بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه زنجان

مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران
[illegible]

دانشکده علوم،گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

۱۳۸۲ /۷/ ۲۰

# جواب های مثبت و یکنوای مسائل مقدار مرزیm- نقطه ای

ارشد بیانی

استاد راهنما:

دکتر جعفر ملکی زنجانی

۴۸۶۰۵

استاد مشاور:

پروفسور بهمن مهری

تیرماه ۱۳۸۲

بسمه تعالی

شماره: ۱/۲۴۱/۲ ت ر

تاریخ: ۸۲/۴/۱۵

پیوست: ----

# صورتجلسه دفاع پایان نامه تحصیلی دورهٔ کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) جلسهٔ دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

آقای ارشد بیانی انگوت رشته: ریاضی محض گرایش: معادلات دیفرانسیل

تحت عنوان: **جوابهای یکنوا و مثبت از یک مسئله مقدار مرزی m– نقطه ای**

با حضور اعضای هیأت داوران در محل دانشکده علوم دانشگاه زنجان در تاریخ ۸۲/۴/۱۵ برگزار شد.

به موجب آئین نامه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد ارزشیابی به شرح زیر است:

☑ قبول ( با درجه: عالی امتیاز: ۱۸) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود

هیجده

۱- عالی(۲۰-۱۸)

۲- بسیار خوب(۱۷/۹۹-۱۶)

۳- خوب(۱۵/۹۹-۱۴)

۴- قابل قبول(۱۳/۹۹-۱۲)

| عضو هیأت داوران | نام ونام خانوادگی | رتبه علمی | امضاء |
|---|---|---|---|
| ۱- استاد راهنما : | آقای دکتر جعفر ملکی زنجانی | استادیار | |
| ۲- استاد مشاور: | آقای دکتر بهمن مهری | استاد | |
| ۳- نماینده تحصیلات تکمیلی: | آقای دکتر مسعود آرین نژاد | استادیار | |
| ۴- استاد ممتحن: | آقای دکتر جمال روئین | استادیار | جمال روئین |
| ۵- استاد ممتحن: | آقای دکتر فرض اله میرزاپور | استادیار | |

مدیر تحصیلات تکمیلی دانشگاه

دکتر احمد گلچین

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم،

برادران و خواهران عزیزم و

آنانیکه همواره مشوقم بودند

# تقدیر و تشکر:

اینک که به حول و قوه خداوند متعال موفق شدم پایان نامه خود را تهیه و تنظیم کنم، بر خود لازم می دانم تا از زحمات جناب آقای دکتر ملکی که در تدوین این پایان نامه، مرا راهنمایی نمودند، کمال تشکر و امتنان را داشته باشم.

از استاد مشاورم جناب آقای پروفسور مهری که قبول زحمت نمودند و راهنمای بنده بودند، کمال تشکر را دارم و امیدوارم در پناه خداوند متعال، پیروز و سرفراز باشند.

از جناب آقای دکتر آرین نژاد، مدیر دلسوز گروه ریاضی کمال تشکر را دارم.

از اساتید ارجمند، جناب آقای دکتر رویئن و جناب آقای دکتر میرزاپور، که به عنوان اساتید ممتحن، قبول زحمت فرمودند، سپاسگزارم.

در پایان از همه دوستان عزیزم، بخصوص از آقایان محمد فرجی(۷۹)- مهدی فرهودی(۸۰)- مجید کریمی(۸۰)- مرتضی ندرلو(۸۰)- فرزاد عابدینی (۸۰)- علی عطازاده (۷۹) و از دانشجویان کارشناسی ارشد ریاضی ورودی ۸۱ که به نحوی در تهیه و تنظیم این پایان نامه یار و یاور من بودند، کمال تشکر را دارم.

