بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش محض

دوگان مزدوج در بهینه سازی برداری و کاربردهایی از نابرابری تغییراتی برداری

استادان راهنما:

دکتر مجید فخار

دکتر محمود لشگری زاده بمی

پژوهشگر:

علی اکبر نصیری بروجنی

تیرماه ۱۳۸۷

شیوه نگارش پایان نامه رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض آقای علی اکبر نصیری بروجنی

تحت عنوان:

دوگان مزدوج در بهینه سازی برداری و کاربردهایی از نابرابری تغییراتی

در تاریخ ...۸۷/۴/۲۵..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ....عالی...... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر محمود لشکری زاده بمی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۲- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر مجید فخار	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
۳- استاد داور داخل گروه	دکتر علی داوری	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
۴- استاد داور خارج گروه	دکتر علیرضا امینی	با مرتبه علمی استادیار	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه..............................

دانشگاه اصفهان

تشکر و قدردانی

در نگارش این پایان نامه افراد بسیاری به طور مستقیم و غیر مستقیم نقش داشته‌اند. پیش از همه از دکتر مجید فخار استاد راهنمای پایان نامه‌ام سپاسگزارم که اگر راهنمایی، لطف و یاری ایشان نبود به واقع این کار هرگز به سرانجام نمی‌رسید. همچنین از دکتر احمد صفاپور، دکتر مولائی، دکتر دهقان (از دانشگاه رفسنجان)، دکتر فخار، دکتر زعفرانی، دکتر رجالی و دکتر اسداللهی که در مراحل مختلف تحصیل کارشناسی ارشد از آموزش‌های خود مرا بهرمند نمودند، سپاسگزارم.

کارمندان دانشکده علوم گروه ریاضی دانشگاه اصفهان خانم قاضی، خانم گرامی، آقای نصیری و مسئول کتابخانه گروه خانم فرهمند که شرایط مناسبی را برای تحصیل دانشجویان فراهم می کنند قابل تقدیر و سپاس می‌باشند.

همچنین محمد گلستانی، سجاد ایزدی و محمد صادق مجاهدی که تحصیل در کنار آنها لذت بخش و آموزنده بود. و در انتها سپاس تقدیم پدر، مادر و همسرم که حمایت‌ها و تشویق‌های آنها باعث دلگرمی بود، همچنین تمامی دبیرانی که در تمام مقاطع تحصیلی صادقانه به تعلیم آینده سازان این مملکت همت می‌گمارند.

تقدیم به همسر صبور و مهربانم
و فرزندم آرین که آغازین روزهای
زندگی‌اش با آغاز کار پایان نامه‌ام همزمان
شد

چکیده:

هدف از این پایان نامه تعمیم آنچه شیوه اختلال در نظم نامیده می شود مربوط به دوگان مزدوج برای مسائل بهینه سازی برداری مقید است. برای این هدف دو مفهوم که در گذشته معرفی شده و چهار چوب آنها مسئله های بهینه سازی برداری مقدار است مورد استفاده قرار داده شده است. به عنوان یک مورد ویژه یک نابرابری تغییراتی برداری را به شکل یک مسئله بهینه سازی برداری بازنویسی می کنیم و از آن برای حل مسائل اولیه کمک می گیریم.

دوگان های برداری مزدوج معرفی شده در این نوشته شرایطی را فراهم می کند که تابع های فاصله جدیدی را برای نابرابری های تغییراتی معرفی کنیم. خاصیت های تعریف تابع فاصله را به وسیله قضیه های دوگان ضعیف و قوی بررسی میشود.

واژه های کلیدی: تابع اختلال، تابع فاصله، دوگان مزدوج، نابرابری تغییراتی، بهینه سازی برداری.

