترنیون هایی است که شامل اعداد $q = t+ix+jy+kz \ (t,x,y,z \in \mathbb{R})$ در $\mathbb{R}^۴$ با پایه $۱, i, j, k$ و رابطه $i^۲ = j^۲ = k^۲ = -۱, \ ij = k, ji = -kik = -j, ki = j, \ , kj = -i, jk = i$ تعویض پذیر است.

۲. مجموعه های $\mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*, \mathbb{H}^*$ تحت عمل ضرب گروه لی هستند. $(\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{۰\}, ..)$

۳. کره واحد $S^۱$ یک گروه لی است.

۴. $G \times H$ ضرب دو گروه لی خود به همراه ساختار ضرب خمینه و ضرب $(g_۱, h_۱)(g_۲, h_۲) = (g_۱h_۱, g_۲h_۲)$ یک ٦گروه لی است.

۵. n—چنبره (تیوب) $T^n = S^۱ \times S^۱ \times ... \times S^۱$ (n بار) گروه لی با بعد n است.

٦. گروه خطی عمومی $GL(n, \mathbb{R})$، مجموعه تمام ماتریسهایی است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} | \ detA \neq ۰\}$$

که با ضرب ماتریسی، یک گروه لی با بعد $n^۲$ است.

در اینجا قضیه‌ای بیان می‌شود که زیرگروه‌لی یک گروه لی توصیف می‌شود و بطور کل در این پایان‌نامه از آن استفاده خواهد شد.

قضیه ۳.۲.۱ اگر G یک گروه لی و H زیرگروه دلخواهی از آن باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند.

۱) H در G بسته است.

۲) H در G یک زیرخمینه نشانده‌شده[1] است.

۳) H یک زیرگروه لی نشانده‌شده در G است.

اثبات. به مرجع [۱۴]، گزاره ۳۰.۸ و قضیه ۱۰.۲۰ مراجعه شود. ■

۲.۲.۱ فضای مماس گروه لی، جبر لی

یکی از ساده ترین اشیا جبری فضای برداری حقیقی است. در این بخش می‌بینید که می‌توان برای هر نقطه‌ی گروه لی G یک فضای برداری نظیر کرد و فضای مماس گروه لی G در آن نقطه است. با توجه به دیفیومورفیسمهای روی گروه لی (انتقال راست یا چپ) مطالعه فضای مماس گروه لی در عضو همانی گروه کافی است. فضای مماس در این نقطه نه تنها یک فضای برداری است بلکه با تعاریفی که در ادامه می‌آید با جبر لی میدان‌های برداری پایای چپ بر گروه لی یکریخت است.

تعریف ۴.۲.۱ یک جبر لی[2] روی میدان $F = \mathbb{R}$ عبارتست از یک فضای برداری حقیقی $\mathfrak{a}$ به انضمام یک نگاشت دو خطی

$$[\ ,\ ] : \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$$

به نام کروشه لی بطوریکه به ازای هر $X, Y, Z \in \mathfrak{a}$ داشته باشید

۱) $[X,Y] = -[Y,X]$ (ناجابجایی)

۲) $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ (اتحاد ژاکوبی)

---

[1] Imbedding submanifold

[2] Lie Algebra

مثال ۵.۲.۱

۱) هر فضای برداری V با کروشه $[\ ,\ ]$ که به ازای هر بردار دلخواه X,Y، $[X,Y]=0$. یک جبر لی است که آن را جبر لی **آبلی**[۱] گویند.

۲) $\mathbb{R}^3$ با کروشه

$$[X,Y]=X\times Y \qquad X,Y\in\mathbb{R}^3$$

که در آن $X\times Y$ حاصلضرب خارجی X و Y است، یک جبر لی است.

تعریف ۶.۲.۱ اگر a عضوی از گروه لی G باشد. نگاشت L_a و R_a که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$L_a : G\to G\ ,\quad L_a(g)=ag \quad \text{(انتقال چپ)}$$

$$R_a : G\to G\ ,\quad R_a(g)=ga \quad \text{(انتقال راست)}$$

هموارند و در واقع دیفیومورفیسم هستند.

تعریف ۷.۲.۱ فرض کنید G یک گروه لی باشد. میدان برداری X روی G را **چپ پایا**[۲] گویند هرگاه تحت انتقالهای چپ G، پایا بماند. یعنی، به ازای هر $a\in G$ داشته باشید:

$$L_a(X)=X$$

به‌عبارت دیگر به ازای هر $a,b\in G$ داشته باشید

$$L_a(X_b)=X_{ab}$$

---

[۱] Abelian
[۲] left invariant

قضیه ۸.۲.۱ فرض کنید G یک گروه لی و $\mathfrak{g}$ مجموعه میدانهای برداری چپ پایا روی آن باشد، در این‌صورت

۱) $\mathfrak{g}$ یک فضای برداری است و نگاشت

$$E : \mathfrak{g} \to T_eG$$

$$X \to X_e$$

یک یکریختی خطی می‌باشد و لذا $\dim \mathfrak{g} = \dim T_eG = \dim G$.

۲) میدانهای برداری چپ پایا الزاماً مشتق پذیرند.

۳) $\mathfrak{g}$ تشکیل یک جبر لی، نسبت به کروشه دو میدان برداری، می‌دهد.

