دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

مدل پیش‌بینی زمانِ تضمین بر اساس داده‌های برگشتی تصادفی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد آمار اقتصادی و اجتماعی

سجاد رئیسی

استاد راهنما

دکتر علی زینل همدانی

۱۳۸۷

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد آمار اقتصادی و اجتماعی‌سجاد رئیسی

تحت عنوان

مدل پیش‌بینی زمانِ تضمین بر اساس داده‌های برگشتی تصادفی

در تاریخ ۸۷/۱۲/۲۴ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ – استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر علی زینل همدانی
۲ – استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر سروش علیمرادی
۳ – استاد داور ۱	دکتر ناصر ملاوردی (دانشکده مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی اصفهان)
۴ – استاد داور ۲	دکتر حمید قربانی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکتر رسول نصر اصفهانی

کلیه حقــوق مادی مترتب بـــر نتایج مطالعات،
ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع
ایــن پایان‌نامـــه متعلق بـــه دانشــگاه صنعتی
اصفهان است.

فهرست مطالب

فصل اول مقدمه ۱

۱–۱ مقدمه ۱

۱–۲ تاریخچه ۳

فصل دوم مفاهیم اولیه قابلیت اعتماد ۶

۲–۱ مقدمه ۶

۲–۲ مفاهیم پایه ۷

۲–۲–۱ روابط بین توابع $f(t)$، $F(t)$، $h(t)$ و $H(t)$ ۹

۲–۲–۲ انواع توابع نرخ شکست ۱۰

۲–۲–۳ انواع داده ۱۶

۲–۲–۴ تشخیص نوع تابع نرخ شکست ۱۷

۲–۳ انتخاب توزیع مناسب و روش برآورد پارامترها ۲۵

۲–۳–۱ برازش توزیع نمایی ۲۷

۲–۳–۲ برازش توزیع وایبل با پارامترهای α و λ ۲۸

۲–۴ مفهوم وابستگی و معرفی مدل‌های دومتغیره در قابلیت اعتماد ۲۹

۲–۴–۱ ارتباط ۲۹

۲–۴–۲ مدل‌های طول عمر در قابلیت اعتماد ۳۳

۲–۴–۳ ساخت توزیع‌های دومتغیره ۳۳

۲–۵ توزیع‌های نمایی دومتغیره ۳۶

۲–۵–۱ توزیع نمایی دومتغیره‌ی گامبل ۳۶

۲–۵–۲ توزیع نمایی دومتغیره‌ی $F.G.M$ ۳۹

۲–۵–۳ توزیع نمایی دومتغیره‌ی مارشال–الکین ۴۰
۲–۶ سایر توزیع‌های دومتغیره در قابلیت اعتماد ۴۲
۲–۶–۱ توزیع دومتغیره‌ی وایبل ۴۲
۲–۶–۲ توزیع دومتغیره‌ی لجستیک ۴۳

فصل سوم کاربرد انواع داده‌ها در مدل‌سازی تضمین ۴۵
۳–۱ مقدمه ۴۵
۳–۲ چارچوب مطالعه و بررسی ۴۶
۳–۳ آنالیز داده‌های مبتنی بر عامل زمان ۴۷
۳–۴ آنالیز داده‌های تضمینِ تلفیق شده ۴۹
۳–۵ آنالیز داده‌های مربوط به تعداد نهایی برگشتی‌ها ۵۲
۳–۶ آنالیز داده‌های تضمین بر اساس متغیرهای کمکی ۵۴
۳–۷ برآورد توزیع طول عمر بر اساس داده‌های تکمیلی (اضافی) ۵۶
۳–۸ تضمینِ دوبعدی ۵۹
۳–۹ آنالیز هزینه‌ی تضمین ۶۱
۳–۱۰ آنالیز تأخیر زمانی گزارش شده و تأخیر زمانی فروش ۶۵
۳–۱۱ پیش‌بینی برگشتی‌های تضمین ۶۶
۳–۱۲ داده‌های مورد مطالعه در این پایان‌نامه ۶۶

فصل چهارم استفاده از روش تکه‌ای در مدل‌سازی تضمین ۶۷
۴–۱ مقدمه ۶۷
۴–۲ مدل پیش‌بینیِ تضمین ۶۸
۴–۳ تعیین پارامترهای توزیع ۷۲
۴–۴ روند پیش‌بینی ۷۶
۴–۵ یک مثال کاربردی از قطعات الکترونیکی اتومبیل ۷۹

فصل پنجم شبیه‌سازی، نتایج و پیشنهادات ۸۳
۵–۱ مقدمه ۸۳
۵–۲ روش‌های تحلیلی و شبیه‌سازی تصادفی؛ مزایا و معایب ۸۴
۵–۳ تکنیک‌های موجود در شبیه‌سازی تصادفی ۸۶

۵–۴ الگوریتم، نمودارها و نتایج حاصل از شبیه‌سازی ۸۶
۵–۴–۱ الگوریتم شبیه‌سازی ۸۶
۵–۴–۲ ورودی‌ها و خروجی مدل ۸۷
۵–۴–۳ نتایج حاصل از شبیه‌سازی ۸۹
۵–۴–۴ آنالیز حساسیت ۹۱
۵–۵ روشی برای تعیینِ مقدار بهینه‌ی دوره‌ی تضمین ۹۲
۵–۶ نتایج ۹۳
۵–۷ پیشنهادات ۹۴