فهرست مندرجات

فهرست مندرجات

پیشگفتار

یک مسئله بهینه سازی عددی را می توان به یک مسئله دوگان با استفاده از شیوه اختلال نظیر کرد [۱۰]، این بحث به صورت عددی در گذشته به طور متمرکز بررسی شده است. بات[1] و ونکا[2] برای یک مسئله بهینه سازی عددی سه دوگان مزدوج به نام های لاگرانژ، فنچل و فنچل- لاگرانژ در نظر گرفته اند. همه آنها توسط تعداد تابع اختلال ویژه به دست می- آیند[۲۶,۷]. رابطه بین تابعهای هدف بهینه از این دوگانها به طور کامل بررسی شده است. تانینو[3] و ساواراگی[4] در [۲۶,۱۸] با الهام از مورد عددی یک نظریه دوگان مزدوج بنا شده روی همان شیوه اختلال توضیح داده اند البته برای مسائل بهینه سازی برداری. آنها یک مفهوم جدید از نگاشت مزدوج در فضاهای متناهی البعد بر اساس بازده پارتو بیان کردند. با استفاده از مفهوم مزدوج یک مسئله دوگان برای توابع اختلال متفاوت می توان به یک مسئله بهینه سازی برداری رسید. به علاوه با استفاده از مفهوم سوپریمم یک مجموعه براساس ترتیب جزئی [۲۴] این نظریه دوگان مزدوج به مسائل بهینه سازی در فضاهای برداری توپولوژیکی جزئاً مرتب [۲۵] و مسائل بهینه سازی برداری مجموعه مقدار [۲۲] تعمیم داده شده است.

در ابتدای فصل اول به بیان تعاریف و همچنین مفاهیم دوگان لاگرانژ، فنچل و فنچل- لاگرانژ مربوط به حالت عددی [۲۶,۱] خواهیم پرداخت. در انتهای این فصل با در نظر گرفتن توابع اختلال ویژه برای یک مسئله بهینه سازی برداری اولیه، سه مسئله دوگان برداری جدید روی همان مفاهیم دوگان لاگرانژ، فنچل و فنچل- لاگرانژ را در حالت برداری بررسی می- کنیم. برای این منظور تبدیل فنچل نوع I، [۱۸] و از طرف دیگر یک مفهوم مزدوج متفاوت، یعنی تبدیل فنچل نوع II را در نظر می گیریم. همچنین برای تعاریف و بعضی خواص مطالب اخیر به کتاب گوه[5] و یانگ[6] [۱۴] ارجاع می دهیم. برای همه دوگان های برداری در نظر گرفته شده دوگان ضعیف و قوی بیان شده است.در فصل دوم با ارتباط بین بهینه سازی برداری و نابرابری تغییراتی برداری سر و کار خواهیم داشت. از آنجایی که نابرابری تغییراتی برداری در یک فضای متناهی البعد ابتدا در[۱۱] معرفی شد، مقالات زیادی در گذشته با توجه به این موضوع نوشته شده است[۱۷,۱۶,۱۳]. با بررسی یک نابرابری تغییراتی برداری به عنوان یک مسئله بهینه سازی برداری، بردار مزدوج که در بخش اول معرفی شده است این امکان را به ما می دهد که توابع فاصله جدیدی را برای آنها تعریف کنیم. همچنین یک تئوری دوگان جدید برای مسئله بهینه سازی برداری مقید با استفاده از شیوه اختلال وکار با تبدیل فنچل نوعI توسعه داده شده است. انواع مختلف از توابع فاصله به وسیله نور[7] در[۲۱] برای نابرابری های تغییراتی عمومی در فضاهای هیلبرت در نظر گرفته شده است. نابرابری های تغییراتی عمومی در [۱۹] معرفی شده اند وشامل موارد خاص نابرابری

---

[1] Bot
[2] Wanka
[3] Tanino
[4] Sawaragi
[5] Goh
[6] Yang
[7] Nor

های تغییراتی می باشند [۲۰]. نتایج مشابه فصل دو در فصل سه با استفاده از تبدیل فنچل نوعII به دست می آید. این مفاهیم دوگان این امکان را می دهد که در فصل چهار توابع فاصله جدیدی را برای نابرابری تغییراتی تعریف کنیم. درستی این خصوصیات در تعریف توابع فاصله با به کار گیری قضیه های دوگان ضعیف و قوی بررسی شده است. شیوه ای که در اینجا در نظر گرفته ایم نتایج به دست آمده در [۴,۳] را به مورد برداری تعمیم می دهد.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل ابتدا تعاریف و مفاهیم پایه‌ای که برای مسائل بهینه سازی به طور کلی کاربرد دارند بیان می‌شود، سپس به بیان دوگان‌های لاگرانژ، فنچل و فنچل—لاگرانژ در حالت عددی خواهیم پرداخت. در انتهای فصل به بیان نتایجی در حالت برداری که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد، می‌پردازیم.

۱—۱ مفاهیم پایه

تعریف ۱.۱ : فرض کنید X یک مجموعه غیر تهی باشد.