# پیشگفتار

مسائل مقدار مرزی در علوم و فن‌آوری جایگاه والایی در گذشته و حال، داشته و دارد. این مسائل در دهه‌های اخیر توجه زیادی را به خود جلب کرده است. از سال ۱۹٦۴ استفاده از قضیه کراسنوسلسکی[۱] [۱۹] و قضیه معروف نسر[۲] [۲] در تعیین وجود و عدم جوابهای مسائل مقدار مرزی چند نقطه‌ای پیشرفت زیادی حاصل شده است. در دو دهه گذشته ریاضیدانان از این قضایا استفاده نموده و به بررسی وجود و عدم جوابهای مثبت در مسئله‌های مقدار مرزی $m$ ـنقطه‌ای پرداخته‌اند. از آن جمله الین[۳] و موسیو[۴] [۱٦, ۱۷] در سال ۱۹۸۷ به بررسی و اثبات وجود جواب مسئله مقدار مرزی چند نقطه‌ای در معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوّم پرداخته‌اند.

در این پایان‌نامه با توجه به این که اغلب از فضاهای اندازه‌پذیر، هیلبرت، باناخ و توابع محدب استفاده می‌کنیم. ابتدا در فصل اوّل "پیش نیازها" خلاصه‌ای از بحث فضاهای اندازه‌پذیر، هیلبرت و باناخ را مطرح می‌کنیم که در بردارندهٔ تعاریف اساسی و یادآوری قضایایی است که در متن پایان‌نامه مورداستفاده قرار می‌گیرند.

در فصل دوّم، ابتدا موضوع مقاله‌ای از ارب[۵] و ونگ[٦][۳] که با استفاده از قضیه کراسنوسلسکی به اثبات قضیه زیر می‌پردازد، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$(A1)$: $f \in C([0,1] \times [0,\infty);[0,\infty))$

$(A2)$: $a : [0,\infty) \to [0,\infty)$ پیوسته و روی هیچ زیر بازه مساوی صفر نباشد

فرض کنیم $(A1)-(A2)$ برقرار باشند. آنگاه مسئله مقدار مرزی

$$y'' + a(t)f(y) = 0, \qquad 0 < t < 1 \tag{1}$$

$$\begin{cases} \alpha y(0) - \beta y'(0) = 0 \\ \gamma y(1) + \delta y'(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

لااقل دارای یک جواب مثبت در حالت زیر می‌باشد.

---

[۱] Krasnoselskii

[۲] Well - known Kneser's theorem

[۳] Il'in

[۴] Moiseev

[۵] Erbe

[٦] Wang

$(i):\ f_0 = 0, f_\infty = \infty$ (زیر خطی)یا

$(ii):\ f_0 = \infty, f_\infty = 0$ (زیر خطی )

سپس موضوع مقاله دیگری از لیان[7] [۲۰] با عنوان " وجود جواب‌های مثبت معادله دیفرانسیل مرتبه دوّم غیر خطی " را مورد مطالعه قرار می‌دهیم که این مقاله را لیان در سال ۱۹۹۶ داده و قضیه زیر را در آن ثابت نموده است.

فرض کنیم دو ثابت مثبت مجزا $\eta, \lambda$ به طوری که

$$f(t,y) \leq \lambda\Big(\int_0^1 k(s,s)ds\Big)^{-1}, \quad [0,1]\times[0,\lambda]$$
$$f(t,y) \geq \eta\Big(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} k(s,s)ds\Big)^{-1}, \quad [\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4}]\times[M\eta,\eta]$$

وجود داشته باشند. آنگاه مسئله مقدار مرزی (۱) و (۲) با فرض $f(t,y)=a(t)f(y)$، دست کم دارای یک جواب مثبت چون $y$ است به طوری که $\| y \|$ ما بین $\lambda$ و $\eta$ بوده و در آن $\| y \| = \sup_{t\in[0,1]} | y |$ می‌باشد.

در فصل سوّم این پایان‌نامه جواب مثبت مسئله مقدار مرزی مرتبه دوّم سه‌نقطه‌ای مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

در این فصل ابتدا مقاله‌ای از ما[8] [۲۱] با عنوان " جواب‌های مثبت مسئله مقدار مرزی سه نقطه‌ای " بررسی و در آن به اثبات قضیه زیر می‌پردازد.

فرض کنیم $(A1)$ و $(A2)$ برقرار باشند آنگاه معادله دیفرانسیل (۱) با شرایط مرزی $y(0)=0,\ y(1)=\alpha y(\eta)$ لااقل دارای یک جواب مثبت در حالات زیر می باشد.