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۹۵

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۱۰۰

مراجع ۱۰۴

چکیده:

اغلبِ محصولات جدید همراه با ضمانت‌نامه به مراکز فروش فرستاده می‌شوند. یکی از انواع سیاست‌های بسیار رایجِ تولید، تعیینِ ضمانت‌نامه با دوره و زمان ثابت و مشخص می‌باشد. در این زمان، کارخانجات و بنگاههای تولیدی اقلام خراب را به صورت مجانی، تعویض یا تعمیر می‌کنند. به طور کلی، یک مشتری در مورد کیفیت یک محصولِ جدید، نامطمئن و مردد خواهد بود و در نتیجه یک ضمانت‌نامه‌ی خوب، اطمینان و اعتماد مشتری را افزایش خواهد داد. هم‌چنین دوران تضمینِ طولانی‌تر اغلب به عنوان ابزار پیشرفته‌ی بازاریابی مورد استفاده قرار می‌گیرد؛ سابقه، توقعات مورد انتظار و پیش‌بینیِ تضمین به شدت بر ارزش بازار حاصل از فروش کالاهای مستعمل و جدید تأثیر می‌گذارد.

در بسیاری از صنایع، مهندسان کیفیت و قابلیت اعتماد؛ کسانی که درگیر فرآیند پیش‌بینیِ تضمین هستند؛ مدل‌های تجربی بر اساس تعداد کالاهای برگشتی در دوران تضمین را مورد استفاده قرار می‌دهند تا برای تغییراتِ طراحی و تکنولوژی در محصولات، دلایل قانع کننده‌ای را ارائه دهند. لذا یک مدل معقولانه‌ی علمی، دقیق و منطقی که یادگیری و کار با آن ساده است می‌تواند کمک کند تا وظیفه‌ی پیش‌بینیِ تضمین را با دقت و ظرافت بهتر به انجام برساند و این امر نیز مستلزم برآورد برگشتی‌های دارای ضمانت‌نامه در آینده است.

در این پایان‌نامه، هدف، بررسی انواع توزیع‌های آماری مناسب برای داده‌های برگشتیِ دارای ضمانت‌نامه و مدل‌سازی زمانِ تضمین بر مبنای داده‌های مزبور می‌باشد. به طور خاص از مدل ترکیبی وایبل—نمایی با پارامترهای مربوطه برای مدل‌سازی داده‌ها استفاده می‌شود.

رده‌بندی موضوعی: ۶۲N۰۵، ۹۰B۲۵، ۹۷C۴۰، ۴۶N۳۰، ۴۷N۳۰.

کلمات کلیدی: تضمین دوبعدی، توزیع تکه‌ای، توزیع‌های آمیخته، شبیه‌سازی تصادفی، مونت کارلو، روش بیزی، تجزیه و تحلیل وایبل.

فصل ۱

مقدمه

۱–۱ مقدمه

در هر جامعه‌ی مدرن، مهندسان و مدیران فنی، مسئول برنامه‌ریزی، طراحی، ساخت و بهره‌برداری از ساده‌ترین محصول تا پیچیده‌ترین سیستم‌ها هستند. از کار افتادن محصول‌ها و سیستم‌ها موجب وقوع اختلال در سطوح مختلفی می‌شود و می‌تواند حتی تهدیدی شدید برای جامعه و محیط زیست نیز تلقی شود. از این‌رو مصرف کنندگان و به طور کلی مردم جامعه انتظار دارند که محصولات و سیستم‌ها پایا، اطمینان‌بخش و ایمن باشند. بنابراین به عنوان یک پرسش اساسی چنین مطرح است که قابلیت اعتماد سیستم در طول عمرِ کاریِ آینده‌اش چه میزانی است و ایمنی آن چقدر است؟ این پرسشی است که بخش‌هایی از آن را می‌توان با ارزیابی و کمیت سنجی قابلیت اعتماد پاسخ داد.

لذا به منظور جلب اعتماد و رضایت مصرف کنندگان و به طور کلی مردم جامعه که انتظار دارند محصولات، اطمینان‌بخش و ایمن باشند و در پاسخ به این پرسش اساسی که قابلیت اعتمادِ یک محصول در طول عمرِ کاریِ آینده‌اش به چه میزانی است، اغلبِ محصولاتِ جدید همراه با ضمانت‌نامه به مراکز فروش فرستاده می‌شوند. ضمانت‌نامه[۱] عبارت است از یک توافق قراردادی میان تولید کننده (فروشنده) و مصرف کننده (خریدار) که در آن تولید کننده موظف است تمامی خرابی‌هایی را که در دوره‌ی تضمین رخ می‌دهد، جبران کند. در واقع ضمانت‌نامه عبارت است از یک تعهد که توسط تولید کننده به مصرف کننده

[۱] Warranty

داده می‌شود به طوری که این تضمین بیان می‌دارد که محصول، وظیفه‌ی محوّله و مورد انتظار خود را تحت شرایط استفاده‌ی صحیح، حداقل برای دوره‌ی تضمین انجام خواهد داد (یعنی محصول، قابل اطمینان و معتبر خواهد بود). یکی از انواع سیاست‌های بسیار رایجِ تولید، تعیینِ ضمانت‌نامه با دوره و زمان ثابت و مشخص می‌باشد. معمولاً شرایط بازار یکی از اصلی‌ترین فاکتورهایی است که مدت و شرایط ضمانت‌نامه را تعیین می‌کند. این در حالی است که قابلیت اعتماد و کیفیت مورد انتظارِ محصولات به عنوان فاکتور مهم پشتیبانی، مورد بررسی قرار می‌گیرد؛ در حقیقت، اغلب اوقات، مدت و شرایط ضمانت‌نامه‌ی واقعی توسط فشارها و شرایط بازار تعیین می‌شود.