الف) هر زیر مجموعه غیر تهی R از مجموعه $X \times X$ یک رابطه دوتایی R روی X نامیده می‌شود.

ب) هر رابطه دوتایی $\leq$ روی X یک ترتیب جزئی روی X نامیده می شود، اگر شرایط زیر برای اعضای آن برقرار باشد.

۱) $x \leq x$

۲) $x \leq y, y \leq z \Longrightarrow x \leq z$

۳) $x \leq y\ ,\ w \leq z \Longrightarrow x + w \leq y + z$

۴) $x \leq y, \alpha \in \mathbb{R}_+ \Longrightarrow \alpha x \leq \alpha y$

تعریف ۲.۱ :

الف) فرض کنید X فضای نرم دار حقیقی باشد، مجموعه $C \subseteq X$ مخروط[۱] نامیده می‌شود، اگربرای هر $\lambda \geq ۰$ و $y \in C$ داشته باشیم $\lambda y \in C$.

ب) مخروط C را محدب نامیم اگر برای $\lambda \geq ۰$

۱) $\lambda C \subseteq C$

۲) $C + C \subseteq C$

به طور معادل، اگر برای هر $\lambda_۱, \lambda_۲ \geq ۰$ و $y_۱, y_۲ \in C$ داشته باشیم

$$\lambda_۱ y_۱ + \lambda_۲ y_۲ \in C.$$

ج) مخروط C را بسته گوئیم اگر $C = cl\ C$.

[۱] cone

د) مخروط C را نوکدار گوئیم اگر،

$$C \cap (-C) = \{۰\}.$$

تعریف ۳.۱ :

الف) یک فضای خطی حقیقی مجهز به یک رابطه ترتیب جزئی یک فضای خطی جزئاً مرتب نامیده می‌شود.

ب) یک مخروط محدب مجهز شده با رابطه ترتیب جزئی در یک فضای خطی حقیقی یک مخروط مرتب نامیده می‌شود.

اگر C یک مخروط محدب، بسته و نوکدار در $\mathbb{R}^n$ باشد. برای هر $\xi, \mu \in \mathbb{R}^n$ رابطه‌های ترتیب زیر را به کار می‌بریم.

$$\xi \leq_C \mu \Longleftrightarrow \mu - \xi \in C$$

$$\xi \leq_{C\setminus\{۰\}} \mu \Longleftrightarrow \mu - \xi \in C \setminus \{۰\},$$

$$\xi \not\leq_{C\setminus\{۰\}} \mu \Longleftrightarrow \mu - \xi \notin C \setminus \{۰\}$$ و

مفاهیم $\geq_C$ ، $\geq_{C\setminus\{۰\}}$ و $\not\geq_{C\setminus\{۰\}}$ را به طور متناوب همانند بالا به کار خواهیم برد.

گزاره ۴.۱ : اگر $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ آنگاه، برای $y_۱, y_۲, y_۳ \in Y$ داریم:

الف) $$y_۱ \leq_{\mathbb{R}^n_+\setminus\{۰\}} y_۲ \quad , \quad y_۲ \leq_{\mathbb{R}^n_+\setminus\{۰\}} y_۳ \quad \Longrightarrow \quad y_۱ \leq_{\mathbb{R}^n_+\setminus\{۰\}} y_۳$$

ب) $$y_۱ \leq_{\mathbb{R}^n_+\setminus\{۰\}} y_۲ \quad , \quad y_۱ \not\leq_{\mathbb{R}^n_+\setminus\{۰\}} y_۳ \quad \Longrightarrow \quad y_۲ \not\leq_{\mathbb{R}^n_+\setminus\{۰\}} y_۳$$

اثبات : (الف) از $y_1 \leq_{\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}} y_2$ داریم که $y_2 - y_1 \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ و از $y_2 \leq_{\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}} y_3$ خواهیم داشت $y_3 - y_2 \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ در نتیجه $y_3 - y_1 \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ یعنی $y_1 \leq_{\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}} y_3$.

(ب) برهان خلف، اگر $y_2 \leq_{\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}} y_3$ آنگاه، بنابه (الف) $y_1 \leq_{\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}} y_3$ که این تناقض است. □

تعریف ۵.۱ : فرض کنید S یک زیر مجموعه غیر تهی از یک فضای خطی جزئاً مرتب با یک مخروط مرتب C باشد.