$(i):\ f_0 = 0$ و $f_\infty = \infty$ (زیر خطی) یا

$(ii):\ f_0 = \infty$ و $f_\infty = 0$ (زیر خطی)

سپس موضوع مقاله‌ای از کوپتا[9]، نتویاس[10] و تسامیتوس[11] [۱۴] را که به بررسی وجود جواب مثبت معادله $y'' = f(t, y(t), y'(t))$، $(t \in (0,1))$ پرداخته، مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

در پایان موضوع مقاله دیگری از کوپتا با عنوان " شرایط خاص برای حل پذیری مطالعه دیفرانسیل مرتبه دوّم سه نقطه‌ای " [۸] که در سال ۱۹۹۷ مطرح نموده و به اثبات قضیه زیر پرداخته است مورد بررسی و مطالعه قرار می‌گیرد.

---

[7] Lian

[8] Ma

[9] Gupta

[10] Ntouyas

[11] Tsamatos

فرض کنید $f:[0,1]\times R^2\to R$ تابعی باشد که در شرایط کاراتئدوری صدق کند و همچنین توابع $p(t),q(t)$ در $L^\infty(0,1)$ و $r(t)$ در $L^2(0,1)$ باشند به طوری که تقریباً به ازای هر $t\in(0,1)$ و به ازای تمام $(y_1,y_2)\in R^2$ رابطه $|f(t,y_1,y_2)|\leq p(t)|y_1|+q(t)|y_2|+r(t)$ برقرار باشد همچنین فرض کنید $\eta\in(0,1), \alpha>1$ با شرط $\alpha<\frac{1}{\eta}$ داده شده باشند. آنگاه برای هر $e(t)$ داده شده در $L^2(0,1)$، معادله دیفرانسیل $y''=f(t,y(t),y'(t))$ با شرایط مرزی $y(0)=0,\ y(1)=\alpha y(\eta)$ حداقل دارای یک جواب در $C^1[0,1]$ بوده مشروط بر این که

$$\frac{2}{\pi}\parallel p\parallel_\infty+\parallel q\parallel_\infty<\frac{\sqrt{2}(1-\alpha\eta)}{\alpha(1-\eta)}$$

در فصل چهارم این پایان‌نامه جواب مثبت مسئله مقدار مرزی مرتبه دوّم $m$ـنقطه‌ای مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

در این فصل موضوع مقاله‌ای از کوپتا با عنوان " جواب‌های مثبت مسئله مقدار مرزی $m$ـنقطه‌ای " بررسی و در آن به اثبات قضیه زیر می‌پردازد.

فرض کنید $f:[0,1]\times R^2\to R$ تابعی باشد که در شرایط کاراتئدوری صدق کند و همچنین ثابتهای چون $c,d$ وجود داشته باشند به طوری که تقریباً به ازای هر $t\in[0,1]$ و به ازای هر $(x_i,y_i)\in R^2\quad (i=1,2)$

$$|f(t,x_1,x_2')-f(t,y_1,y_2)|\leq c|x_1-x_2|+d|y_1-y_2| \tag{2.7}$$

برقرار باشد. همچنین فرض کنید $\alpha\leq 1$ و $\eta\in(0,1)$ داده شده باشند. آنگاه به ازای هر $e(t)$ داده شده در $L^2(0,1)$، معادله دیفرانسیل $y''+f(t,y(t),y'(t))+e(t)=0$، با شرایط مرزی $y(0)=0$ و $y(1)=\sum_{i=1}^{m-2}a_iy(\xi_i)$ دقیقاً دارای یک جواب در $C^1[0,1]$ دارد مشروط بر اینکه

$$\frac{2}{\pi}(\frac{2}{\pi}c+d)<1 \tag{2.8}$$

در فصل پنجم موضوع اصلی پایان‌نامه مقاله‌ای با عنوان " جواب‌های مثبت و یکنوای مسئله مقدار مرزی $m$ـنقطه‌ای " مورد بررسی و مطالعه قرار داده می‌شود.

# فهرست مندرجات

# فصل ۱

# پیشنیاز

در این فصل تعاریفی از آنالیز حقیقی و توپولوژی عمومی جهت یادآوری آورده و همچنین تعاریف و قضایای چندی از معادلات دیفرانسیل که کاربرد زیادی در اثبات قضایای وجودی، خواهند داشت می‌آوریم.