زمانی که یک محصولِ دارای ضمانت‌نامه، در دوره‌ی تضمین خراب می‌شود و مصرف کننده یک ادعای برحق و قانونی نسبت به تعمیر یا تعویض محصول از تولید کننده دارد، این ادعا به عنوان یک برگشتیِ تضمین شناخته می‌شود. مقصود و هدفِ ضمانت‌نامه، بنا نهادن یک مسئولیت و تعهد برای تولید کننده در مواقعی است که یک قطعه به شرط استفاده‌ی صحیح، خراب شود و یا قادر نباشد تا وظیفه‌ی محوله‌ی خود را انجام دهد. در حقیقت، ضمانت‌نامه بر آن است تا خریدار را مطمئن سازد که محصول، وظیفه‌ی محوله‌ی خود را تحت شرایط استفاده‌ی صحیح در مدت مشخص شده توسط فروشنده، انجام خواهد داد. بخصوص ضمانت‌نامه، خریدار را از این بابت آسوده خاطر و مطمئن می‌سازد که یک قطعه‌ی معیوب بدون هیچ هزینه‌ای و یا با یک هزینه‌ی کمتر، تعمیر و یا تعویض خواهد شد.

یک مدل معقولانه‌ی علمی، دقیق و منطقی که یادگیری و کار با آن ساده است می‌تواند کمک کند تا وظیفه‌ی پیش‌بینیِ تضمین را با دقت و ظرافت بهتر به انجام برساند و کیفیت کلی تصمیمات مالی و تجاری را بهبود بخشد و این امر مستلزم برآورد برگشتی‌های دارای ضمانت‌نامه در آینده است.

در این پایان‌نامه، هدف، بررسی انواع توزیع‌های آماری مناسب برای داده‌های برگشتیِ دارای ضمانت‌نامه و مدل‌سازی زمانِ تضمین بر مبنای داده‌های مزبور می‌باشد. به طور خاص از مدل ترکیبی وایبل—نمایی با پارامترهای مربوطه برای مدل‌سازی داده‌ها استفاده می‌شود. نتایج حاصل از به‌کارگیری این توزیع که مربوط به طول عمرهایی با نرخ شکست «منحنی وان حمامی» می‌باشند با سایر توزیع‌های متداول در مطالعه‌ی تضمین، نشان دهنده‌ی اهمیت استفاده از توزیع‌های مرکب (آمیخته) در بررسی قابلیت اعتمادِ کالاهای تولیدی و تعیین زمانِ تضمین آن‌ها است.

حاصل بررسی‌ها و مطالعاتِ به عمل آمده، در ۴ فصل به شرح زیر دسته‌بندی شده است:

فصل دوم شامل مفاهیم پایه، قضایای مربوطه، مفاهیم وابستگی و انواع توزیع‌های مهمِ یک متغیره و دومتغیره در قابلیت اعتماد خواهد بود.

فصل سوم به معرفی انواع داده‌های موجود در قابلیت اعتماد پرداخته و کاربرد این داده‌ها در مدل‌سازیِ تضمین را ارائه می‌نماید. از آن‌جا که این فصل مروری بر کلیه‌ی مقالات موجود در این زمینه

تا سال ۲۰۰۴ می‌باشد، لذا تعداد زیاد مراجع ارائه شده در این فصل نیز به همین دلیل بوده و صرفاً برای علاقه‌مندان به مطالعات بیشتر است و هیچ ادعایی مبنی بر مطالعه‌ی تمامی مراجع وجود ندارد.
فصل چهارم که قسمت اصلی این پایان‌نامه را تشکیل می‌دهد به کاربرد روش تکه‌ای در مدل‌سازیِ تضمین اختصاص دارد.
فصل پنجم نیز شامل الگوریتم شبیه‌سازی، نتایج و پیشنهادات این مطالعه است.