الف) یک عنصر $\bar{x} \in S$ عنصر ماکسیمال از مجموعه S نامیده می‌شود اگر

$$(\{\bar{x}\} + C) \cap S \subset \{\bar{x}\} - C$$

یا معادل آن

$$\bar{x} \leq_C x, x \in S \Longrightarrow \bar{x} = x$$

که در اینجا تعریف را به صورت زیر به کار می‌بریم،

نقطه $y \in \mathbb{R}^n$ ، نقطه ماکسیمال از یک مجموعه $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ گفته می‌شود اگر:

۱) $y \in Y$.

۲) وجود نداشته باشد $y' \in Y$ به طوری که $y \leq_{C \setminus \{0\}} y'$.

مجموعه همه نقاط ماکسیمال Y را ماکسیمم مجموعه Y نامیده و به صورت $\max\limits_{C \setminus \{0\}} Y$ نشان داده می‌شود.

ب) یک عنصر $\bar{x} \in S$ عنصر مینیمال از مجموعه S نامیده می‌شود اگر

$$(\{\bar{x}\} - C) \cap S \subset \{\bar{x}\} + C$$

یا معادل آن $x \leq_C \bar{x}, x \in S \Longrightarrow x = \bar{x}$

که در اینجا تعریف را به صورت زیر به کار می‌بریم،

نقطه $y \in \mathbb{R}^n$، نقطه مینیمال از یک مجموعه $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ گفته می‌شود اگر:

۱) $y \in Y$.

۲) وجود نداشته باشد $y' \in Y$ به طوری که $y \leq_{C\setminus\{0\}} y'$.

مجموعه همه نقاط مینیمال Y را مینیمم مجموعه Y نامیده و به صورت $\min\limits_{C\setminus\{0\}} Y$ نشان داده می‌شود.

همچنین مخروط C را به صورت $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0\}$ درنظر می‌گیریم .

اگر B یک ماتریس حقیقی $p \times n$ و A یک ماتریس حقیقی $m \times n$ و $b \in \mathbb{R}^m$ یک بردار باشد. همچنین $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ غیر تهی و فضای برداری $\mathbb{R}^m$ جزئاً مرتب باشد (یعنی $\mathbb{R}^m_+$ یک مخروط مرتب است). آنگاه،

$\bar{x} \in S$ یک نقطه مینیمال مجموعه $\{Bx \mid x \in S\}$ است، اگر و تنها اگر،

$$\exists t \in int\ \mathbb{R}^p_+ \quad : \quad t^T B\bar{x} \leq t^T Bx$$

تعریف ۶.۱ : اگر X و Y مجموعه‌های ناتهی باشند، نگاشت مجموعه مقدار $F : X \rightrightarrows Y$، تابعی است از مجموعه X به مجموعه توانی Y.

تعریف ۷.۱ : فرض کنید X و Y مجموعه‌های ناتهی باشند نگاشت مجموعه مقدار $F : X \rightrightarrows Y$ را در نظر می‌گیریم،

الف) دامنه F مجموعه‌ای از عناصر X است که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$Dom\ F = \{x \in X \mid F(x) \neq \emptyset\}$$

ب) نمودار F عبارت است از

$$Graph\ F = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = F(x), x \in Dom\ F\}$$

ج) F را غیر بدیهی گوئیم هرگاه نمودار آن غیر تهی باشد. یعنی حداقل یک $x \in X$ موجود باشد به طوری که $F(x) \neq \emptyset$.

د) برد F به صورت زیر است،

$$Im\ F = \bigcup_{x \in X} F(x).$$

ه) F را بسته مقدار(محدب مقدار) نامیم اگر مقادیر $F(x)$ بسته (محدب) باشند.

خاصیت P را روی زیر مجموعه‌ها در نظر می‌گیریم، مثل بسته و محدب بودن. چون نگاشت‌های مجموعه مقدار را با نمودار آنها بررسی می‌کنیم، لذا نگاشت مجموعه مقدار F در خاصیت P صدق می‌کند، اگر و تنها اگر نمودار آن در خاصیت P صدق کند.

تعریف ۸.۱ : بالا نمودار [۲] نگاشت مجموعه مقدار $F : X \rightrightarrows Y$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$epi\ F = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x) + C, x \in DomF\}.$$

که C مخروط محدب بسته است.