## ۱.۱ فضای متری

**تعریف(۱.۱.۱):** فرض کنیم مجموعه $X \neq \emptyset$ و تابع $d : X \times X \to R$ داده شده باشد. اگر

۱) $d(x,y) \geq 0$ و $d(x,y) = 0 \iff x = y$ $\qquad \forall x, y \in X,$

۲) $d(x,y) = d(y,x)$ $\qquad \forall x, y \in X,$

۳) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ $\qquad \forall x, y, z \in X,$

آنگاه $(X,d)$ را یک فضای متریک می‌نامند که در آن $d$ یک تابع متر یا فاصله و هر عضو $X$ را یک نقطه گویند.

**تعریف(۲.۱.۱):** فرض کنیم $A \subset R^n$، مجموعه $A$ را یک مجموعه محدب گویند اگر

$$\forall x, y \in A, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \qquad \lambda x + (1 - \lambda) y \in A$$

باشد. به عبارت دیگر یک مجموعه را محدب گویند هر گاه هر دو نقطه از آن مجموعه را در نظر بگیریم، پاره‌خط راستی که آن دو نقطه را به هم وصل می‌کند مجموعه نقاطش در آن مجموعه باشد.

**تعریف(۳.۱.۱):** اگر $a$ عضو دلخواهی از فضای $X$ باشد، $N(a,\epsilon) = N_\epsilon(a) = \{x \in X \mid d(x,a) < \epsilon\}$ را یک

همسایگی به مرکز $a$ و به شعاع $\epsilon$ گویند.

تعریف(۴.۱.۱): فرض کنیم $X$ یک فضا و $A \subset X$ و $b \in X$ نقطه $b$ را یک نقطه حدی، تجمع یا انباشتگی $A$ نامند اگر هر همسایگی محذوف $b$، شامل عضوی از $A$ باشد، یعنی $(N(b,\epsilon) - \{b\}) \cap A \neq \emptyset$ و مجموعه نقاط حدی $A$ را با $A'$ نمایش می‌دهند.

تعریف(۵.۱.۱): مجموعه $A$ را در فضای متری $X$، مجموعه باز گویند اگر جمیع اعضاء این مجموعه نقطهٔ داخلی آن باشد.

تعریف(۶.۱.۱): یک مجموعه $A$ را در یک فضای متری کامل گویند اگر $A$ مجموعه بسته بوده و هر نقطه‌اش نطقه حدّی باشد.

تعریف(۷.۱.۱): فرض کنیم $A \subset X$، $A$ را در $X$ چگال گویند هر گاه هر نقطه از $X$ یک نقطه حدی یا یک نقطه از $A$(یا هر دوی آنها) باشد.

تعریف(۸.۱.۱): فرض کنیم $A \subset X$، گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های باز $X$ مانند $\{V_\alpha\}$ را که $A \subset \bigcup_\alpha V_\alpha$ است یک پوشش باز $A$ در فضای متری $X$ می‌نامند.

تعریف(۹.۱.۱): اگر مجموعه $A$، زیر مجموعه‌ای از فضای متری $X$ باشد به طوری که به ازای هر پوشش باز آن بتوان یک زیر گردایه‌ای متناهی چنان پیدا کرد که این تعداد متناهی عضو نیز، بتواند $A$ را بپوشاند آنگاه مجموعه $A$ را یک مجموعه فشرده گویند.

قضیه(۱.۱.۱): هر مجموعه فشرده در هر فضای متری، مجموعه بسته است[۲۷].

قضیه(۲.۱.۱): هر مجموعه با تعداد متناهی عضو، یک مجموعه فشرده است[۲۷].

قضیه(۳.۱.۱): زیر مجموعه‌های بسته از یک مجموعه فشرده، فشرده هستند[۲۷].

قضیه(۴.۱.۱): هر زیر مجموعه نامتناهی از یک مجموعه فشرده مانند $K$ لااقل یک نقطه حدی در $K$ دارد[۲۷].

تعریف(۱۰.۱.۱): زیر مجموعه $M$ از $X$ را فشرده نسبی گویند هر گاه $\overline{M}$ فشرده باشد.