۱—۲ تاریخچه

شیوه‌های ارزیابی قابلیت اعتماد، ابتدا در ارتباط با صنایع هوا—فضا و کاربردهای نظامی شکل گرفت، ولی سریعاً توسط سایر صنایع مانند صنایع هسته‌ای که تحت فشار شدیدی جهت تضمین ایمنی و قابلیت اعتماد راکتورهای هسته‌ای در تأمین انرژی الکتریکی بودند و یا صنایع فرآیندهای پیوسته مانند صنایع فولاد و صنایع شیمیایی که هر ساعت توقف آن‌ها به علت وقوع معایب می‌تواند موجب تحمیل خسارت‌های بزرگ مالی و جانی و آلودگی محیط زیست شود، مورد توجه و کاربرد قرار گرفت.
از نظر تاریخچه، تحقیق در زمینه‌ی قابلیت اعتماد با مسئله‌ی تعمیر و نگهداری ماشین‌ها در اواخر دهه‌ی ۱۹۳۰ و جایگزینی لامپ‌های روشنایی خیابان در اوایل دهه ۱۹۴۰ آغاز شد و به ویژه در جنگ جهانی دوم در مورد سیستم‌های پیچیده‌ی نظامی مورد استفاده قرار گرفت و تجارب بسیار مفیدی به دست آمد. جنگ جهانی دوم و ساخت ابزار پیچیده‌ی جنگی باعث شد تا مدل‌سازی قابلیت اعتمادِ سیستم ابداع شود. در دهه‌ی ۵۰ همزمان با ابداع سیستم‌های الکترونیکی و به منظور کاهش هزینه‌های رقابت و هم‌چنین با شروع جنگ کره، گروه‌های مطالعاتیِ مشخصی شکل گرفت. دهه‌ی ۶۰ با آغاز عصر فضا و پیشرفت‌های صنایع فضایی، تحقیق و پژوهش در زمینه‌ی قابلیت اعتماد گسترش یافت، در این میان نقش آماردانان نیز بسیار برجسته بود. در همین سال‌ها، اولین کتاب در این زمینه توسط بازوفسکی[۲] و هم‌چنین اولین شماره‌ی نشریه‌ی "IEEE Transaction on Reliability" منتشر شد. در دهه‌های ۷۰ و ۸۰ میلادی همزمان با پیشرفت صنایع پتروشیمی و تکنولوژی راه آهن، اتومبیل‌سازی و سدسازی، از تکنیک‌های آماری به طور وسیعی در قابلیت اعتماد استفاده گردید، هم‌چنین در طراحی انواع سیستم‌های صنعتی، روش‌های قابلیت اعتماد به کار گرفته شد و در دهه‌ی ۹۰ با پیشرفت صنعت بیمه و مسائل رقابتی، مباحث قابلیت اعتماد به علوم پزشکی نیز وارد شد.
کالب‌فلایش[۳] و همکاران[۲۸] در سال ۱۹۹۱، تحقیقاتی را در مورد استفاده از مدل پواسن با پارامتر

[۲] Bazovsky
[۳] Kalbfleisch

وابسته به زمان برای تجزیه و تحلیل و پیش‌بینی برگشتی‌هایِ تضمین انجام دادند.
سینگپوروالا[۴] و ویلسون[۵] [٦٦] در سال ۱۹۹۸، رویکردی را برای بسط و توسعه‌ی مدل‌های احتمالی در زمینه‌ی قابلیت اعتماد پیشنهاد کردند به طوری که این مدل‌ها با دو متغیر یعنی زمان و کمیتِ وابسته به زمان مانند میزان استفاده و کارکرد، نشان داده می‌شوند. آن‌ها این متغیرها را در مدل شکست جمعی[٦] مورد استفاده قرار دادند.
سوزوکی[٦٩] در سال ۱۹۹۳، برآوردِ طول عمر که در قالبِ کارکرد و مسافت، اندازه‌گیری شده بود را در حضور متغیر زمان به عنوان یک متغیر همراه (همزمان) مورد مطالعه قرار داد. در صورت وجودِ متغیر همراه، فرض می‌شود که متغیر تصادفیِ مورد علاقه دارای توزیع نرمال است.
لاولس و همکاران[۳۹] در سال ۱۹۹۵، روش‌هایی را برای مدل کردنِ وابستگیِ خرابی‌ها با زمان و مسافت ارائه نموده و هم‌چنین برآوردِ توزیع‌ها و نرخ‌های قابلیت اعتماد را با استفاده از اطلاعات اضافی مورد مطالعه و بررسی قرار دادند. این اطلاعات اضافی همان کارکردها و مسافت‌های طی شده بود که بر اساس داده‌های برگشتی جمع آوری شده بودند.
فلیپس[۷] و سویتینگ[۸] [٦٣] در سال ۱۹۹٦ به صورت مجزا و مستقل از سوزوکی، داده‌های تضمین با توزیع نمایی را مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. در این‌جا از متغیر وابسته‌ای که دارای توزیع گاما بود به عنوان متغیر همراه استفاده شد.
علاوه بر مطالعات صورت گرفته در قبل، مجدداً کالب‌فلایش و لاولس[۲۹] درسال ۱۹۹٦ و به طور مستقل لاولس[۴۰] در سال ۱۹۹۸ یک مطالعه‌ی دقیق و جامع از برخی روش‌های تجزیه و تحلیل داده‌های خرابی و هزینه‌های مرتبط با آن‌ها را انجام داده و هم‌چنین برآورد توزیع‌ها یا نرخ‌های شکست آن‌ها را نیز ارائه نمودند.
علاوه بر آن ماسودا[۹] و همکاران[۴۹] در سال ۱۹۹۹ و سوزوکی و همکاران[۷۱] در سال ۲۰۰۱، مدل مشابهی را به منظور تجزیه و تحلیل تعداد نهایی داده‌های خرابی برای محصولات دارای ضمانت‌نامه ارائه نمودند. کیم[۱۰] و رائو[۱۱] [۳٦] در سال ۲۰۰۰، سیاستِ تضمین دوبعدی برای قطعات تعمیرناپذیر را بررسی کرده و آنالیز هزینه‌ی تضمینِ مورد انتظار بر اساس توزیع نمایی دومتغیره را مورد بررسی قرار دادند.