---

[۲] Epigrafh

تعریف ۹.۱ : (نقطه بهینه پارتو– ادگارد) فرض کنید $S \subseteq \mathbb{R}^n$ غیر تهی، $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ یک تابع برداری مقدار و فضای برد $\mathbb{R}^m$ جزئاً مرتب در یک راه طبیعی باشد(یعنی $\mathbb{R}^m_+$ یک مخروط مرتب است). $\bar{x} \in S$ یک نقطه پارتو– ادگارد(یا یک جواب مینیمال یا یک جواب مؤثر) از مسئله $\min\limits_{x\in S} f(x)$ نامیده می‌شود، اگر $f(\bar{x})$ یک عنصر مینیمال از مجموعه برد $f(S)$ باشد. یعنی وجود ندارد $x \in S$ که

$$f(x) \neq f(\bar{x}) \quad , \quad f_i(x) \leq f_i(\bar{x}) \quad ;\forall i = ۱, \cdots, m.$$

تعریف ۱۰.۱ : (نقطه بهینه پارتو– ادگارد سره) فرض کنید S زیر مجموعه غیر تهی از $\mathbb{R}^n$، $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ تابع برداری مقدار و فضای برد $\mathbb{R}^m$ جزئاً مرتب در راه طبیعی باشد (یعنی $\mathbb{R}^m_+$ یک مخروط مرتب است). $\bar{x} \in S$، نقطه پارتو– ادگارد سره (یا یک جواب مینیمال سره یا یک جواب مؤثر سره) از مسئله $\min\limits_{x\in S} f(x)$ نامیده می‌شود، اگر $\bar{x}$ یک نقطه پارتو– ادگارد بوده و یک عدد حقیقی مثبت μ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $i = ۱, \cdots, m$ و هر $x \in S$ که $f_i(x) < f_i(\bar{x})$ یک $j = ۱, \cdots, m$ وجود داشته باشد که $f_j(x) > f_j(\bar{x})$ و

$$\frac{f_i(\bar{x}) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(\bar{x})} \leq \mu.$$

یک نقطه بهینه پارتو – ادگارد، به طوری که بهینه پارتو – ادگارد سره نباشد، یک نقطه بهینه پارتو – ادگارد ناسره گفته می‌شود.

قضیه ۱۱.۱ : فرض کنید S زیر مجموعه غیر تهی از $\mathbb{R}^n$ و $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ تابع برداری مقدار باشد و فضای برد $\mathbb{R}^m$ را جزئاً مرتب در راه طبیعی در نظر بگیرید (یعنی $\mathbb{R}^m_+$ یک

مخروط مرتب است) و $t_1, \cdots, t_m$ اعداد حقیقی مثبت باشند. اگر $\bar{x} \in S$ یک جواب از مسئله بهینه سازی عددی زیر باشد،

$$\min_{x \in S} \sum_{i=1}^{m} t_i f_i(x)$$

آنگاه، $\bar{x}$ یک نقطه بهینه پارتو— ادگارد سره از مسئله بهینه سازی با تابع چند هدفه $\min_{x \in S} f(x)$ می‌باشد.

اثبات : اثبات، قضیه‌ی ۱۷.۱۱ در [۱۵].

مسائل بهینه سازی در علم اقتصاد بیشتر به صورت خطی هستند. در این صورت قضیه‌ی زیر را می‌توان برای حالت خطی بیان نمود.

قضیه ۱۲.۱ : مسئله بهینه سازی با تابع چند هدفه خطی

$$\min Cx$$

$$\text{با شرط مقید} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n : \quad Ax \leq b$$

مفروض است. جایی که C یک ماتریس حقیقی $m \times n$، A یک ماتریس حقیقی $k \times n$ و $b \in \mathbb{R}^k$ یک بردار باشد. فرض کنید مجموعه مقید $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ غیر تهی و فضای برد $\mathbb{R}^m$ جزئاً مرتب در یک راه طبیعی باشد (یعنی $\mathbb{R}^m_+$ یک مخروط مرتب است). آنگاه، $\bar{x} \in S$ یک نقطه بهینه پارتو— ادگارد برای مسئله بهینه سازی با تابع چند هدفه خطی مطرح شده است، اگر و تنها اگر، $\bar{x} \in S$ نقطه بهینه پارتو— ادگارد سره مسئله مطرح شده باشد.

اثبات : اثبات، قضیه‌ی ۲۰.۱۱ در [۱۵].