تعریف(۱۱.۱.۱): فرض کنیم $(X,d)$ یک فضای متری دلخواه و $A$ و $B$ زیر فضاهای $X$ باشند، آنگاه $A$ و $B$ را از هم جدا شده گویند اگر و فقط اگر

$$\overline{A} \cap B = \emptyset, \quad \overline{B} \cap A = \emptyset$$

تعریف(۱۲.۱.۱): هر گاه $A \subset X$ باشد مجموعه $A$ را همبند(مرتبط) گویند اگر و فقط اگر $A$ را نتوان به صورت اجتماع دو مجموعه غیر خالی از هم جدا شده نوشت.

تعریف(۱۳.۱.۱): یک مجموعه همبند و فشرده را در فضای متری پیوستار[۱] می‌نامند.

تعریف(۱۴.۱.۱): در فضای $(M,d)$ زیر مجموعه $E \subset M$ را کلاً کراندار(پیش فشرده) می‌نامیم هر گاه به ازای هر $\epsilon > 0$، تعداد متناهی گوی بازی مانند $S(a_1,\epsilon),\ldots,S(a_n,\epsilon)$ ( در آن $a_i \in E$ ) موجود باشند به طوری که $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} S(a_i,\epsilon)$.

تعریف(۱۵.۱.۱): عضو $x$ از فضای $X$ را یک نقطهٔ مرزی $A$ در $X$ خوانیم در صورتی که هر مجموعهٔ باز شامل $x$ هر دو مجموعه $A$ و $X - A$ را قطع کند. مجموعهٔ همهٔ نقاط مرزی $A$ را مرز $A$ می‌نامند و آن را با $\partial(A)$ نمایش می‌دهند.

## ۲.۱ حد، پیوستگی، مشتق و کاربردهای آن

تعریف(۱.۲.۱): فرض می‌کنیم $(X,d)$ یک فضای متری باشد. دنباله $\{p_n\}$ در فضای متری $X$ را همگرا نامند، هر گاه نقطه‌ای مانند $p \in X$ با خاصیت زیر وجود داشته باشد: به ازای هر $\epsilon > 0$ عدد صحیحی مانند $N$ باشد به طوری که $\forall n \geq N$ نامساوی $d(p_n,p) < \epsilon$ را ایجاب کند.

قضیه(۱.۲.۱): در هر فضای متری، هر دنباله همگرا(یا کشی)، کراندار است [۲۷].

قضیه(۲.۲.۱): در هر فضای متری مجموعه حدود زیر دنباله‌های هر دنباله، مجموعه بسته است[۲۷].

[۱] continuum

تعریف(۲.۲.۱): فرض کنیم $X$ و $Y$ فضای متری بوده و $E \subset X$، $p \in E$ و $f$ مجموعه $E$ را به توی $Y$ بنگارد، در این صورت $f$ را در $p$ پیوسته نامند هر گاه به ازای هر $\epsilon > 0$، $\delta > 0$یی باشد به قسمی که به ازای هر نقطه مانند $x \in E$ که $d_X(x,p) < \delta$ داشته باشیم $d_Y(f(x), f(p)) < \epsilon$.

هر گاه $f$ در هر نقطه $E$ پیوسته باشد، $f$ را بر $E$ پیوسته نامند.

قضیه(۳.۲.۱): فرض کنیم $f$ یک نگاشت پیوسته از فضای متری و فشرده $X$ به توی فضای متری $Y$ باشد. در این صورت، $f(X)$ فشرده خواهد بود[۲۷].

تعریف(۳.۲.۱): فرض کنیم $f$ یک نگاشت پیوسته از فضای متری و فشرده $X$ به توی فضای متری $Y$ باشد. گوییم $f$ بر $X$ به طوریکنواخت پیوسته است هر گاه به ازای هر $\epsilon > 0$، $\delta$ مثبتی باشد به طوری که به ازای هر $p$ و $q$ در $X$ که $d_X(p,q) < \delta$ داشته باشیم $d_Y(f(p), f(q)) < \epsilon$.

قضیه(۴.۲.۱): فرض کنیم $f$ یک نگاشت پیوسته از فضای متری و فشرده $X$ به توی فضای متری $Y$ باشد. در این صورت، $f$ بر $X$ به طوریکنواخت پیوسته است[۲۷].