---
[۴] Singpurwalla
[۵] Wilson
[٦] Additive hazard model
[۷] Phillips
[۸] Sweeting
[۹] Masuda
[۱۰] Kim
[۱۱] Rao

مورتی[۱۲] و جمالودین[۱۳] [۵۵] در سال ۲۰۰۲، تألیفات موجود در زمینه‌ی تضمین را به روش‌های مختلف با حذف جزئیات ریاضی و هم‌چنین برجسته کردن مسائل و مشکلات مورد علاقه و جالب توجه تولید کنندگان در زمینه‌ی مدیریتِ محصولات جدید، مورد مطالعه و تجدید نظر قرار دادند.
هم‌چنین کرودر[۱۴] و اِسْتِفِنْس[۱۵] [۱۱] در سال ۲۰۰۳، داده‌های مشابهی را با به کار بردن فرآیند تجدیدپذیر زمان گسسته، مورد تجزیه و تحلیل قرار داده و برآوردگرهای شبه درستنمایی[۱۶] ماکزیمم برای پارامترها را پیشنهاد کردند. اخیراً نیز سوزوکی و ونگ[۱۷] [۷۲] در سال ۲۰۰۴، مشکل برآورد پارامتری توزیع زمان خرابی را با استفاده از تعداد نهایی داده‌های خرابی، مطالعه و بررسی نمودند.
کریم و سوزوکی[۳۳] در سال ۲۰۰۳، ویژگی‌های مختلف تولید را بسته به زمان‌های متفاوت تولید، مورد بررسی قرار دادند و فرض کردند که طول عمرِ محصول به این ویژگی‌ها و فصول عملیاتی بستگی داشته باشد.
ماجسک[۱۸] [۴۶] در سال ۲۰۰۳، مدل آمیخته‌ی[۱۹] عمومی را برای تجزیه و تحلیل داده‌های تضمین پیشنهاد نمود. به علاوه، ری[۲۰] و سینگ[۲۱] [۶۴] در سال ۲۰۰۳، روشی را برای برآورد نرخ شکست بر اساس داده‌های تضمینِ ناکامل[۲۲]، مورد بحث و بررسی قرار دادند. هم‌چنین پال[۲۳] و مورتی[۲۴] [۶۱] در سال ۲۰۰۳، کاربردی از توزیع نمایی دومتغیره‌ی گامبل در برآورد هزینه‌ی تضمین موتورسیکلت‌ها تحت سیاست تضمین دوبعدی را ارائه و پیشنهاد نمودند.
هم‌چنین زمینه‌ها و جنبه‌های مهمِ تضمین توسط مورتی و بلیشک[۲۵] [۵۴] در سال ۲۰۰۱ و مورتی و جمالودین [۵۵] در سال ۲۰۰۲ بحث شده است. علاوه بر آن چوکوا[۲۶] و هیاکاوا[۲۷] [۱۰] در سال ۲۰۰۴، مقدمه‌ای کوتاه از مفاهیم و مشکلات موجود در آنالیز تضمین را نیز ارائه کردند.

---

[۱۲] Murthy
[۱۳] Djamaludin
[۱۴] Crowder
[۱۵] Stephens
[۱۶] Quasi-likelihood estimators
[۱۷] Wang
[۱۸] Majeske
[۱۹] Mixture
[۲۰] Rai
[۲۱] Singh
[۲۲] Incomplete
[۲۳] Pal
[۲۴] Murthy
[۲۵] Blishcke
[۲۶] Chukova
[۲۷] Hayakawa

فصل ۲

مفاهیم اولیه قابلیت اعتماد

۲—۱ مقدمه

در این فصل مفاهیم پایه، قضایای مربوطه و انواع توزیع‌های یک متغیره که کاربرد زیادی در برازش مدل‌های مناسب به داده‌های طول عمر دارند بررسی می‌شود. همچنین از آن جایی که در نظر نگرفتن عاملِ وابستگی بین مؤلفه‌ها سبب ایجاد خطا در محاسبه‌ی قابلیت اعتمادِ سیستم و دیگر خواص آن از نقطه نظر قابلیت اعتماد می‌گردد، لذا مفاهیم وابستگی و انواع توزیع‌های مهمِ دومتغیره در قابلیت اعتماد نیز مورد مطالعه قرار خواهد گرفت.

۲–۲ مفاهیم پایه

تعریف ۱.۲ موجود[۱]

هر آن‌چه که بررسی طول عمر و قابلیت اعتماد آن می‌تواند اهمیت داشته باشد را یک موجود می‌نامیم. یک موجود می‌تواند یک انسان، یا یک سیستم پیچیده‌ی الکترونیکی و یا یک جزء کوچک از یک سیستم باشد.

تعریف ۲.۲ زمان بقا[۲]

زمان بقا یا طول عمر یک موجود که با T نمایش داده می‌شود، فاصله‌ی بین زمان شروع به کار موجود تا زمان خرابی آن می‌باشد و یک متغیر تصادفی نامنفی است.

تعریف ۳.۲ توزیع خرابی[۳]

توزیع خرابی، یک توزیع پیوسته برای متغیر نامنفی T است و کاربرد آن در مدل‌سازی داده‌های مربوط به زمان بقای موجودات است.