اثبات. به مرجع [۲]، قضیه ۴.۳ مراجعه شود. ■

حال با توجه به قضیه‌ی فوق، تعریف زیر بدست می‌آید.

تعریف ۹.۲.۱ جبر لی میدانهای برداری چپ پایا روی یک گروه لی G را **جبر لی** گروه لی G می نامند و با $\mathfrak{g}$ نمایش می‌دهند. این جبر لی با T_eG یکریخت است که در آن کروشه $X_e, Y_e \in T_eG$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$[X_e, Y_e] = [X, Y]_e$$

که در آن Y, X میدانهای برداری چپ پایای یکتایی هستند که در e دارای مقادیر X_e و Y_e هستند.

مثال ۱۰.۲.۱

۱) $\mathbb{R}$ با عمل جمع، یک گروه لی است و جبرلی آن از میدان‌های برداری به‌صورت $X = a\dfrac{d}{dt}$ تشکیل شده که در آن $a \in \mathbb{R}$ ثابت است و بنابراین جبرلی آن همان $\mathfrak{r} = \mathbb{R}$ است.

۲) جبر لی $GL(n, \mathbb{R})$، مجموعه ماتریسهای حقیقی $n \times n$ است، با کروشه

$$[A, B] = AB - BA$$

و آن را با $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ نمایش می دهند.

به مرجع [۲]، امثله ۷.۳ مراجعه کنید.

۳.۲.۱ زیرگروه‌های یک پارامتری

در این بخش دومین مشخصه برای توصیف فضای مماس گروه لی با عنوان مجموعه **زیرگروه‌های یک پارامتری**[۱]، بررسی می‌شود. این مشخصه، توصیف بینهایت کوچک گروه لی نامیده می‌شود که در واقع گروه بینهایت کوچک نامیده می‌شود.

تعریف ۱۱.۲.۱ زیرگروه یک پارامتری گروه لی G، هomomorfism هموار φ است که به صورت $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to G$ می‌باشد. لذا $\varphi : \mathbb{R} \to G$ خمی است که

۱) $\varphi(s+t) = \varphi(s) + \varphi(t)$

۲) $\varphi(0) = e$

۳) $\varphi(-t) = \varphi(t)^{-1}$

مثال ۱۲.۲.۱

۱) نگاشت $\varphi(t) = e^t$ زیرگروه یک پارامتری گروه لی **جمعی** $\mathbb{R}$ است.

۲) نگاشت φ ذکر شده در زیر، زیرگروه یک پارامتری $GL_3\mathbb{R}$ است.

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

قضیه ۱۳.۲.۱ نگاشت $\varphi \mapsto d\varphi_0(1)$ یک تناظر یک به یک بین زیرگروه‌های یک پارامتری G و T_eG تعریف می کند.

[۱] one parameter subgroups

اثبات. به مرجع [۴]، قضیه ۷.۱ مراجعه شود. ■

با استفاده از معرفی فضای مماس T_eG با $\mathfrak{g}$، مجموعه تمام میدان های برداری چپ پایا در G، نتیجه زیر بدست می آید.

نتیجه ۱۴.۲.۱ برای هر بردار $X \in \mathfrak{g}$ یک زیرگروه یک پارامتری یکتای X وجود دارد بطوریکه $\varphi'(\circ)_{(X)} = X$.

اثبات. به مرجع [۲]، لم ۱.۵ مراجعه شود. ■

در نتیجه می‌توان تعریف زیر را داشت.

تعریف ۱۵.۲.۱ نگاشت نمایی $\exp : \mathfrak{g} \to G$ توسط ضابطه $\exp(X) = \varphi_X(۱)$ تعریف می‌شود که در آن φ_X زیرگروه یک پارامتری یکتای X است.

نتیجه ۱۶.۲.۱ خم $(X \in \mathfrak{g}) \quad \varphi(t) = \exp(tX)$ هومورفیسم یکتایی در G با $\varphi'(t) = X$ است.
همچنین از آنجایی که φ_X یک هومورفیسم است نتیجه می‌شود که

$$\exp(s+t) = \exp sX . \exp tX \quad \text{و} \quad (\exp tX)^{-۱} = \exp -tX$$

اثبات. به مرجع [۲]، قضیه ۴.۵ مراجعه شود. ■

حال مشتق نگاشت نمایی $d(\exp)_\circ : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ در نقطه $\circ \in \mathfrak{g}$ به صورت زیر حساب می‌شود.

خم $\alpha(t) = tX$ در $\mathfrak{g}$ با $\alpha(\circ) = \circ$ و $\alpha'(\circ) = X \in \mathfrak{g}$ را فرض بگیرید. سپس

$$(d\exp)_\circ(X) = \frac{d}{dt}(\exp \circ \alpha)|_{t=\circ} = \frac{d}{dt}(\exp(tX))|_{\ t=\circ} = X\ .$$

لذا $(d\exp)_\circ$ یک نگاشت همانی است. طبق قضیه تابع معکوس گزاره زیر را دارید.

گزاره ۱۷.۲.۱ یک همسایگی V حول نقطه‌ی $\circ$ وجود دارد بطوریکه توسط نگاشت $\exp$ با یک همسایگی در G حول e دیفیومورف می‌شود.