تعریف(۴.۲.۱): فرض کنیم $f$ یک تابع حقیقی باشد که بر فضای متری $X$ تعریف شده است گویند $f$ در نقطه $p \in X$ ماکزیمم موضعی دارد هر گاه $\delta$ مثبتی باشد به طوری که به ازای هر $q \in X$، هر گاه $d(p,q) < \delta$ داشته باشیم $f(q) \leq f(p)$.

مینیمم موضعی نیز به همین نحو تعریف می‌شود.

قضیه(۵.۲.۱)(قضیه فرما[۲]): تابع حقیقی $y = f(x)$ مفروض است و هر گاه این تابع در نقطه $x_0$ از نقاط داخلی حوزه تعریف‌اش ماکزیمم یا مینیمم باشد آنگاه در صورت وجود $f'(x_0)$، $f'(x_0) = 0$ است[۹].

قضیه(۶.۲.۱)(قضیه رل): هر گاه تابع $y = f(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته، در بازهٔ $(a,b)$ مشتق‌پذیر و $f(a) = f(b) = 0$ باشد آنگاه $c \in (a,b)$ ای وجود دارد به طوری که $f'(c) = 0$ است[۱].

[۲] Fermat theorem

**قضیه (قضیه مقدار میانگین) (۷.۲.۱)[۲۷]:** هر گاه $f$ یک تابع حقیقی پیوسته بر $[a,b]$ بوده و در $(a,b)$ مشتق‌پذیر باشد. آنگاه نقطه‌ای مانند $x \in (a,b)$ هست که در آن

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(x)$$

**قضیه (قضیه تیلور) (۸.۲.۱)[۲۷]:** فرض کنیم $f$ یک تابع حقیقی بر $[a,b]$ بوده و $f^{(n-1)}$ ($n$ عدد صحیح مثبت) بر $[a,b]$ پیوسته باشند. هر گاه به ازای هر $t \in (a,b)$، $f^{(n)}(t)$ وجود داشته باشد و $\beta, \alpha$ را نقاط متمایزی از $[a,b]$ انگاشته، تعریف می‌کنیم

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(t-\alpha)^k$$

در این صورت، نقطه‌ای مانند $x$ ما بین $\alpha$ و $\beta$ هست به طوری که

$$f(\beta) = P(\beta) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\beta-\alpha)^n$$

**تعریف (۵.۲.۱):** فرض کنیم $\{f_n\}$، $n = 1, 2, 3, \ldots$ دنباله‌ای از توابع باشد که بر مجموعهٔ $E$ تعریف شده باشد، و دنباله $\{f_n(x)\}$ از اعداد را به ازای هر $x \in E$ همگرا می‌گیریم. در این صورت، تابع $f$ را با

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (x \in E)$$

تعریف می‌کنیم. در این شرایط می‌گوییم $\{f_n\}$ را بر $E$ همگراست یا $\{f_n\}$ بر $E$ به $f$ نقطه به نقطه همگراست.

**تعریف (۶.۲.۱):** گوییم دنباله‌ای از توابع مانند $\{f_n\}$، $n = 1, 2, 3, \ldots$ بر $E$ به تابع $f$ به طور یکنواخت همگراست، هر گاه به ازای هر $\epsilon > 0$ عدد صحیحی مانند $N$ باشد به طوری که $\forall n \geq N$ نامساوی

$$| f_n(x) - f(x) | \leq \epsilon$$

را به ازای هر $x \in E$ ایجاب کند.

واضح است که هر دنباله به طور یکنواخت همگرا، نقطه به نقطه همگراست.

**تعریف (۷.۲.۱):** فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع باشد که بر مجموعه $E$ تعریف شده‌اند. می‌گوییم $\{f_n\}$ بر $E$ نقطه به نقطه کراندار است هر گاه دنبالهٔ $\{f_n(x)\}$ به ازای هر $x \in E$ کراندار باشد، یعنی، تابع $\phi$ با مقادیر متناهی بر $E$ تعریف شده باشد به طوری که

$$| f_n(x) | \leq \phi(x) \qquad (x \in E,\ n = 1, 2, 3, \ldots)$$