تعریف ۴.۲ تابع قابلیت اعتماد[۴]

قابلیت اعتماد[۵] یک موجود برابر با احتمال آن است که موجود کار معینی را تحت شرایط مشخص در فاصله‌ی زمانی $(۰, t)$ به طور رضایت‌بخش انجام دهد. اگر متغیر تصادفی T نشانگر طول عمر موجود باشد در این صورت تابع قابلیت اعتماد یا تابع بقا[۶] ، با فرض وجود تابع چگالی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$R(t) = P(T > t) = \int_t^{\infty} f(u)\, du = ۱ - F(t). \qquad (۱)$$

که $f(t)$ تابع چگالی طول عمرِ موجود است. اگر $F(t)$، توزیع تجمعی مربوط به طولِ عمر این موجود باشد، قابلیت اعتماد یک موجود با توجه به رابطه‌ی بیان شده برابر با $۱ - F(t)$ نیز است، که $F(t)$، تابع

[۱] Entity
[۲] Survival time or Life time
[۳] Failure distribution
[۴] Reliability function
[۵] Reliability
[۶] Survival function

عدم اعتماد[۷] نامیده می‌شود و معادل با احتمال آن است که موجود در فاصله‌ی زمانی $(۰,t)$ خراب شود. با توجه به آن که تابع بقا یعنی $R(t) = ۱ - F(t)$، تابع غیر صعودی از زمان است لذا واضح است که $R(۰) = ۱$ و $R(\infty) = ۰$، به عبارتی موجود در زمان صفر(شروع) حتماً سالم است و در زمان‌های خیلی بزرگ، احتمال سالم بودنِ موجود، صفر می‌باشد.

تعریف ۵.۲ خرابی[۸]

خرابی یا شکست یک موجود معادل است با متوقف شدن توانایی موجود برای انجام کار معین تحت شرایط مشخص.

تعریف ۶.۲ تابع شکست[۹]

تابع شکست یا نرخ خرابی[۱۰] که با $h(t)$ نشان داده می‌شود برابر است با حد احتمال آن که موجود در فاصله‌ی بسیار کوچک بعد از زمان t، خراب شود به شرط آن که تا زمان t سالم بوده است یا به عبارتی:

$$h(t) = \lim_{\triangle t \to ۰} \frac{P(t < T < t + \triangle t | T > t)}{\triangle t}$$

$$= \lim_{\triangle t \to ۰} \frac{F(t + \triangle t) - F(t)}{\triangle t . R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}. \qquad (۲)$$

هر تابع $h(t)$ که دارای شرایط زیر باشد یک تابع نرخ شکست به حساب می آید:

الف) $\forall t, \quad h(t) \geq ۰$.

ب) $\lim_{x \to -\infty} \int_{-\infty}^{x} h(t)\, dt = ۰$.

ج) $\lim_{x \to \infty} \int_{-\infty}^{x} h(t)\, dt = \infty$.

تعریف ۷.۲ تابع تجمعی نرخ شکست $H(t)$[۱۱]

تابع تجمعی نرخ شکست به صورت زیر تعریف می شود:

$$H(t) = \int_{۰}^{t} h(x)\, dx. \qquad (۳)$$

---

[۷] Unreliability
[۸] Failure
[۹] Failure function
[۱۰] Failure rate function
[۱۱] Cumulative failur rate function

هر تابع پیوسته $H(t)$ که شرایط زیر را دارا باشد می‌تواند یک تابع تجمعی نرخ شکست به حساب آید:

الف) $H(t)$ تابعی غیر نزولی از t است.

ب) $\lim_{t\to ۰} H(t) = ۰$.

ج) $\lim_{t\to\infty} H(t) = \infty$.

د) $H(t)$ از طرف راست پیوسته است.

با توجه به آن که توزیعِ شکست، نشانگرِ توصیف ریاضی طول عمرِ یک موجود است، دو روش اصلی برای تعیین توزیع شکست یک موجود وجود دارد:

الف) جمع آوری داده‌های مربوط به طول عمر موجود و مشخص کردن توزیع آن با استفاده از روش‌های آماری.

ب) تعیین تابع نرخ شکست و بررسی رفتار آن بر اساس خصوصیات فیزیکی طول عمر موجود.

با معلوم بودن $h(t)$ می‌توان $f(t)$ و $F(t)$ را بر اساس روابط موجود که در ادامه آمده است، تعیین کرد.

۲–۲–۱ روابط بین توابع $f(t)$، $F(t)$، $h(t)$ و $H(t)$

بر اساس رابطه‌ی (۲):

$$h(t) = -\frac{d}{dt}\ln\left(R(t)\right).$$

$$\int_{۰}^{t} h(x)dx = -\ln\left[۱ - F(x)\right]_{۰}^{t}, \qquad (F(۰) = ۰,\ F(\infty) = ۱).$$

بنابراین طبق رابطه‌ی (۳):

$$۱ - F(t) = R(t) = \exp(-\int_{۰}^{t} h(x)dx) = \exp(-H(t)). \qquad (۴)$$

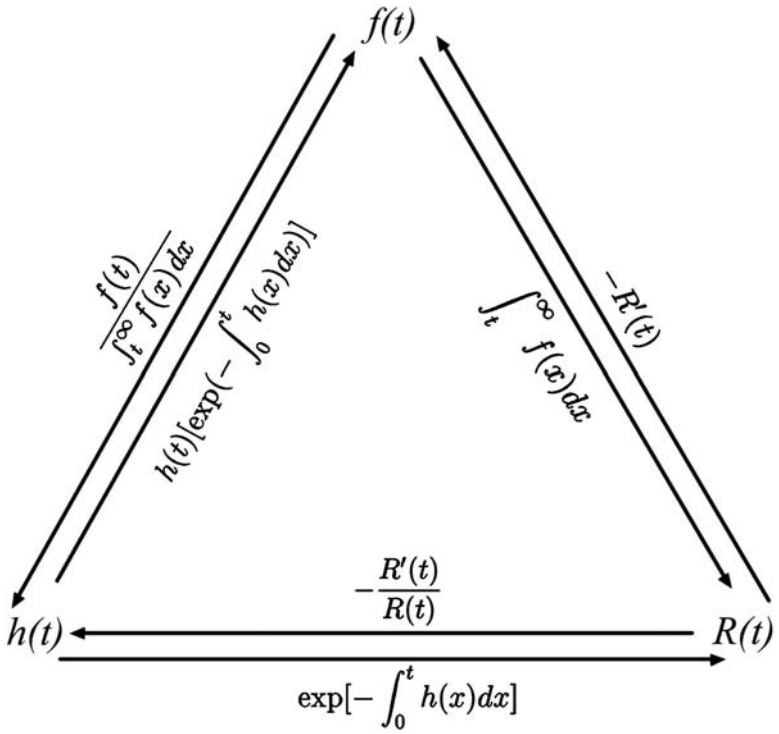
در نتیجه:

$$F(t) = ۱ - \exp(-\int_{۰}^{t} h(x)dx).$$

و

$$f(t) = h(t)[\exp(-\int_{۰}^{t} h(x)dx)].$$

بعضی از این روابط به طور خلاصه در شکل ۱ آمده است.



شکل ۱. روابط بین تابع چگالی، تابع نرخ شکست و تابع قابلیت اطمینان.

۲–۲–۲ انواع توابع نرخ شکست

برای ارزیابی و انتخاب $h(t)$، سه روند برای نرخ شکست مد نظر قرار می‌گیرد:

الف) $h(t)$ ثابت است (CFR)[۱۲]، یعنی نرخ خرابی موجود با گذشت زمان تغییر نمی‌کند.

ب) $h(t)$ نزولی است (DFR)[۱۳]، یعنی نرخ خرابی موجود با گذشت زمان کاهش می‌یابد.

ج) $h(t)$ صعودی است (IFR)[۱۴]، یعنی نرخ خرابی موجود با گذشت زمان افزایش می‌یابد.

قضیه ۸.۲ توزیع F، یک توزیع با نرخ شکست صعودی است، اگر برای هر x، تابع $R(x|t) = \frac{R(x+t)}{R(t)}$ در فاصله‌ی $-\infty < t < \infty$ برحسب t، نزولی باشد[۲].

اثبات.

روش اول: با توجه به آن که:

$$h(t) = \lim_{x \to ۰} \frac{۱}{x}[۱ - \frac{R(t+x)}{R(t)}],$$

[۱۲] Constant failure rate
[۱۳] Decreasing failure rate
[۱۴] Increasing failure rate

و طبق فرض مسئله $\frac{R(t+x)}{R(t)}$ نزولی است، بنابراین $h(t)$ صعودی می‌باشد.

روش دوم: با مشتق‌گیری از $R(x|t)$ بر حسب t خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt}R(x|t) = \frac{-f(x+t)R(t) + f(t)R(x+t)}{[R(t)]^2} < 0,$$

اگر و تنها اگر:

$$\frac{f(t)}{R(t)} < \frac{f(x+t)}{R(x+t)},$$

اگر و تنها اگر:

$$h(t) < h(x+t).$$

و این بدان معناست که $h(t)$ تابعی صعودی است. ■

قضیه ۹.۲ توزیع F، یک توزیع با نرخ شکست نزولی است، اگر برای هر x، تابع $R(x|t) = \frac{R(x+t)}{R(t)}$ در فاصله‌ی $-\infty < t < \infty$ برحسب t، صعودی باشد.

اثبات. اثبات این قضیه مشابه قضیه‌ی قبل می‌باشد. ■

به طور طبیعی در اکثر موارد روند نرخ شکستِ یک موجود، یکنوا نیست و ممکن است ترکیبی از سه حالت مذکور باشد. اکثر موجودات دارای سه ناحیه‌ی خرابی هستند:

الف) ناحیه‌ی خرابی‌های آغازین[۱۵] : هنگامی که محصول به تازگی تولید شده، نرخ خرابی بالا است. مانند کودک که در ابتدا در معرض بیماری‌های گوناگون است و رفته رفته با گذشت زمان نرخ مرگ و میر، کم می‌شود.

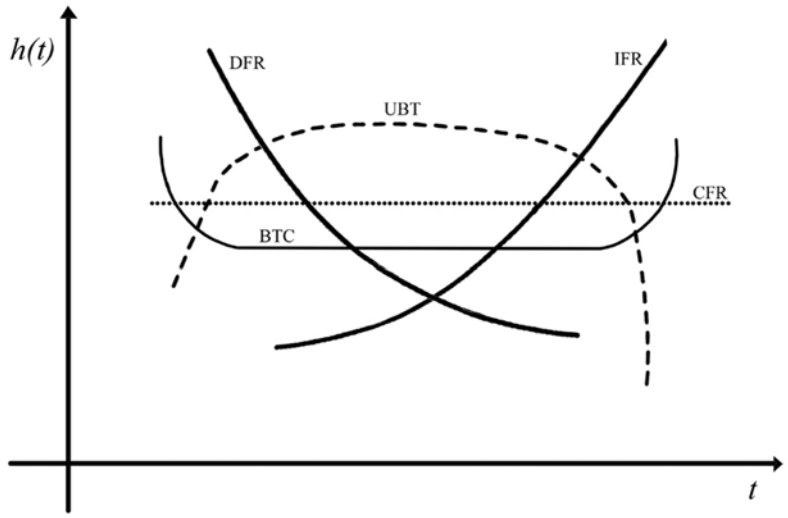
ب) ناحیه‌ی خرابی‌های تصادفی[۱۶] : این دوره، عمر مفیدِ موجود به حساب می آید. در این دوره خرابی‌ها به صورت تصادفی اتفاق می‌افتد. به عنوان مثال فوت انسان در بازه‌ی ۱۰ تا ۴۰ سال می‌تواند یک پدیده‌ی تصادفی باشد.

ج) ناحیه‌ی خرابی‌ها در اثر فرسودگی[۱۷] : در این ناحیه از زندگی موجود، نرخ شکست به تدریج افزایش

[۱۵] Initial failure
[۱۶] Chance failure
[۱۷] Wear-out failure

می‌یابد. به عنوان مثال مرگ و میر انسان از سن ۴۰ سال به بعد در اثر کهولت رو به افزایش می‌گذارد.

اگر نرخ شکست موجودی به ترتیب بر اساس سه روند شکست فوق باشد، آن‌گاه منحنی تابع نرخ شکستِ مربوط به آن موجود را منحنی وان حمامی[۱۸] یا U شکل گویند و آن را با BTC نشان می‌دهند.
در بسیاری از موارد نیز عکس این حالت رخ می‌دهد. یعنی در ابتدا نرخ شکست صعود می‌کند، سپس حالت ثابت داشته و در نهایت نزول می‌کند. به چنین توابع نرخ شکستی، اصطلاحاً وان شکل معکوس[۱۹] می‌گویند و آن را با UBT نشان می‌دهند.
می‌توان نشان داد که توزیع‌هایی مثل لاگ نرمال[۲۰] و نرمال معکوس[۲۱] دارای نرخ شکست UBT می‌باشند.
بنابراین به اختصار انواع نرخ شکست را در حالت یک متغیره می‌توان به پنج فرم اساسی CFR، DFR، IFR، BTC و UBT نشان داد. این پنج فرم در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲. نمودار توابع مختلف نرخ شکست.

[۱۸] Bathtub curve
[۱۹] Upside-down Bathtub
[۲۰] Log-Normal
[۲۱] Inverse Normal

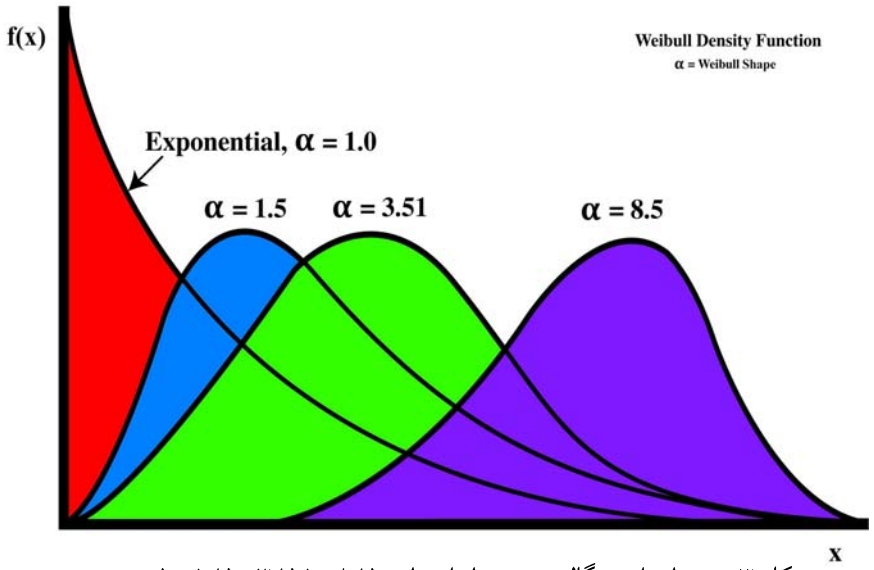
مثال ۱۰.۲ توزیع وایبل یکی از مهم‌ترین توزیع‌های طول عمر در آنالیز قابلیت اعتماد است. این توزیع به یادبود پروفسور والودی وایبل[۲۲] که آن را برای مدل‌بندیِ قدرتِ مواد توسعه داد، توزیع وایبل نام گرفته است. یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های این توزیع، انعطاف‌پذیری آن است.
اگر T، زمان کارکرد تا خرابی یک موجود، از توزیع وایبل با پارامترهای α و λ پیروی کند یا به عبارتی $T \sim W(\lambda, \alpha)$، آن‌گاه تابع توزیع T به صورت زیر است:

$$F(t) = ۱ - \exp[-(\lambda t)^{\alpha}], \qquad t \geq ۰.$$

λ، پارامتر مقیاس[۲۳] و α، پارامتر شکل[۲۴] توزیع می‌باشند.
تابع چگالی T به صورت زیر است:

$$f(t) = \alpha \lambda^{\alpha} t^{\alpha - ۱} \exp[-(\lambda t)^{\alpha}], \qquad t \geq ۰.$$

در حالتی که $\alpha = ۱$، آن‌گاه توزیع وایبل معادل با توزیع نمایی است. برای αهای مختلف، $f(t)$ در شکل ۳ به تصویر کشیده شده است.



شکل ۳. نمودار تابع چگالی توزیع وایبل برای $\alpha = ۱,\ ۱/۵,\ ۳/۵۱,\ ۸/۵$.

[۲۲] Waloddi Weibull
[۲۳] Scale parameter
[۲۴] Shape parameter